الرياضيات

الجزء الخاص

بالشرح و التمارين





تطبيق
التعلّم التفاعلى



إعداد نخبة من خبراء التعليم

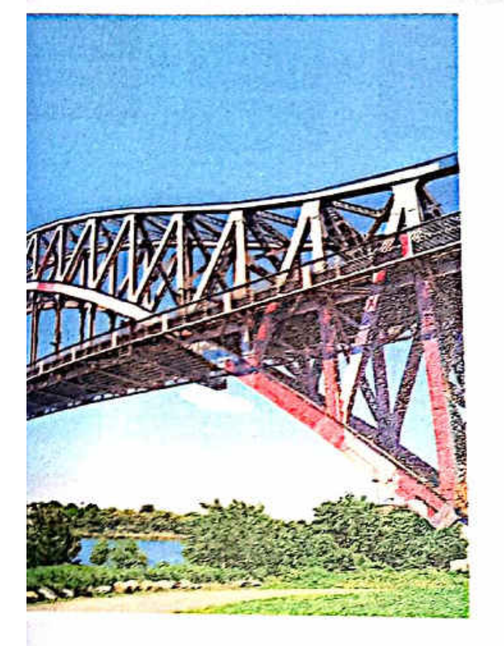


الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب

أولًا : الجبـر وحساب المثلثات

الوحدة 1 الجبـر والعلاقـات والـدوال

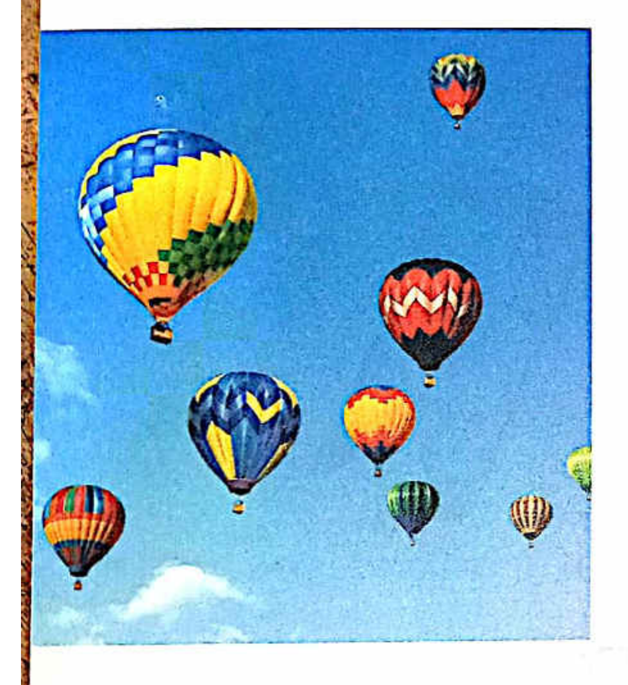


الوحدة 2 حسـاب المثـلـثات



ثانيًا : الهنـدسـة

الوحدة 3 التشــابه



الوحدة 4 نظريات التناسب فى المثلث



أولًا الجبر وحساب المثلثات

الوحدة 1 الجبر والعلاقات والدوال.

الوحدة 2 حساب المثلثات.



الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال



دروس الوحدة

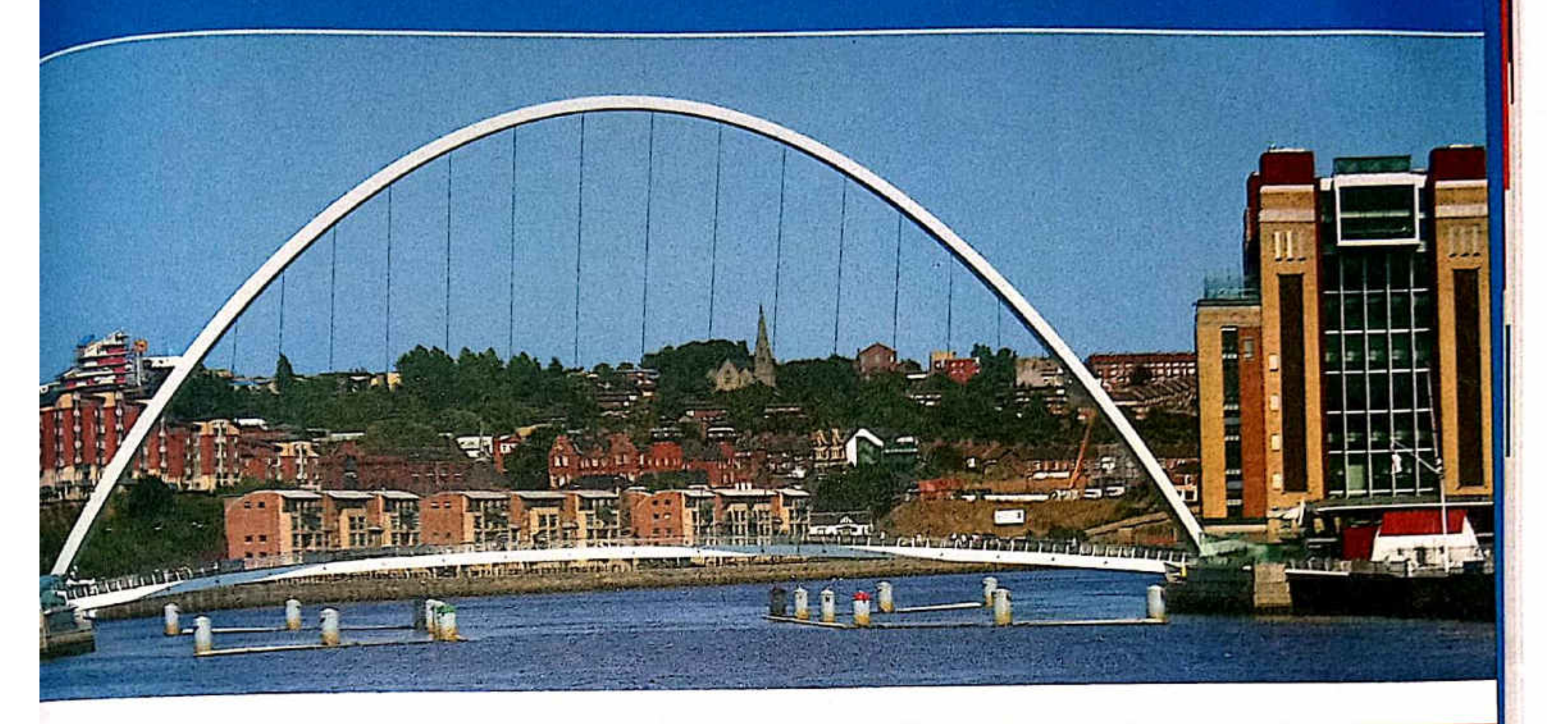
متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
- يستخدم معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى حل بعض التطبيقات الحياتية.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب ، قوى ت الصحيحة ، تساوى عددين مركبين).
- يُجرى العمليات على الأعداد المركبة.
- يتعرف العددين المترافقين فى الأعداد المركبة.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يكوّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد متى عُلم جذراها.
- يكوّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة (ثابتة ، خطية ، تربيعية).
- يحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى



أولًا حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا

١ باستخدام التحليل

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $س^2 - ٥ س - ٦ = ٠$ ٢ $٤ س^2 = ٢٥$

الحل

١ ∵ $س^2 - ٥ س - ٦ = ٠$ ∴ $(س - ٦) (س + ١) = ٠$ [تحليل المقدار الثلاثى]

∴ $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

أ، $س + ١ = ٠$ ومنها $س = -١$

∴ مجموعة الحل = $\{٦ ، -١\}$

تذكر أن

معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد لها حلان على الأكثر فى ح

٢ ∵ $٤ س^2 = ٢٥$ ∴ $٤ س^2 - ٢٥ = ٠$

∴ $(٢ س + ٥) (٢ س - ٥) = ٠$ [تحليل الفرق بين مربعين]

∴ $٢ س + ٥ = ٠$ ومنها $س = -\frac{٥}{٢}$

أ، $٢ س - ٥ = ٠$ ومنها $س = \frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\}$

حل آخر باستخدام الجذر التربيعى :

∵ $٤ س^2 = ٢٥$ ∴ $س^2 = \frac{٢٥}{٤}$

∴ $س = \pm\sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \pm\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\}$

٢ باستخدام القانون العام

لإيجاد جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س + حـ =$ صفر حيث $أ \neq$ صفر

نستخدم القانون : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

[١] $س^٢ - ٢ س - ٦ = ٠$

[٢] $س + \frac{٥}{س} = ٤$ حيث $س \neq$ صفر

الحل

[١] المقدار : $س^٢ - ٢ س - ٦$ يتعذر تحليله لذلك نلجأ إلى استخدام القانون العام.

$\because أ = ١ ، ب = -٢ ، حـ = -٦$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٧}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ + \sqrt{٧} ، ١ - \sqrt{٧}\}$

[٢] بضرب طرفى المعادلة فى س : $\therefore س^٢ + ٥ = ٤ س$

$\therefore س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ «لاحظ وضع المعادلة على الصورة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$»

$\therefore أ = ١ ، ب = -٤ ، حـ = ٥$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

، $\because \sqrt{-٤} \notin$ ح

$\therefore$ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

[٢] $٥ س^٢ + ٢ س = ٤$

[٣] $٣ س^٢ = ٢٧$

[٤] $س (س - ٤) = ٣$

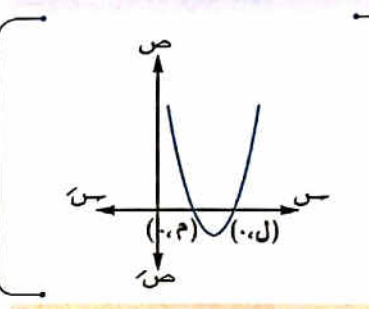
ثانيًا / حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بيانيًا

لحل المعادلة التربيعية فى متغير واحد بيانيا نتبع الخطوات الآتية :

1. نضع المعادلة على الصورة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠
2. نفرض أن : د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ
3. نرسم منحنى الدالة د
4. نعيِّن نقط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هذه هى حلول المعادلة : د (س) = ٠ أى أ س^٢ + ب س + حـ = ٠

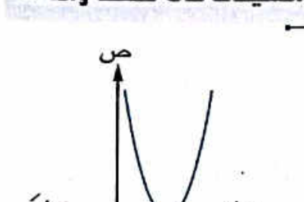
وعلى هذا فإنه توجد ثلاث حالات

١ المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين



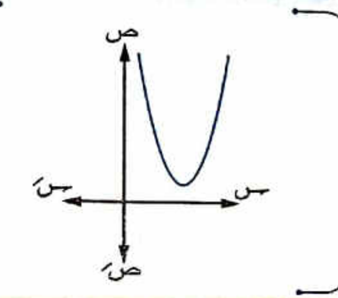
يوجد حلان للمعادلة فى ح ، م.ح = {ل ، م}

٢ المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة



يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح ، م.ح = {ل}

٣ المنحنى لا يقطع محور السينات



لا يوجد حل للمعادلة فى ح ، م.ح = ∅

مثال ٣

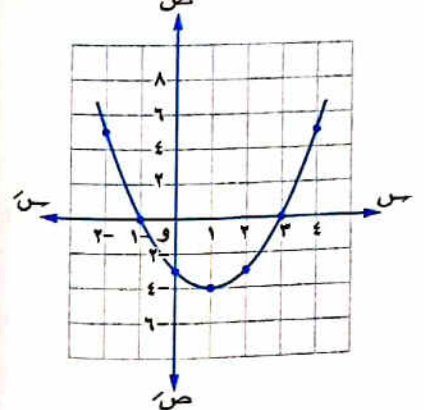
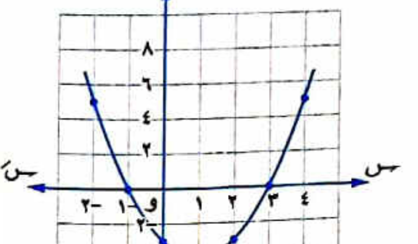
أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : س^٢ − ٢ س − ٣ = ٠ مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٤]

الحل

نفرض أن : د (س) = س^٢ − ٢ س − ٣

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، −١}

ملاحظة

فى حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل البيانى فإنه يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى $\left(-\frac{ب}{٢ أ} ، د\left(-\frac{ب}{٢ أ}\right)\right)$ ثم نوجد عدة نقاط أخرى على يمينها ومثلهم على يسارها.

مثال ٤

حل بيانيًا فى ح المعادلة : ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ثم حقق الناتج جبريًا [علمًا بأن $\sqrt{٦} \simeq ٢,٤$]

الحل

∵ ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ∴ ٤ $س^٢$ − ٤ س − ٥ = ٠

أولًا : الحل البيانى

نفرض أن : د (س) = ٤ $س^٢$ − ٤ س − ٥

- **نوجد نقطة رأس المنحنى :**

∵ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢ أ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ − ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ − ٥ = −٦

∴ نقطة رأس المنحنى هى $\left(\frac{١}{٢} ، -٦\right)$

- **نكوِّن الجدول :**

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	٣	−٥	−٦	−٥	٣

- **نلاحظ من الرسم أن :** جذرى المعادلة هما : −٠,٧ ، ١,٧ تقريبًا.

ثانيًا : الحل الجبرى

∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ حيث أ = ٤ ، ب = −٤ ، حـ = −٥

∴ س = $\frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ (٤) (-٥)}}{٢ \times ٤} = \frac{٤ \pm \sqrt{٩٦}}{٨}$

$= \frac{٤ \pm ٤ \sqrt{٦}}{٨} = \frac{١ \pm \sqrt{٦}}{٢} \simeq \frac{١ \pm ٢,٤}{٢}$

∴ جذرا المعادلة هما : ١,٧ ، −٠,٧ تقريبًا

حاول بنفسك

حل بيانيًا فى ح المعادلة : $س^٢$ − ٤ س + ٤ = ٠ متخذًا س ∋ [٠ ، ٤] ثم حقق الناتج جبريًا.

تمارين على متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ١ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) $\varnothing$ (ب) ١ (جـ) ± ١ (د) $\{١ ، -١\}$

(٢) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) $\{-٣\}$ (ب) $\{٣\}$ (جـ) $\varnothing$ (د) $\{٩\}$

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - س = ٠$ فى ح هى ....

(أ) $\{٠ ، -١\}$ (ب) $\{٠\}$ (جـ) $\{٠ ، ١\}$ (د) $\{١\}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٣ س = ٠$ فى $ح^*$ هى ....

(أ) $\{٠ ، -٣\}$ (ب) $\varnothing$ (جـ) $(٠ ، -٣)$ (د) $\{-٣\}$

(٥) عدد حلول المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ح هو ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) الشرط الذى يجعل المعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ تربيعية هو ....

(أ) $أ > ٠$ (ب) $أ < ٠$ (جـ) $أ \neq ٠$ (د) $أ \neq ٠ ، ب \neq ٠$

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ١٦ = ٠$ هو ٤ فإن الجذر الآخر هو ....

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) صفر

(٨) إذا كان : س = ٣ جذرًا للمعادلة : $س^٢ + م س = ٣$ فإن : م = ...

(أ) -١ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١

(٩) إذا كان : س = -١ أحد جذور المعادلة : $س^٢ + ك س - ٦ = ٢ ك + ٤$ فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) -٣ (جـ) ٧ (د) -٦

(١٠) إذا كان : س = ٤ أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + م س = ٤$ فإن : ....

(أ) م = -٣

(ب) م عدد زوجى.

(جـ) (١ - م) مربع كامل.

(د) (أ) ، (جـ) صحيحان.

(١١) الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين : $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ ، $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$

هو ....

(أ) س = ٢ (ب) س = ١ (جـ) س = -٢ (د) س = $\frac{١}{٢}$

(١٢) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ب س + حـ ، س = ٢ أحد جذرى المعادلة : د (س) = ٠

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) صفر

(١٣) إذا كان : $(ص - ٤)^٢ = ٣٦$ ، ص < ٠ فإن : ص + ٤ = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٢ ، ٠) ، (-٣ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٠} (ب) {-٣ ، ٠} (جـ) {-٣ ، ٢} (د) {(٢ ، -٣)}

(١٥) أى من العبارات التالية تكون صحيحة بالنسبة لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س (أ - س) ؟

① المنحنى يقطع محور السينات عند النقطتين (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠)

② رأس المنحنى هو $(\frac{أ}{٢} ، \frac{أ^٢}{٤})$

③ محور التماثل للمنحنى هو س = أ

(أ) ① ، ② فقط. (ب) ① ، ③ فقط. (جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

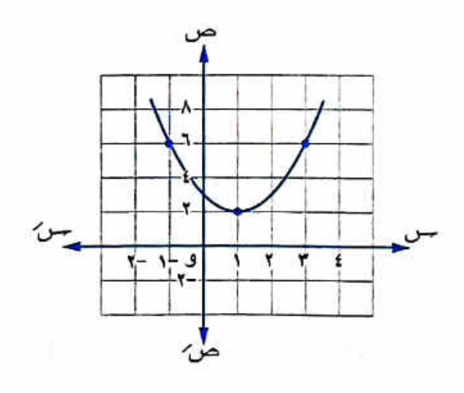
(١٦) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك

بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار فإن المقدار المضاف يساوى .... أمتار.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٧) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ فى ح هى ....



(أ) {٣ ، -١}

(ب) [٢ ، ٨]

(جـ) ∅

(د) {٠}

(١٨) فى الشكل المقابل :

م.ح المعادلة د (س) = ٠ فى ح

هى ....

(أ) {٠ ، −٤}　　(ب) {(−٢ ، ٠)}

(جـ) ∅　　(د) {−٢}

(١٩) فى الشكل المقابل :

م.ح المعادلة : د (س) = ٠ فى ح

هى ....

(أ) {−٣ ، ١}　　(ب) {−١ ، ٣}

(جـ) [−١ ، ٣]　　(د) [−٣ ، ١]

(٢٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فأى مما يأتى صحيح ؟

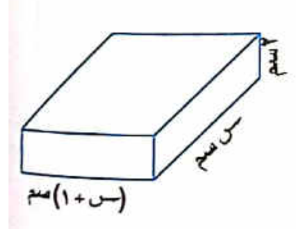
(أ) أ > ٠ ، حـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، حـ < ٠

(جـ) أ < ٠ ، حـ > ٠

(د) أ < ٠ ، حـ < ٠

(٢١) فى الشكل المقابل :



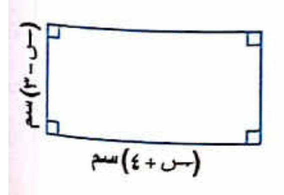
إذا كان حجم متوازى المستطيلات = ٤٠ سم^{٣}

فإن : س = ... سم

(أ) ٧　　(ب) ٦

(جـ) ٥　　(د) ٤

(٢٢) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المستطيل = ٧٨ سم^{٢}

فإن محيط المستطيل = ... سم

(أ) ٧٨　　(ب) ٥٨　　(جـ) ٣٨　　(د) ١٩

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ **أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد :**

(١) $س^{٢} - ٦ س + ١ = ٠$

(٢) $س^{٢} + ٣ س + ٥ = ٠$

(٣) 📖 $٢ س^{٢} + ٣ س - ٤ = ٠$

(٤) 📖 $٣ س^{٢} - ٦٥ = ٠$

(٥) $س - \frac{٥}{س} = ٣$

(٦) $\frac{٣}{س - ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = ٢$

٢ **أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبريًا وحقق الناتج بيانيًا :**

(١) $س^{٢} - ٢ س - ٤ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [−٢ ، ٤]

(٢) $٣ س - س^{٢} + ٢ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [−١ ، ٤]

(٣) $س^{٢} + ٣ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [−٣ ، ٣]

(٤) $-٢ س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

٣ 📖 إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة : $ح = \frac{ن}{٢} (١ + ن)$

فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا :

(١) ٧٨ (٢) ١٧١ (٣) ٢٥٣ (٤) ٤٦٥

٤ **أوجد قيمة أ التى تجعل س = ٢ أحد جذرى المعادلة :**

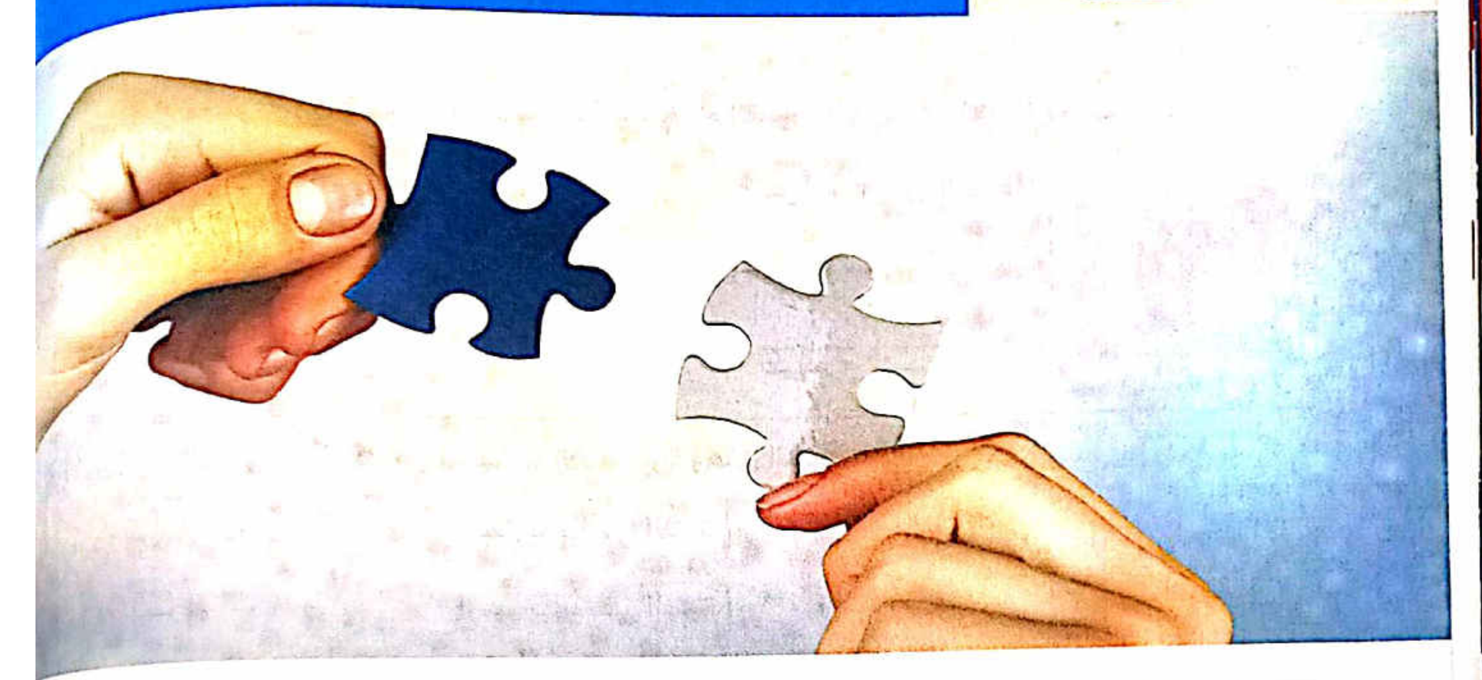
$س^{٢} - ٢ أ س + ٢ (أ^{٢} - ٦) = ٠$ «١ + $\sqrt{٥}$ ، ١ − $\sqrt{٥}$»

٥ إذا كانت $د (س) = أ س^{٢} + ب س + ح$ ، $د (٠) = -٣$

أوجد قيم : أ ، ب ، ح إذا علم أن جذرى المعادلة : د (س) = ٠ هما ٣ ، $\frac{-١}{٢}$ «٢ ، −٥ ، −٣»

الدرس 1

مقدمة عن الأعداد المركبة



الحاجة إلى مزيد من الأعداد

نعلم أن هناك معادلات ليس لها حل فى ح مثل المعادلة $س^٢ = -١$ إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى سالب واحد ، لذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلًا لمثل هذه المعادلات ، هذه المجموعة الجديدة من الأعداد تسمى (مجموعة الأعداد المركبة) ، وقبل دراسة مجموعة الأعداد المركبة بشىء من التفصيل سنتعرف أولًا على العدد التخيلى «ت».

العدد التخيلى ت

يُعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى -١

أى أن $ت^٢ = -١$

وعلى هذا فإنه يمكننا حل المعادلة : $س^٢ = -١$ كالتالى :

∵ $س^٢ = -١$ ∴ $س^٢ = ت^٢$

∴ $س = \pm\sqrt{ت^٢}$ ∴ $س = \pm ت$ ∴ مجموعة الحل = $\{ت ، -ت\}$

لاحظ أن

- $ت \times ت = ت^٢ = -١$
- $-ت \times -ت = ت^٢ = -١$

ملاحظات

- العدد ت ليس عددًا حقيقيًا (لا ينتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية) **أى أن** $ت \notin ح$

وعلى ذلك يستحيل تمثيله على خط الأعداد الحقيقية.

- الأعداد : ٣ ت ، -٢ ت ، $\sqrt{٥}$ ت ، ... أعداد تخيلية.

- إذا كان أ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن : $\sqrt{-أ} = \sqrt{-1} = \sqrt{أ}$ ت

فمثلاً $\sqrt{-2} = \sqrt{2 ت^2} = \sqrt{2}$ ت ، $\sqrt{-3} = \sqrt{3 ت^2} = \sqrt{3}$ ت ، $\sqrt{-25} = \sqrt{25 ت^2} = 5$ ت ، ... وهكذا

- العمليات على الجذور التربيعية لا يمكن تعميمها على الأعداد التخيلية فإذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين سالبين

فإن : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أ ب}$

فمثلاً $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \neq \sqrt{-1 \times -1}$

لأن $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{ت^2} \times \sqrt{ت^2} = ت \times ت = ت^2 = -1$

بينما $\sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

قوى ت الصحيحة

العدد ت يحقق قوانين الأسس الصحيحة التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية

وحيث إن $ت^2 = -1$ فبناءً على ذلك يكون :

- $ت^3 = ت^2 \times ت = -1 \times ت = -ت$
- $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = -1 \times -1 = 1$
- $ت^5 = ت^4 \times ت = 1 \times ت = ت$
- $ت^6 = ت^4 \times ت^2 = 1 \times -1 = -1$ ... وهكذا

مما سبق نجد أن

- القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم الآتية : ت أ، -1 أ، -ت أ، 1
- هذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار 4 وبصفة عامة فإنه لكل $ن \in ص$ فإن :
  - $ت^{4ن} = (ت^4)^ن = 1^ن = 1$
  - $ت^{4ن+1} = ت^{4ن} \times ت = 1 \times ت = ت$
  - $ت^{4ن+2} = ت^{4ن} \times ت^2 = 1 \times -1 = -1$
  - $ت^{4ن+3} = ت^{4ن} \times ت^3 = 1 \times -ت = -ت$
  - $ت^{4ن+4} = ت^{4ن} \times ت^4 = 1 \times 1 = 1$ ... وهكذا

وبطريقة أخرى :

لإيجاد $ت^م$ حيث م عدد صحيح ← نوجد باقى قسمة م ÷ 4 فإذا كان :

- الباقى = صفر فإن $ت^م = 1$
- الباقى = 1 فإن $ت^م = ت$
- الباقى = 2 فإن $ت^م = ت^2 = -1$
- الباقى = 3 فإن $ت^م = ت^3 = -ت$

فمثلًا :

- $ت^{١٦} = ١$ ، لأن ١٦ ÷ ٤ = ٤ والباقى صفر"
- $ت^{٦٣} = -ت$ ، لأن ٦٣ ÷ ٤ = ١٥ والباقى ٣"
- $ت^{٤٢} = -١$ ، لأن ٤٢ ÷ ٤ = ١٠ والباقى ٢"
- $ت^{١٠١} = ت$ ، لأن ١٠١ ÷ ٤ = ٢٥ والباقى ١"
- $ت^{٤ن + ٢٣}$ حيث ن ∈ ص $= -ت$ ، لأن (٤ن + ٢٣) ÷ ٤ = ن + ٥ والباقى ٣"

ملاحظة

يمكن التعبير عن الواحد الصحيح باستخدام العدد التخيلى ت مرفوعًا لقوى صحيحة من مضاعفات العدد ٤ ويساعد ذلك فى تبسيط بعض الأعداد التخيلية.

فمثلًا $ت^{-١٩} = \frac{١}{ت^{١٩}} = \frac{ت^{٢٠}}{ت^{١٩}} = ت$

العدد المركب

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة : أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، $ت^{٢} = -١$

- يُسمى أ بالجزء الحقيقى.
- يُسمى ب بالجزء التخيلى.

ومن أمثلة الأعداد المركبة : ٢ - ت ، ٧ + ١٣ ت ، ٥ ت - ٤ ، $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$ ت

ملاحظات

لأى عدد مركب : ع = أ + ب ت فإن :

1. إذا كان ب = ٠ فإن ع = أ ويكون ع عددًا حقيقيًا.
   فمثلًا ع = ٥ عدد حقيقى وهو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر.
2. إذا كان أ = ٠ فإن ع = ب ت ويكون ع عددًا تخيليًا. (حيث ب ≠ ٠)
   فمثلًا ع = ٢ ت عدد تخيلى وهو عدد مركب.

ومما سبق فإن كل عدد حقيقى هو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر لذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية جزئية من مجموعة الأعداد المركبة التى يمكن تعريفها كالتالى :

مجموعة الأعداد المركبة

مجموعة الأعداد المركبة والتى سنرمز لها بالرمز ك هى :

ك = {أ + ب ت : أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، $ت^{٢} = -١$}

مثال ١

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين فى مجموعة الأعداد المركبة :

[١] $٢ س^٢ + ١٨ = ٠$ [٢] $س^٢ + س + ١ = ٠$

الحل

[١] ∵ $٢ س^٢ + ١٨ = ٠$ ∴ $٢ س^٢ = -١٨$

∴ $س^٢ = -٩$ ∴ $س = \pm \sqrt{-٩}$

∴ $س = \pm \sqrt{٩ ت^٢}$ ∴ $س = \pm ٣ ت$ ∴ مجموعة الحل = $\{٣ ت ، -٣ ت\}$

[٢] ∵ أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-١ \pm \sqrt{١^٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣} ت}{٢} = \frac{-١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\}$

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى فى مجموعة الأعداد المركبة :

[١] $٥ س^٢ + ١٨٠ = ٠$ [٢] $س^٢ - ٢ س + ٥ = ٠$

تساوى عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

أى أنه إذا كان : (أ + ب ت) ، (جـ + ء ت) عددين مركبين وكان : أ = جـ ، ب = ء

فإن : أ + ب ت = جـ + ء ت

والعكس صحيح أى أنه إذا كان : أ + ب ت = جـ + ء ت فإن : أ = جـ ، ب = ء

لاحظ أنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة التى جزؤها التخيلى لا يساوى الصفر فلا نعلم مثلًا أى العددين أكبر (٥ + ٣ ت) أم (-٤ + ٧ ت) ؟

مثال ٢

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلاً مما يأتى حيث س ∈ ح ، ص ∈ ح ، $ت^٢ = -١$:

[١] $(٢ س - ٣) + ٥ ت = ٧ + (٣ - ٢ ص) ت$ [٢] $س + ت ص = \sqrt{-٤} + ت^{٢٢}$

[٣] $س - ٣ ص + (٢ س + ص) ت = ٦ + ٥ ت$

الحـل

1) ∵ ٢ س $- ٣ = ٧$ ∴ ٢ س $= ١٠$ ∴ س $= ٥$

، ∵ $٣ - ٢$ ص $= ٥$ ∴ -٢ ص $= ٢$ ∴ ص $= -١$

2) ∵ س + ت ص $= ٢$ ت + ت$^{٤(٥)+٢}$ ∴ س + ت ص $= ٢$ ت + ت$^{٢} = ٢$ ت + (-١)

∴ س + ت ص $= -١ + ٢$ ت ∴ س $= -١$ ، ص $= ٢$

3) ∵ س $- ٣$ ص $= ٦$ (١)

، ٢ س + ص $= ٥$ (٢)

بضرب المعادلة (٢) فى ٣ : ∴ ٦ س $+ ٣$ ص $= ١٥$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٧ س $= ٢١$ ∴ س $= ٣$

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص $= -١$

حاول بنفسك

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلًّا مما يأتى :

1) س + ت ص $= ٣$ ت$^{-١}$ $+ ٤$

2) ٤ س $-$ ص $+ (٢$ س $+$ ص$)$ ت $= ٥ + ٧$ ت

جمع وطرح الأعداد المركبة

- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معًا والجزأين التخيليين معًا .

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

1) $(٣ + ٧$ ت$^{١٣}) + (٥ - ٩$ ت$)$

2) $(٢ - \sqrt{-١٦}) - (٥ -$ ت$)$

الحـل

1) ∵ ت^{١٣} = ت ∴ المقدار $= (٣ + ٧$ ت$) + (٥ - ٩$ ت$) = (٣ + ٥) + (٧$ ت $- ٩$ ت$)$

$= ٨ - ٢$ ت

2) ∵ $\sqrt{-١٦} = ٤$ ت ∴ المقدار $= (٢ - ٤$ ت$) - (٥ -$ ت$) = (٢ - ٤$ ت$) + (-٥ +$ ت$)$

$= (٢ - ٥) + (-٤$ ت + ت$) = -٣ - ٣$ ت

ضرب الأعداد المركبة

- عند ضرب عددين مركبين نتبع نفس الطرق المستخدمة فى ضرب المقادير الجبرية مع الأخذ فى الاعتبار أن $ت^2 = -1$

مثال ٤

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت)

[٢] (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت)

[٣] $(٣ + ٢ ت)^2$

[٤] $(١ − ت)^4$

الحل

[١] (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٤ (٢ − ٥ ت) + ٣ ت (٢ − ٥ ت)

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت − ١٥ $ت^2$

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت + ١٥ (حيث $ت^2 = -١$)

= (٨ + ١٥) + (−٢٠ ت + ٦ ت) = ٢٣ − ١٤ ت

لاحظ أنه يمكن الحل مباشرة باستخدام الضرب بمجرد النظر الذى سبق دراسته فى المرحلة الإعدادية كالتالى :

(٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٨ − ١٤ ت − ١٥ $ت^2$ (حيث $ت^2 = -١$)

(− ٢٠ ت ، + ٦ ت)

= ٨ − ١٤ ت + ١٥ = ٢٣ − ١٤ ت

[٢] (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت) = ٢٥ − ٤ $ت^2$

= ٢٥ + ٤ (حيث $ت^2 = -١$) = ٢٩

تذكر أن: $(أ + ب)(أ − ب) = أ^2 − ب^2$

[٣] $(٣ + ٢ ت)^2 = ٩ + ١٢ ت + ٤ ت^2$

= ٩ + ١٢ ت − ٤ (حيث $ت^2 = -١$) = ٥ + ١٢ ت

تذكر أن: $(أ ± ب)^2 = أ^2 ± ٢ أ ب + ب^2$

[٤] $(١ − ت)^4 = ((١ − ت)^2)^2 = (١ − ٢ ت + ت^2)^2 = (١ − ٢ ت − ١)^2 = (−٢ ت)^2 = ٤ ت^2 = −٤$

ملاحظة

$(١ ± ت)^{٢ن} = (± ٢ ت)^ن$ حيث $ن \in ص$

- الإثبات : $(١ ± ت)^{٢ن} = [(١ ± ت)^2]^ن = [١ ± ٢ ت − ١]^ن = (± ٢ ت)^ن$
- وتستخدم هذه الملاحظة لتبسيط بعض الأعداد المركبة كالتالى :

[١] $(١ + ت)^{٢٠٠} = (٢ ت)^{١٠٠} = ٢^{١٠٠} ت^{١٠٠} = ٢^{١٠٠}$

[٢] $(٣ − ٣ ت)^4 = ٣^4 × (١ − ت)^4 = ٣^4 × (−٢ ت)^2 = ٣^4 × ٢^2 ت^2 = −٣٢٤$

حاول بنفسك

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] $(\sqrt{٤} + \sqrt{-٢٥}) + (−٣ − ٤ ت)$

[٢] $(٢ − ت) (٢ + \sqrt{-١})$

[٣] $(٢ + ٣ ت^{٢١}) (٥ + ت^{٣١})$

[٤] ت (٥ − ٣ ت)

[٥] $(١ − ت)^{٣٢}$

العددان المترافقان

العددان : أ + ب ت ، أ − ب ت يُسميان بالعددين المترافقين ولاحظ أنهما لا يختلفان إلا فى إشارة الجزء التخيلى منهما.

فمثلًا العددان ٣ + ٤ ت ، ٣ − ٤ ت عددان مترافقان.

ملاحظات

- مرافق العدد ٢ ت − ٥ هو العدد −٢ ت − ٥ وليس ٢ ت + ٥
- مرافق العدد ٢ ت هو −٢ ت
- مرافق العدد ٣ هو ٣
- مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى ، وحاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى

فمثلًا العدد المركب ٣ + ٤ ت مرافقه هو ٣ − ٤ ت ويكون :

* مجموعهما = (٣ + ٤ ت) + (٣ − ٤ ت) = (٣ + ٣) + (٤ ت − ٤ ت) = ٦ ∈ ح

* حاصل ضربهما = (٣ + ٤ ت) (٣ − ٤ ت) = ٩ − ١٦ ت^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ ∈ ح

حاول بنفسك

اكتب مرافق العدد ٥ − ٤ ت ثم أوجد :

[١] مجموع العدد ومرافقه. [٢] حاصل ضرب العدد ومرافقه.

مثال ٥

اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\frac{٤ - ٣ ت}{ت}$ [٢] $\frac{١٠}{٣ + ت}$ [٣] $\frac{٣ + ٢ ت}{٢ - ٥ ت}$ [٤] $\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ ت)}$

الحل

لاحظ أنه لاختصار الكسر الذى مقامه عدد مركب نضرب حدى الكسر فى مرافق المقام.

[١] $\frac{٤ - ٣ ت}{ت} \times \frac{-ت}{-ت} = \frac{-٤ ت + ٣ ت^{٢}}{-ت^{٢}} = \frac{-٤ ت - ٣}{-(-١)} = -٣ - ٤ ت$

[٢] $\frac{١٠}{٣ + ت} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{(٣ + ت)(٣ - ت)} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{٩ - ت^{٢}} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{٩ + ١} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{١٠} = ٣ - ت$

٣ $\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} = \frac{(٣ + ٢ت)(٢ + ٥ت)}{(٢ - ٥ت)(٢ + ٥ت)} = \frac{٦ + ١٥ت + ٤ت + ١٠ت^{٢}}{٤ - ٢٥ت^{٢}}$

$= \frac{٦ + ١٩ت - ١٠}{٤ + ٢٥} = \frac{-٤ + ١٩ت}{٢٩} = \frac{-٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩}ت$

٤ $\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ت)} = \frac{٢ - ٢ت + ت - ت^{٢}}{٣ - ٢ت + ٣ت - ٢ت^{٢}} = \frac{٢ - ت + ١}{٣ + ت + ٢} = \frac{٣ - ت}{٥ + ت}$

، $\frac{٣ - ت}{٥ + ت} = \frac{(٣ - ت)(٥ - ت)}{(٥ + ت)(٥ - ت)} = \frac{١٥ - ٨ت - ١}{٢٥ - ت^{٢}} = \frac{١٤ - ٨ت}{٢٦} = \frac{٢(٧ - ٤ت)}{٢٦} = \frac{٧}{١٣} - \frac{٤}{١٣}ت$

حاول بنفسك

اختصر إلى أبسط صورة :

١ $\frac{٢ + ت}{٣ - ٤ت}$ **٢** $\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)}$

مثال ٦

إذا كان : $س = \frac{٧ - ت}{٢ - ت}$ ، $ص = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان **ثم أثبت أن :** $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

الحل

$\because س = \frac{٧ - ت}{٢ - ت} = \frac{(٧ - ت)(٢ + ت)}{(٢ - ت)(٢ + ت)} = \frac{١٤ + ٧ت - ٢ت - ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}} = \frac{١٤ + ٥ت + ١}{٤ + ١} = \frac{١٥ + ٥ت}{٥} = ٣ + ت$

، $ص = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{(١٣ - ت)(٤ - ت)}{(٤ + ت)(٤ - ت)} = \frac{٥٢ - ١٣ت - ٤ت + ت^{٢}}{١٦ - ت^{٢}} = \frac{٥٢ - ١٧ت - ١}{١٦ + ١} = \frac{٥١ - ١٧ت}{١٧} = ٣ - ت$

$\therefore$ س ، ص مترافقان (لاحظ اختلاف إشارتى الجزأين التخيليين فى س ، ص)

، $س^{٢} = (٣ + ت)^{٢} = ٩ + ٦ت + ت^{٢} = ٨ + ٦ت$ ، $ص^{٢} = (٣ - ت)^{٢} = ٩ - ٦ت + ت^{٢} = ٨ - ٦ت$

$\therefore س^{٢} + ص^{٢} = (٨ + ٦ت) + (٨ - ٦ت) = (٨ + ٨) + (٦ت - ٦ت) = ١٦$

حاول بنفسك

أثبت أن العددين أ ، ب مترافقان إذا كان : $أ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، $ب = \frac{٢ - ت}{٣ - ت}$

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي ● تذكر ● فهم ● تطبيق ∴ مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أي مما يأتي يكون عددًا تخيليًا ؟

(أ) π (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $\sqrt{-5}$ (د) ت^{2}

(٢) 📖 ت^{24} = ...

(أ) -1 (ب) ت^{9} (جـ) $-$ ت (د) 1

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلي ت^{45} هي ....

(أ) ت (ب) -1 (جـ) $-$ ت (د) 1

(٤) ت$^{-300}$ = ...

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) $-$ ت (د) ت

(٥) أبسط صورة للمقدار : ت$^{-45}$ = ...

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) ت (د) $-$ ت

(٦) $\frac{1}{ت^{199}}$ = ...

(أ) 1 (ب) $-$ ت (جـ) ت (د) -1

(٧) ت^{26} + ت^{28} = ...

(أ) ت^{45} (ب) $-$ ت (جـ) صفر (د) 2

(٨) $\frac{1}{ت^{15}}$ + ت^{21} = ...

(أ) صفر (ب) 2 ت (جـ) -2 ت (د) $-$ ت

(٩) 5 ت^{7} + 4 ت$^{-1}$ = ...

(أ) 9 ت (ب) -9 ت (جـ) ت (د) $-$ ت

(١٠) 1 + ت + ت^{2} + ت^{3} + ت^{4} = ...

(أ) 4 ت + 1 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 5

(١١) إذا كان : ن $\in$ ص فإن : ت$^{8ن-2}$ = ...

(أ) ت (ب) $-$ ت (جـ) -1 (د) 1

(١٢) إذا كان : ن ∈ ص فإن : $ت^{-٨ن}$ = ...

(أ) $\frac{١}{ت}$ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ت

(١٣) إذا كان : ن ∈ ص فإن : $ت^{٤ن+٤٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) − ت (د) ت

(١٤) المعكوس الجمعى للعدد المركب (٤ − ٧ ت) هو ....

(أ) ٤ + ٧ ت (ب) −٤ + ٧ ت (جـ) −٤ − ٧ ت (د) ٤ − ٧ ت

(١٥) مرافق العدد (٣ ت − ٤) هو ....

(أ) ٣ ت + ٤ (ب) −٣ ت − ٤ (جـ) −٣ ت + ٤ (د) ٣ ت − ٤

(١٦) مرافق العدد (ت − $ت^{٢}$) هو ....

(أ) ١ − ت (ب) ١ + ت (جـ) − ت − ١ (د) ت − ١

(١٧) مرافق العدد (−٨) هو ....

(أ) ٨ ت (ب) −٨ ت (جـ) −٨ (د) ٨

(١٨) مرافق العدد $(٢ + ت)^{٢}$ هو ....

(أ) ٢ + ت (ب) $(٢ + ت)^{-١}$ (جـ) ٣ + ٤ ت (د) ٣ − ٤ ت

(١٩) $\sqrt{-١٦}$ = ...

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) ٢ ت (د) ٤ ت

(٢٠) $\sqrt{٢} \times \sqrt{-٨}$ = ...

(أ) ت (ب) −٢ ت (جـ) ٤ ت (د) −٤ ت

(٢١) $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$ = ...

(أ) $٦\sqrt{٦}$ ت (ب) $٦\sqrt{٦}$ (جـ) $-٦\sqrt{٦}$ (د) $-٦\sqrt{٦}$ ت

(٢٢) (−٤ ت) (−٦ ت) = ...

(أ) −١٠ ت (ب) ٢٤ ت (جـ) −٢٤ ت (د) −٢٤

(٢٣) ٣ ت (−٢ ت) = ...

(أ) ٦ ت (ب) ٦ (جـ) −٦ (د) −٦ ت

(٢٤) $(-٢ ت)^{٣} (-٣ ت)^{٢}$ = ...

(أ) −٧٢ ت (ب) ٧٢ ت (جـ) ٧٢ (د) −٧٢

(٢٥) (٣ + ٢ ت) + (٢ − ٥ ت) = ...

(أ) ٥ + ٢ ت (ب) ٥ − ٣ ت (جـ) ٣ − ٥ ت (د) ٥ + ٣ ت

(٢٦) إذا كان : (٣ + ٥ ت) − (٤ − ٣ ت) = س + ت ص فإن : س + ص = ...

(أ) ٩ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٧) (١٢ − ٥ ت^{١٧}) − (٧ − $\sqrt{-٨١}$) = ...

(أ) ٥ − ٤ ت (ب) −٥ + ٤ ت (جـ) ٥ + ٤ ت (د) −٥ − ٤ ت

(٢٨) ٣ − (١ − ٢ ت) × (٤ − ٥ ت) − (١ − ٣ ت) = ...

(أ) ٤ ت (ب) −٥ ت (جـ) ٧ ت (د) ٤

(٢٩) (٤ − ٣ ت)(٤ + ٣ ت) = ...

(أ) ٢٥ ت (ب) ١٤ (جـ) ١٤ ت (د) ٢٥

(٣٠) إذا كان : (١ + ت^٢)(١ − ت^٣) = س + ت ص فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٣١) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : س + ت ص = ت^{١٢} + ٣ $\sqrt{-٤}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٣ + ٢ ت (د) ٥ ت

(٣٢) إذا كان : س + ص ت = (٣ + ٢ ت) + (٢ − ت) فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (١ ، ٥) (ب) (−٥ ، ١) (جـ) (١ ، −٥) (د) (٥ ، ١)

(٣٣) إذا كان : س + ص ت = (٢ − ٣ ت)^٢ فإن : س + ص = ...

(أ) −٥ − ١٢ ت (ب) −١٧ (جـ) ١٧ (د) ٦٠

(٣٤) إذا كان : س + ص ت = $\frac{١}{ت}$ حيث س ، ص ∈ ح فإن : س + ص = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٣٥) إذا كان : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت فإن : أ + ب = ...

(أ) −٩ (ب) ١٢ (جـ) −٦ (د) ٦

(٣٦) إذا كان : ٢ س − ٢ ص ت = (٥ − ٢ ت)^٢ فإن : ص − س = ...

(أ) ١٢ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٢١ − ٢٠ ت

(٣٧) مجموعة حل المعادلة : س^٢ + ٤ = ٠ في الأعداد المركبة هي ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٢ ت ، −٢ ت}

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : ٩ س^٢ + ٤ = ٠ في مجموعة الأعداد المركبة هي ....

(أ) {$\frac{-٢}{٣}$} (ب) {$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$} (جـ) {$\frac{٢}{٣}$} (د) {$\frac{-٢}{٣}$ ت ، $\frac{٢}{٣}$ ت}

(٣٩) إذا كان : س − ٢ ت = ٣ + ص ت فإن مرافق العدد س + ص ت هو ....

(أ) ٣ − ٢ ت (ب) ٣ + ٢ ت (جـ) −٣ − ٢ ت (د) −٣ + ٢ ت

(٤٠) إذا كان : $س^{٢}$ − ٢ س + ٢ = ٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ ± ٢ ت (ب) ٢ ± ت (جـ) ١ ± ت (د) ١ ± ٢ ت

(٤١) المعكوس الضربى للعدد $\frac{١}{٢ ت + ١}$ هو ....

(أ) ٢ ت − ١ (ب) −٢ ت + ١ (جـ) ٢ ت + ١ (د) −٢ ت − ١

(٤٢) إذا كان : $ع_{١}$ هو مرافق $ع_{٢}$ فإن : $ع_{١}$ $ع_{٢}$ + ($ع_{١}$ + $ع_{٢}$) = ...

(أ) عدد حقيقى. (ب) عدد تخيلى.

(جـ) عدد مركب غير حقيقى. (د) غير محدد.

(٤٣) كل ما يلى أعدادًا تخيليه ما عدا ....

(أ) $\sqrt{-١٨}$ (ب) $ت^{١٩}$ (جـ) $(٢ + ٢ ت)^{٤}$ (د) $(١ + ت)^{٦}$

(٤٤) كل الأعداد الآتية غير حقيقية ما عدا ....

(أ) $(١ + ت)^{٤}$ (ب) $\sqrt{-٨}$ (جـ) $ت^{٣}$ (د) $\sqrt{-\pi^{٢}}$

(٤٥) ٣ + ٣ ت + ٣ $ت^{٢}$ + ٣ $ت^{٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ١٢ ت

(٤٦) ٣ × ٣ ت × ٣ $ت^{٢}$ × ٣ $ت^{٣}$ = ...

(أ) ٨١ (ب) −٨١ (جـ) ٨١ ت (د) −٨١ ت

(٤٧) $\sqrt{-٩} \times \sqrt{\frac{-١}{٩}}$ = ...

(أ) ت (ب) − ت (جـ) −١ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) (٢ + $\sqrt{-٩}$) (٣ − ٤ ت)

(٢) $(٢ − ٥ ت)^{٢}$

(٣) $(٣ − ٢ ت)^{٢}$ + (٣ + ٢ ت)

(٤) $(١ + ت)^{٤}$

(٥) $(١ + \sqrt{-١})^{٤} − (١ − \sqrt{-١})^{٤}$

(٦) $(١ − ت)^{١٠}$

(٧) (١ + ٢ $ت^{٢}$) (٢ + ٣ $ت^{٥}$ + ٤ $ت^{٦}$)

٢ ضع كلًا مما يأتى على صورة أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان :

(١) $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت}$

(٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

(٣) $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$

(٤) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$

(٥) $\frac{(٣ + ٢ت)(٢ - ت)}{٣ + ت}$

(٦) $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ت}$

(٧) $\frac{١}{(١ + ٢ت)^{٢}}$

(٨) $\frac{١ + ت + ٢ت^{٢} + ٢ت^{٣}}{١ - ٥ت + ٣ت^{٢} - ٣ت^{٣}}$

(٩) $\frac{٢\sqrt{٣} + \sqrt{-٨}}{\sqrt{٣} - \sqrt{-١٨}}$

٣ حل كلًا من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة :

(١) $٣س^{٢} + ١٢ = ٠$

(٢) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

(٣) $س^{٢} - ٤س + ٥ = ٠$

(٤) $٢س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠$

٤ أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلًا من المعادلات الآتية :

(١) $(٢س - ٣) + (٣ص + ١)ت = ٧ + ١٠ت$

(٢) $(٢س - ص) + (س - ٢ص)ت = ٥ + ت$

(٣) $٣س + س ت - ٢ص + ص ت = ٥$

(٤) $س^{٢} - ص^{٢} + (س + ص)ت = ٤ت$

(٥) $\frac{١٠}{٢ + ت} = س + ص ت$

(٦) $\frac{٦ - ٤ت}{١ - ت} = س + ت ص$

(٧) $\frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ت} = س + ت ص$

٥ إذا كان : $س = \frac{١٣}{٥ - ت}$ ، $ص = \frac{٣ + ٢ت}{١ + ت}$ **فأثبت أن :** س ، ص مترافقان.

٦ إذا كان : $أ + ب ت = \frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ **فأثبت أن :** $أ^{٢} + ب^{٢} = ١$

اكتشف الخطأ

٧ أوجد فى أبسط صورة المقدار : $(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ - ٣ت)$

إجابة أحمد

$(٢ + ٣ت)(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت)$

$= (٢ + ٣ت)(٤ - ٩ت^{٢})$

$= (٢ + ٣ت)(٤ + ٩) = ١٣(٢ + ٣ت)$

$= ٢٦ + ٣٩ت$

إجابة كريم

$(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ - ٣ت)$

$= (٤ + ٩ت^{٢})(٢ - ٣ت)$

$= (٤ - ٩)(٢ - ٣ت)$

$= -٥(٢ - ٣ت) = -١٠ + ١٥ت$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ + ١ = ٠$ فإن : $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} =$ ....

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨

(٢) $(١ + ت)^{٢٠٢٠} =$ ....

(أ) $(١ - ت)^{٢٠٢٠}$ (ب) $٢^{١٠١٠}$ (جـ) $٢^{١٠١٠}$ ت (د) $ت^{٢٠٢٠}$

(٣) إذا كان : $\left(\frac{١ - ت}{١ + ت}\right)^{١٠٠} = س + ص ت$ فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٠ ، ١) (ب) (−١ ، ٠) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ٠)

(٤) مرافق العدد $(٢ + ت)^{-١}$ هو ....

(أ) ٢ + ت (ب) ٢ − ت (جـ) $\frac{٢ - ت}{٥}$ (د) $\frac{٢ + ت}{٥}$

(٥) أي مما يأتي يعتبر تحليلًا للمقدار : $س^٢ + ٤$ ؟

(أ) (س − ٢) (س + ٢) (ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $(س - ٢ ت)^٢$ (د) (س − ٢ ت) (س + ٢ ت)

(٦) لإيجاد قيمة كل من س ، ص الحقيقية يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) (س + ٢) + ٤ ص ت = ٣ − ٤ ت فقط. (ب) (٢ س + ص) + ٥ ت = ٧ + ٥ ت فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٧) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{ن} = ١$ هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٨) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : $ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{د} =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ت

(٩) $ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ... + ت^{١٠٠} =$ ....

(أ) ت (ب) −١ (جـ) صفر (د) $ت^{١ + ٢ + ٣ + ...}$

(١٠) $(١ + ت) (١ + ت^٢) (١ + ت^٣) (١ + ت^٤) ... (١ + ت^{١٠٠}) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) لا شيء مما سبق.

(١١) إذا كان : $ت^{م} = ت^{ن}$ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

① م = ن ② (م + ن) عدد زوجي. ③ (ن − م) مضاعف للعدد ٤

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ③ فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(١٢) إذا كان : أ < ب < ٠ < حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان : $\sqrt{ب\ (حـ - أ)} + \sqrt{أ\ ب} = ٢ + ٣\ ت$ فإن : ب حـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(١٣) أى من الآتى صحيح ؟

(أ) ٢ + ٣ ت > ٣ + ٤ ت (ب) ٣ − ٤ ت < ٢ − ٣ ت

(جـ) ١ + ت > −١ − ت (د) لا شيء مما سبق.

---

٢ إذا كانت : ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

فأوجد قيم : س ، ص الحقيقية التى تحقق المعادلة السابقة.

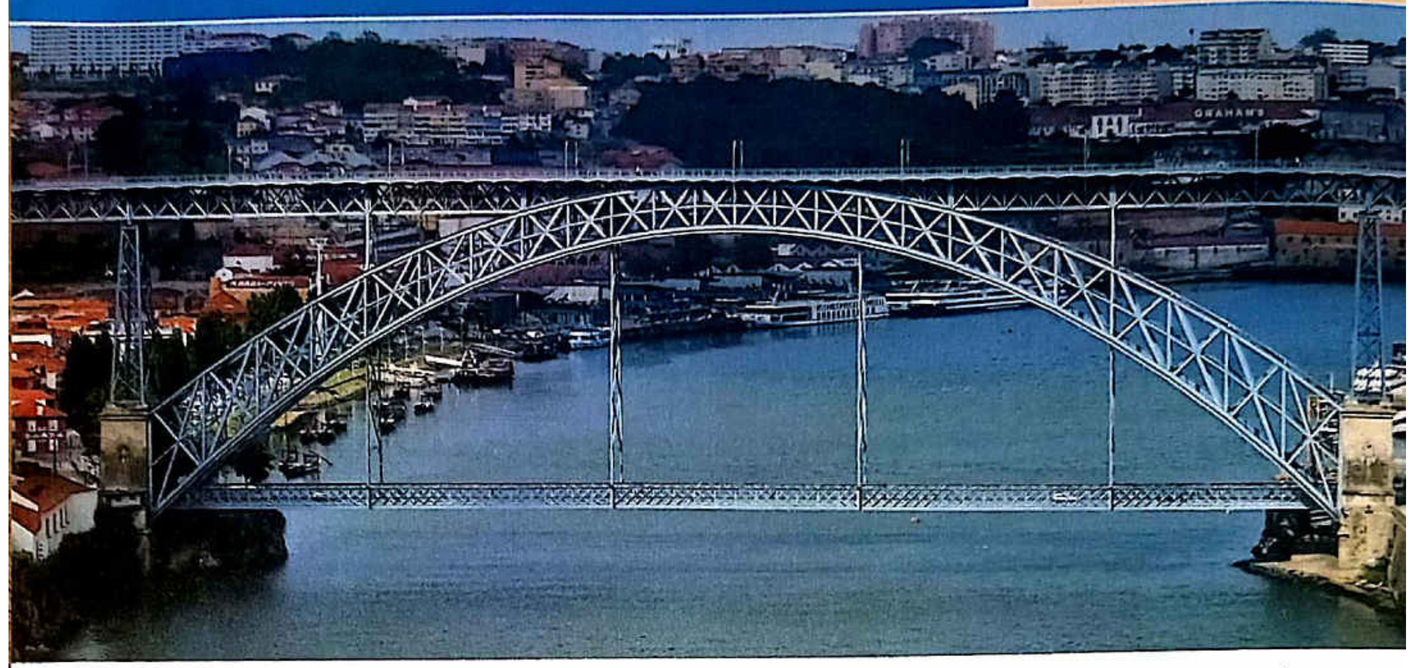
---

٣ إذا كانت : $س = \frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ ، $ص = \frac{٢ + ٣\ ت}{٢ + ت}$ وكان : ٢ س − ص = أ + ب ت

فأثبت أن : $٩\ أ^{٢} + ب^{٢} = ١$

الدرس **2**

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية



سبق أن درسنا كيفية حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح وعلمنا أنه عند حلها فإننا نحصل على حلين على الأكثر. والسؤال الذى سنتطرق له فى هذا الدرس هو :

هل يمكن تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها ؟!

نعم ، يمكن أن نفعل هذا باستخدام مميز المعادلة والذى سنتعرف عليه فيما يلى :

المميز

- عند حل المعادلة التربيعية : $أ س^{2} + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ باستخدام القانون العام

فإننا نحصل على جذرين هما : $\frac{-ب + \sqrt{ب^{2} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^{2} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

- وكلا الجذرين يحتوى على المقدار : $\sqrt{ب^{2} - ٤ أ جـ}$ ، ويُسمى المقدار : $ب^{2} - ٤ أ جـ$ مميز المعادلة التربيعية لأنه يستخدم لتمييز نوع جذرى المعادلة التربيعية ، كالتالى :

	موجب	مساويًا للصفر	سالب
المميز	$(ب^{2} - ٤ أ جـ) > ٠$	$ب^{2} - ٤ أ جـ = ٠$	$(ب^{2} - ٤ أ جـ) < ٠$
نوع الجذرين	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبان وغير حقيقيين
رسم توضيحى للدالة المرتبطة بالمعادلة			

والمثال التالى يوضح الحالات الثلاثة بالجدول السابق :

مثال ١

عيِّن نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية :

[١] س^{٢} − ٣ س + ٥ = ٠ [٢] س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٠ [٣] ٣ س^{٢} + ١٠ س = ٤

الحل

[١] ∵ أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = ٥

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ

= (−٣)^{٢} − ٤ × ١ × ٥ = −١١ (كمية سالبة)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

[٢] ∵ أ = ١ ، ب = ١٠ ، حـ = ٢٥

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٥ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

[٣] ∵ ٣ س^{٢} + ١٠ س − ٤ = ٠

∴ أ = ٣ ، ب = ١٠ ، حـ = −٤

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (١٠)^{٢} − ٤ × ٣ × (−٤) = ١٤٨ (كمية موجبة)

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

حاول بنفسك

عيِّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات الآتية :

[١] س^{٢} − ٧ س + ١٠ = ٠ [٢] س^{٢} + ٤ س + ٥ = ٠ [٣] ٤ س^{٢} − ١٢ س = −٩

مثال ٢

أثبت أن جذرى المعادلة : ٧ س^{٢} − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

∵ أ = ٧ ، ب = −١١ ، حـ = ٥

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (−١١)^{٢} − ٤ × ٧ × ٥ = −١٩ < ٠

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

، ∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ = $\frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤}$ = $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\ ت}{١٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{١١ + \sqrt{١٩}\ ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩}\ ت}{١٤}$

حاول بنفسك

إذا كانت : س^{٢} − ٤ س + ٥ = ٠

فأثبت أن : جذرى المعادلة مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال ٣

إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ك س + ٢ ك - ٤ س + ٥ = ٠$ متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة : ∴ $س^٢ - (ك + ٤) س + (٢ ك + ٥) = ٠$

∴ المميز $= (ك + ٤)^٢ - ٤ \times ١ \times (٢ ك + ٥) = ك^٢ + ٨ ك + ١٦ - ٨ ك - ٢٠ = ك^٢ - ٤$

، ∵ جذرى المعادلة متساويان. ∴ المميز = ٠

∴ $ك^٢ - ٤ = ٠$ ∴ $ك^٢ = ٤$ ∴ $ك = \pm ٢$

عند ك = ٢ : ∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠$ ∴ $(س - ٣)^٢ = ٠$ ∴ $س = ٣$

∴ عند ك = ٢ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ٣

، عند ك = -٢ : ∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٢ س + ١ = ٠$ ∴ $(س - ١)^٢ = ٠$ ∴ $س = ١$

∴ عند ك = -٢ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ١

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك الحقيقية التى تجعل جذرى المعادلة : $٤ س^٢ - ٨ س + ك = ٠$ متساويين ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال ٤

١ أوجد قيم م الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : $س^٢ - (٢ م - ١) س + م^٢ = ٠$

ليس لها جذور حقيقية. (أى : ليس لها حل فى ح)

٢ أوجد قيم ك الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : $س^٢ + ٢ (ك - ١) س + ك^٢ = ٠$

لها جذران حقيقيان. (أى : لها حل فى ح)

الحل

١ ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية. ∴ $ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠$ ∴ $(٢ م - ١)^٢ - ٤ م^٢ < ٠$

∴ $٤ م^٢ - ٤ م + ١ - ٤ م^٢ < ٠$ ∴ $-٤ م < -١$ ∴ $م > \frac{١}{٤}$

∴ المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية إذا كانت $م \in] \frac{١}{٤} ، \infty [$

٢ ∵ المعادلة لها جذران حقيقيان.

∴ $ب^٢ - ٤ أ ح \geq ٠$.

∴ $٤ (ك^٢ - ٢ ك + ١) - ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $- ٨ ك \geq - ٤$

∴ الجذران إما أن يكونا مختلفين أو متساويين.

∴ $٤ (ك - ١)^٢ - ٤ × ١ × ك^٢ \geq ٠$

∴ $٤ ك^٢ - ٨ ك + ٤ - ٤ ك^٢ \geq ٠$

∴ $ك \leq \frac{١}{٢}$

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان إذا كانت $ك \in]-\infty ، \frac{١}{٢}]$

حاول بنفسك

إذا كانت المعادلة : $م^٢ س^٢ + (٢ م - ٢) س + ١ = ٠$ ليس لها حل فى ح فأوجد قيم م الحقيقية.

مثال ٥

أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية لا يكون للمعادلة : $٤ س^٢ - ١٢ أ س + ٩ أ^٢ + ٤ = ٠$ جذور حقيقية.

الحل

المميز = $(-١٢ أ)^٢ - ٤ (٤) (٩ أ^٢ + ٤) = ١٤٤ أ^٢ - ١٤٤ أ^٢ - ٦٤$

$= -٦٤$ (كمية سالبة لجميع قيم أ)

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

ملاحظة

إذا كانت المعاملات أ ، ب ، ح فى المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$ أعدادًا نسبية وكان المميز مربعًا كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين.

فمثلاً

١ المعادلة : $٣ س^٢ - ٥ س - ٢ = ٠$

- معاملات الحدود هى :
  ٣ ، -٥ ، -٢ (أعداد نسبية)
- المميز = ٤٩ (مربع كامل)
  ∴ الجذران حقيقيان نسبيان.

وللتحقق من ذلك :

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما
٢ ، $-\frac{١}{٣}$ (حقيقيان نسبيان)

٢ المعادلة : $س^٢ - ٢ \sqrt{٥} س + ١ = ٠$

- معاملات الحدود هى : ١ ، $-٢\sqrt{٥}$ ، ١
  (معامل الحد الأوسط حقيقى وغير نسبى)
- المميز = ١٦ (مربع كامل)
  ∴ الجذران حقيقيان غير نسبيين.

وللتحقق من ذلك :

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما
$\sqrt{٥} + ٢$ ، $\sqrt{٥} - ٢$ (حقيقيان غير نسبيين)

لاحظ أنه فى المعادلة $س^2 - 2\sqrt{5}$ س + ١ = ٠ بالرغم من أن المميز مربع كامل إلا أن الجذرين حقيقيان غير نسبيين وذلك لكون معامل الحد الأوسط غير نسبى.

مثال ٦

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين أثبت أن جذرى المعادلة : أ $س^2$ + ($أ^2$ + $ب^2$) س + أ $ب^2$ = ٠ نسبيان.

الحل

∵ المميز = $(أ^2 + ب^2)^2 - 4 \times أ \times أ ب^2 = أ^4 + 2 أ^2 ب^2 + ب^4 - 4 أ^2 ب^2$

$= أ^4 - 2 أ^2 ب^2 + ب^4 = (أ^2 - ب^2)^2$ «مربع كامل»

∴ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل.

∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان.

حاول بنفسك

إذا كان أ عددًا نسبيًا فأثبت أن جذرى المعادلة : ١٥ $س^2$ − (١٠ + ٣ أ) س + ٢ أ = ٠ يكونان نسبيين.

ملاحظة

إذا كان مميز المعادلة التربيعية (ذات المعاملات الحقيقية) غير موجب فإن جذرى المعادلة التربيعية يكونان عددين مركبين مترافقين.

فمثلًا المعادلة $س^2$ − ٢ س + ٢ = ٠

- معاملات الحدود هى : ١ ، −٢ ، ٢ (أعداد حقيقية)
- المميز = −٤ (غير موجب)

∴ الجذران مركبان مترافقان

وللتحقق من ذلك بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما

١ + ت ، ١ − ت (مركبان مترافقان)

على تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرس • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ١١ = ٠$ هما ....

(أ) مركبان وغير حقيقيين. (ب) نسبيان.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) حقيقيان متساويان.

(٢) جذرا المعادلة : $س^٢ - ١١ س + ١٠ = ٠$ يكونان ....

(أ) مركبان غير حقيقيين. (ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) مركبان مترافقان.

(٣) جذرا المعادلة : $٤٩ س^٢ - ١٤ س + ١ = ٠$ يكونان ....

(أ) حقيقيان مختلفان. (ب) حقيقيان متساويان.

(جـ) مركبان غير حقيقيين. (د) مركبان غير مترافقين.

(٤) جذرا المعادلة : $٦ س^٢ = ١٩ س - ١٥$ يكونان ....

(أ) مركبان غير حقيقيين. (ب) حقيقيين متساويين.

(جـ) نسبيين مختلفين. (د) تخيليين مترافقين.

(٥) جذرا المعادلة : $س (س - ٢) = ٥$ يكونان ....

(أ) مركبان غير حقيقيين. (ب) حقيقيان متساويان.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) ٢ ، ٠

(٦) جذرا المعادلة : $س + \frac{٩}{س} = ٦$ يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) مركبان غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) تخيليان متساويان.

(٧) عدد قيم س الحقيقية التى تحقق أن : $٢ س^٢ - ٧ س = ٥$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٨) المميز للمعادلة : $(س + ٢)^٢ + ٥ = ٠$ يكون ....

(أ) مربع كامل. (ب) أكبر من الصفر.

(جـ) عدد سالب. (د) عدد غير نسبى.

(٩) فى المعادلة التربيعية : ب س^{٢} + أ س = حـ المميز هو ....

(أ) ب^{٢} - ٤ أ حـ (ب) أ^{٢} + ٤ ب حـ (جـ) ب^{٢} + ٤ أ حـ (د) حـ^{٢} - ٤ أ ب

(١٠) المعادلة التربيعية : أ^{٢} س^{٢} + ٢ أ ب س + ب^{٢} = ٠ حيث أ ، ب ∈ ع ....

(أ) لها جذران حقيقيان مختلفان. (ب) لها جذران حقيقيان متساويان.

(جـ) ليس لها جذور حقيقية.

(د) لا يمكن تحديد نوع جذريها لعدم معرفتنا بقيم أ ، ب

(١١) جذرا المعادلة : حـ س^{٢} + أ س + ب = ٠ يكونان عددان مركبان وغير حقيقيان إذا كان ....

(أ) ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠ (ب) أ^{٢} - ٤ ب حـ > ٠

(جـ) حـ^{٢} - ٤ أ ب > ٠ (د) ب^{٢} - ٤ أ حـ < ٠

(١٢) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب = ٠ حقيقيين ومختلفين فإن ....

(أ) أ ب > صفر (ب) أ = صفر

(جـ) أ > صفر ، ب > صفر (د) أ ب < صفر

(١٣) إذا كان : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ وكان : أ حـ < ٠ فإن جذرى المعادلة يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) مركبان مترافقان. (د) نسبيان.

(١٤) إذا كانت : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية فإن أى من المتباينات الآتية يحقق أن المعادلة لها جذران حقيقيان ؟

(أ) ب^{٢} + ٤ أ حـ ≤ ٠ (ب) ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠

(جـ) ب^{٢} ≤ ٥ أ حـ (د) ب^{٢} - ٤ أ حـ ≥ ٠

(١٥) إذا كان : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث أ ، ب ، حـ أعداد نسبية وكان : ب^{٢} - ٤ أ حـ = ٢٥ فإن جذرى المعادلة ....

(أ) حقيقيين متساويين. (ب) مركبين وغير حقيقيين.

(جـ) مركبين مترافقين. (د) نسبيين مختلفين.

(١٦) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} - ك س + ٢٥ = ٠ حقيقيان متساويان فإن : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) -١٠ (جـ) ± ١٠ (د) -٥

(١٧) إذا كان جذرى المعادلة التربيعية : ك س^{٢} - ٢ ك س + ٣ = ٠ حقيقيين متساويين فإن : ك = ...

(أ) صفر أ، ٣ (ب) ± ١ (جـ) صفر فقط. (د) ٣ فقط.

(١٨) إذا كان جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} - ٦ س + ك = ٠ حقيقيين متساويين فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٩) إذا كان المميز للمعادلة التربيعية : ٢ سـ^{٢} + ٥ سـ + ٤ ك = ٠ يساوى صفر
فإن : ك = ...

(أ) ± ١٤ (ب) صفر (جـ) ± $\frac{٢٥}{٣٢}$ (د) $\frac{٢٥}{٣٢}$

(٢٠) إذا كان جذرا المعادلة : سـ^{٢} + ٣ سـ − م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن إحدى قيم م التى تحقق المعادلة هى : م = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) −٥

(٢١) إذا كان جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٤ سـ + ك = ٠ حقيقيين فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤[

(٢٢) 📖 إذا كان جذرا المعادلة : سـ^{٢} + ٤ سـ + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : ....

(أ) ك = ٠ (ب) ك < ٤ (جـ) ك ≥ ٠ (د) ك ≥ ٤

(٢٣) 📖 إذا كان جذرا المعادلة : ك سـ^{٢} − ٨ سـ + ١٦ = ٠ مركبين وغير حقيقيين فإن : ....

(أ) ك > ٢ (ب) ك < ٢ (جـ) ك ∈]١ ، ١٠[(د) ك > ١

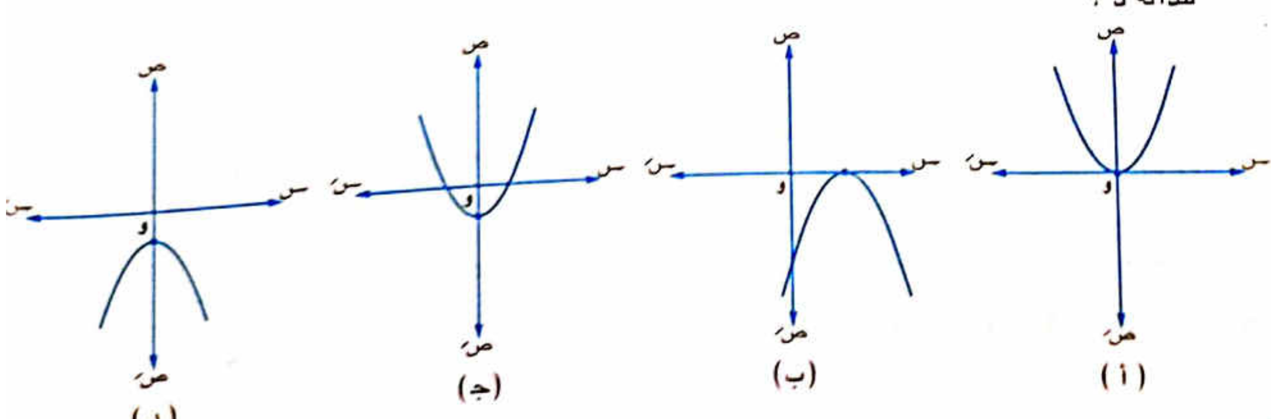
(٢٤) فى المعادلة : ٧٥ سـ^{٢} + ٧ ك سـ + ٣ = ٠ إذا كان : ك ≤ ٥ فإن جذرا المعادلة ....

(أ) حقيقيين متساويين. (ب) مركبين وغير حقيقيين.
(جـ) نسبيان مختلفان. (د) حقيقيين مختلفين.

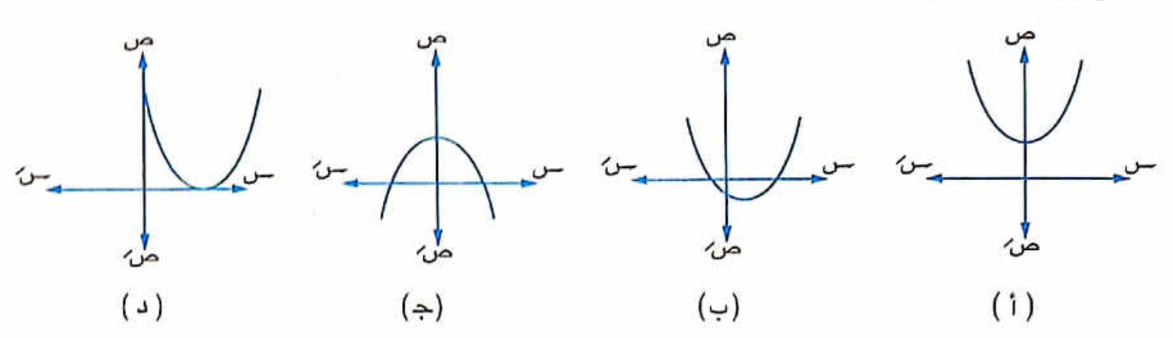
(٢٥) إذا كان التمثيل البيانى للدالة التربيعية د : د (سـ) لا يقطع محور السينات فأى مما يأتى يمكن أن تكون قاعدة الدالة ؟

(أ) ٢ سـ^{٢} + ٣ سـ − ٥ (ب) − سـ^{٢} + ٥ سـ + ١
(جـ) ٤ سـ^{٢} − ٢٠ سـ + ٢٥ (د) ٣ سـ^{٢} − سـ + ٢

(٢٦) فى المعادلة التربيعية د (سـ) = ٠ إذا كان المميز سالب فأى مما يأتى يمكن أن يكون التمثيل البيانى للدالة د ؟



(٢٧) كلًا من الأشكال الآتية تمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، فى أى من الأشكال يكون ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠



(أ) (ب) (جـ) (د)

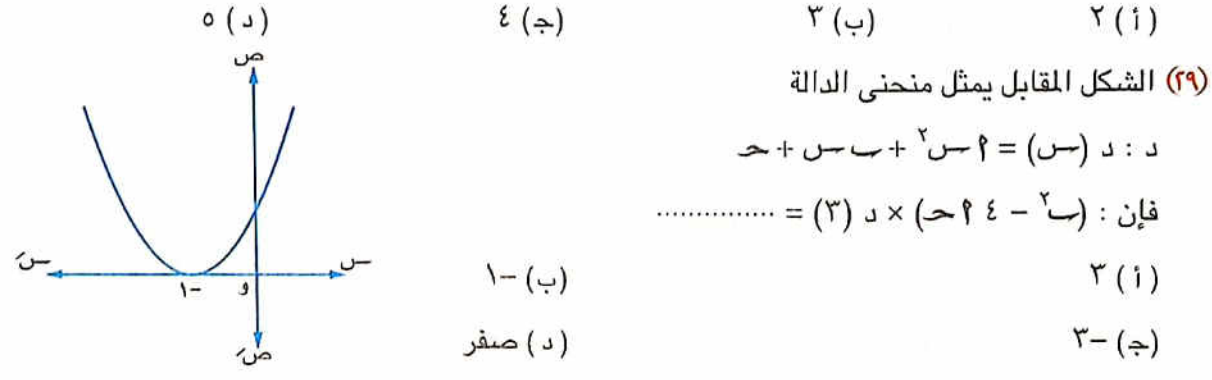
(٢٨) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = س^{٢} − ٢ (م − ٢) س + م^{٢} − ٨ يمس محور السينات فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فإن : (ب^{٢} − ٤ أ حـ) × د (٣) = ...



(أ) ٣ (ب) −١

(جـ) −٣ (د) صفر

(٣٠) فى المستوى الإحداثى رسم منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = − أ س^{٢} + ب س + حـ وكان رأس منحنى الدالة (٣ ، ١) فقطع المنحنى محور السينات مرتين حيث أ ، ب ، حـ ثوابت فأى من القيم الآتية يمكن أن تكون قيمة حـ ؟

(أ) −٨ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٧

(٣١) إذا كان للمعادلة : س^{٢} = ك − ٢ جذران تخيليان مختلفان فإن ....

(أ) ك > ٢ (ب) ك < ٢ (جـ) ك ≥ ٢ (د) ك ≤ ٢

(٣٢) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ك س + ك^{٢} = ٠ مركبان وغير حقيقيان

فإن : ك ∈ ....

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ)]٠ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

(٣٣) أى من المعادلات الآتية لها جذران مركبان غير حقيقيان ؟

(أ) −٥ س^{٢} + ٩ س − ٢ = ٠ (ب) −٥ س^{٢} + ٩ س + ٢ = ٠

(جـ) −٥ س^{٢} + ٢ س − ٩ = ٠ (د) −٥ س^{٢} + ٢ س + ٩ = ٠

(٣٤) للمعادلة : س^{٢} − ٣ س + ك = ٠ جذران غير متساويان إذا كانت ك ≠ ....

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) −٣

(٣٥) المعادلة : $س^٢ - (٢م - ١)س + م^٢ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية إذا كانت م ∈ ....

(أ) $]\frac{١}{٤} ، ∞[$ (ب) $]-∞ ، \frac{١}{٤}[$ (جـ) $]٤ ، ∞[$ (د) $]-∞ ، ٤[$

(٣٦) جذرا المعادلة : $س^٢ + ك = ٠$ حيث ك > ٠ يكونان ....

(أ) مركبان مترافقان وغير حقيقيان. (ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) نسبيان.

(٣٧) المعادلة : $(س - ٣)^٢ + (س - ٤)^٢ = ٠$ لها ....

(أ) جذران حقيقيان غير متساويان. (ب) جذران حقيقيان متساويان.

(جـ) جذران نسبيان. (د) جذران مركبان غير حقيقيان.

(٣٨) جذرا المعادلة : $(أ^٢ + ١)س^٢ - ٢أ^٣س + أ^٤ = ٠$ حيث أ ∈ ح - {٠} ....

(أ) حقيقيان مختلفان. (ب) مركبان غير حقيقيان.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) نسبيان مختلفان.

(٣٩) إذا كان : أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ب فإن جذرا المعادلة :

$(أ - ب)س^٢ - ٥(أ + ب)س - ٢(أ - ب) = ٠$ يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) مركبان غير حقيقيان.

(جـ) حقيقيان غير متساويان. (د) لاشيء مما سبق.

(٤٠) عدد الحلول المختلفة للمعادلة : $س(س - أ) = أ^٢$ في ح حيث أ ∈ ح - {٠}

يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٤١) إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد نسبية فإن للمعادلة : $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ جذران نسبيان

إذا كان : $ب^٢ - ٤ أ جـ =$ ....

(أ) عدد حقيقى موجب. (ب) عدد حقيقى سالب.

(جـ) عدد حقيقى مربع كامل. (د) صفر.

(٤٢) لإيجاد قيمة ك في المعادلة : $س^٢ + ٦س + ٢ك + ١ = ٠$ يكون كافيًا معرفة أن ....

(أ) الجذران متساويان فقط. (ب) ك > صفر فقط.

(جـ) أ ، ب معًا. (د) لاشيء مما سبق.

(٤٣) إذا كان جذرا المعادلة : $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هما ل ، ل حيث ل ∈ ح فإن : ....

(أ) أ = جـ (ب) جـ = ل (جـ) ب = ٠ (د) $\frac{ب^٢}{٤ أ جـ} = ١$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية :

(١) 📖 س^{٢} – ٢ س + ٥ = ٠

(٢) 📖 س^{٢} – ١٠ س + ٢٥ = ٠

(٣) 📖 – س^{٢} + ٥ س – ٣٠ = ٠

(٤) 📖 (س – ١١) – س (س – ٦) = ٠

(٥) س – $\frac{٢}{س – ١}$ = ٤

(٦) $\frac{س}{س + ١}$ + $\frac{س}{س – ١}$ = ٣

(٧) 📖 (س – ١) (س – ٧) = ٢ (س – ٣) (س – ٤)

---

٢ أثبت أن جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ مركبان وغير حقيقيين ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

---

٣ إذا كان جذرا كل معادلة من المعادلات الآتية حقيقيين متساويين ، فأوجد قيم ك فى كل حالة :

(١) 📖 س^{٢} – ٣ س + ٢ + $\frac{١}{ك}$ = ٠ «٤»

(٢) س^{٢} + (٢ ك + ٣) س + ك^{٢} = ٠ «= $\frac{٣}{٤}$»

(٣) 📖 س^{٢} + ٢ (ك – ١) س + (٢ ك + ١) = ٠ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ١ ، ١ أ ، ٤ ، =٣ ، =٣»

(٤) 📖 س^{٢} – ٢ ك س + ٧ ك – ٦ س + ٩ = ٠ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ٣ ، ٣ أ، ١ ، ٤ ، ٤»

---

٤ أوجد قيم العدد الحقيقى م التى تحقق أن المعادلة :

(م – ١) س^{٢} – ٢ م س + م = ٠ ليس لهما جذور حقيقية. «م ∈]–∞ ، ٠[»

---

٥ بدون حل أى من المعادلات الآتية بيّن أيًا منها لها جذران نسبيان وأيها لها جذران غير نسبيين ثم حقق إجابتك بإيجاد الجذرين :

(١) ٢ س^{٢} – ٣ س – ٢ = ٠

(٢) س^{٢} + $\sqrt{٥}$ س – ٥ = ٠

(٣) ٢ (س + ٣) + س (س – ١) = ٩

---

٦ إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : أ س^{٢} + ب س + ب – أ = ٠ نسبيان.

---

٧ 📖 إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : ل س^{٢} + (ل – م) س – م = ٠ عددان نسبيان.

---

٨ أثبت أن جذرى المعادلة : س^{٢} + ك س + ك = ١ دائمًا نسبيان حيث ك ∈ ن

---

٩ إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : س^{٢} – ٢ أ^{٣} س + أ^{٦} – ب^{٦} = ٠ عددان نسبيان.

١٠ أوجد الفترة التى تنتمى إليها أ والتى تجعل جذرى المعادلة :
(أ + ٢) س^٢ + (٢ أ + ٣) س + أ − ١ = ٠ حقيقيين. «أ ∈ $[-\frac{١٧}{٨} ، \infty[$»

١١ أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر لا يكون للمعادلة : (أ^٢ + ١) س^٢ − ٢ أ^٣ س + أ^٤ = ٠ جذور حقيقية.

١٢ أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقية يكون جذرا المعادلة : (س − أ) (س − ب) = ٥ حقيقيين.

١٣ أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية ما عدا (أ = ٢) يكون للمعادلة :
(أ − ١) س^٢ − أ س + ١ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جذرا المعادلة : س^٢ − ٢ $\sqrt{٥}$ س + ١ = ٠ يكونان ....

(أ) حقيقيين نسبيين. (ب) غير حقيقيين.
(جـ) حقيقيين متساويين. (د) حقيقيين وغير نسبيين.

(٢) إذا كان : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ ، أ ∈ ح* ، ب ∈ ح ، حـ ∈ ح وكان (ب^٢ − ٤ أ حـ) غير موجب فإن جذرى المعادلة يكونان ....

(أ) متساويين. (ب) غير حقيقيين. (جـ) مركبين مترافقين. (د) حقيقيين مختلفين.

(٣) إذا كانت : أ ، ب ، حـ أعدادًا صحيحة ، أ + ب + حـ = ٠ ، أ ≠ حـ فإن جذرى المعادلة :
(ب + حـ − أ) س^٢ + (حـ + أ − ب) س + (أ + ب − حـ) = ٠ يكونان ....

(أ) حقيقيين متساويين. (ب) حقيقيين مختلفين نسبيين.
(جـ) حقيقيين مختلفين غير نسبيين. (د) غير حقيقيين.

(٤) فى أى من المعادلات التربيعية الآتية يكون الجذران مركبين مترافقين ؟

(أ) س^٢ − ٤ س − ٥ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ س^٢ + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠
(جـ) س^٢ − ٣ $\sqrt{٢}$ س + ٤ = ٠ (د) ٣ س^٢ − $\sqrt{٧}$ س + ٥ = ٠

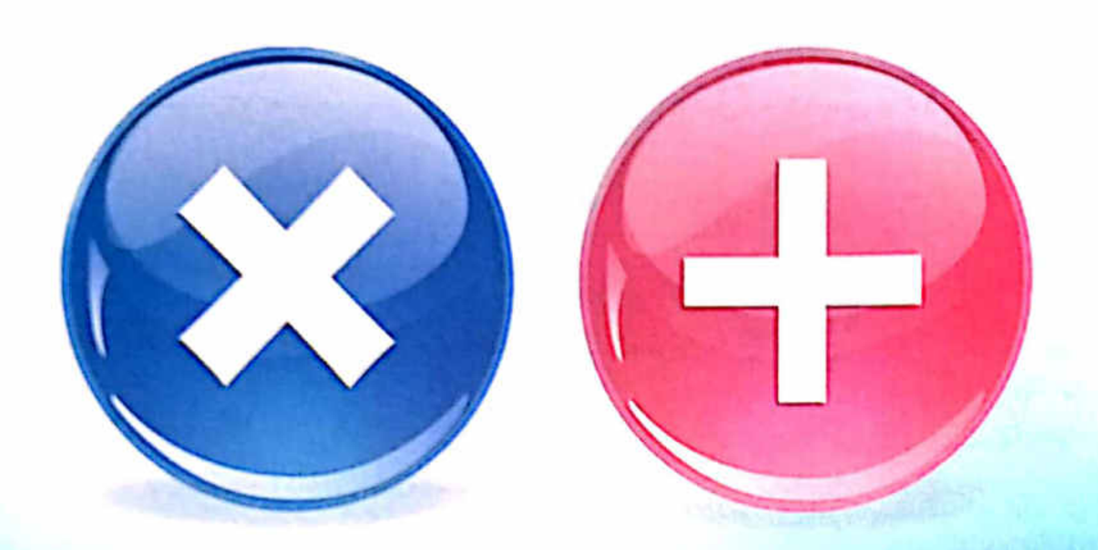
(٥) إذا كان للمعادلة : س^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ س + أ = ٠ جذران مركبان مترافقان فإن : أ ∈ ....

(أ) $[-٢ ، ٢]$ (ب) $]-\infty ، ٢]$ (جـ) $]٢ ، \infty[$ (د) $[٢ ، \infty[$

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ أعدادًا حقيقية فأثبت أن جذرى المعادلة : س^٢ + ٢ أ س + أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ حقيقيان.

٣ أثبت أن جذرى المعادلة : $\frac{١}{س + أ} = \frac{١}{س} + \frac{١}{أ}$ دائمًا غير حقيقيين إذا كانت أ ∈ ح* ، س ∉ {٠ ، −أ}

الدرس 3
العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها



نعلم أن جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + ح = 0$ ، $أ \neq$ صفر هما :

$\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ}$ ويكون :

[1] مجموع الجذرين = $\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ} = \frac{-2ب}{2أ} = \frac{-ب}{أ}$

أى أن مجموع الجذرين = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$

[2] حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ}$

$= \frac{ب^2 - (ب^2 - 4أح)}{4أ^2} = \frac{ب^2 - ب^2 + 4أح}{4أ^2} = \frac{4أح}{4أ^2} = \frac{ح}{أ}$

أى أن حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

وبصورة رمزية نكتب :

إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + ح = 0$ فإن :

[1] $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ [2] $ل م = \frac{ح}{أ}$

مثال ١

دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلتين الآتيتين :

[١] $٢ س^٢ + ٥ س - ١٢ = ٠$ [٢] $٦ س^٢ - ١١ س = ١٠$

الحل

[١] ∵ $أ = ٢$ ، $ب = ٥$ ، $جـ = -١٢$

∴ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢}$ ، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

[٢] ∵ $٦ س^٢ - ١١ س - ١٠ = ٠$

∴ $أ = ٦$ ، $ب = -١١$ ، $جـ = -١٠$

∴ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-(-١١)}{٦} = \frac{١١}{٦}$ ، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-١٠}{٦} = -\frac{٥}{٣}$

تحقق من صحة الحل بملاحظة أن الجذرين هما : $\frac{٣}{٢}$ ، -٤

حاول بنفسك

إذا كانت : $٣ س^٢ + ٥ = ٤ س$ فأوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

مثال ٢

[١] إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $٢ س^٢ + ك س + ١ = ٠$ هو $-\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة : ك ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

[٢] إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٤ س + ك = ٠$ هو $٤\frac{١}{٢}$

فأوجد قيمة : ك ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

الحل

[١] ∵ مجموع الجذرين $= -\frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{-ك}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $\boxed{ك = ٣}$

∴ المعادلة هى : $٢ س^٢ + ٣ س + ١ = ٠$ ∴ $(٢ س + ١)(س + ١) = ٠$

∴ $\boxed{س = -\frac{١}{٢}}$ ، أ $\boxed{س = -١}$

[٢] ∵ حاصل ضرب الجذرين $= ٤\frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$ ∴ $\frac{ك}{٢} = \frac{٩}{٢}$ ∴ $\boxed{ك = ٩}$

∴ المعادلة هى : $٢ س^٢ - ٤ س + ٩ = ٠$ ∴ $أ = ٢$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ٩$

$\therefore$ س $= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 2 \times 9}}{2 \times 2} = \frac{4 \pm \sqrt{-56}}{4}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{56}\, ت}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}\, ت}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{14}}{2} ت$

$\therefore$ $\boxed{س = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} ت}$ ، أ $\boxed{س = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2} ت}$

حاول بنفسك

1. إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $2 س^2 - أ س + 6 = 0$ هو $3\frac{1}{2}$
فأوجد قيمة : أ ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

2. إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^2 + 3 س + أ = 0$ هو 5
فأوجد قيمة : أ ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال ٣

1. إذا كان : س = -3 أحد جذرى المعادلة : $2 س^2 + ك س - 3 = 0$ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**
2. إذا كان : س = 6 أحد جذرى المعادلة : $س^2 - 5 س + ك = 0$ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**
3. إذا كان : -1 ، 5 هما جذرا المعادلة : $أ س^2 + ب س - 5 = 0$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب**

الحل

1. $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-3}{2}$ $\therefore -3 \times$ الجذر الآخر $= \frac{-3}{2}$

$\therefore$ الجذر الآخر $= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{-3}$ $\therefore$ $\boxed{الجذر الآخر = \frac{1}{2}}$

، $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-ك}{2}$ ، $\because$ الجذرين هما : -3 ، $\frac{1}{2}$

$\therefore -3 + \frac{1}{2} = \frac{-ك}{2}$ $\therefore \frac{-5}{2} = \frac{-ك}{2}$ $\therefore$ $\boxed{ك = 5}$

حل آخر :

$\because$ س = -3 أحد جذرى المعادلة : $2 س^2 + ك س - 3 = 0$ فهو يحققها.

$\therefore 2 (-3)^2 + ك (-3) - 3 = 0$ $\therefore 18 - 3 ك - 3 = 0$ ومنها $\boxed{ك = 5}$

$\therefore$ المعادلة هى : $2 س^2 + 5 س - 3 = 0$

وبالتحليل : $\therefore (2 س - 1)(س + 3) = 0$ $\therefore 2 س - 1 = 0$ ومنها س $= \frac{1}{2}$

أ، س + 3 = 0 ومنها س = -3 $\therefore$ $\boxed{الجذر الآخر = \frac{1}{2}}$

٢ ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-(-٥)}{١} = ٥$

∴ ٦ + الجذر الآخر = ٥ ∴ **الجذر الآخر = −١**

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{ك}{١} = ك$ ، ∵ الجذرين هما : ٦ ، −١

∴ ٦ × (−١) = ك ∴ **ك = −٦**

حاول حل المثال بطريقة أخرى كما فى رقم ١

٣ ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ −١ × ٥ = $\frac{-٥}{أ}$

∴ −٥ = $\frac{-٥}{أ}$ ∴ **أ = ١**

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ −١ + ٥ = $\frac{-ب}{١}$

∴ ٤ = −ب ∴ **ب = −٤**

حل آخر :

∵ −١ جذر للمعادلة ∴ أ$(-١)^٢$ + ب(−١) − ٥ = ٠ ∴ أ − ب = ٥ (١)

، ∵ ٥ جذر للمعادلة ∴ أ$(٥)^٢$ + ب(٥) − ٥ = ٠

∴ ٢٥ أ + ٥ ب = ٥ وبالقسمة على ٥ ∴ ٥ أ + ب = ١ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ٦ أ = ٦ ∴ **أ = ١**

وبالتعويض فى (١) : ∴ ١ − ب = ٥ ∴ **ب = −٤**

حاول بنفسك

أوجد الجذر الآخر لكل من المعادلتين الآتيتين ، ثم أوجد قيمة ك فى كل حالة :

١ إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ + ك س − ٧ = ٠ .

٢ إذا كان : س = $\frac{٥}{٣}$ أحد جذرى المعادلة : ٩ $س^٢$ − ٩ س + ك = ٠ .

مثال ٤

إذا كان : (١ + $\sqrt{٢}$ ت) هو أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٢ س + حـ = ٠ حيث حـ ∈ ح

فأوجد : ١ قيمة الجذر الآخر. ٢ قيمة حـ

الحل

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-(-٢)}{١} = ٢$

∴ (١ + $\sqrt{٢}$ ت) + الجذر الآخر = ٢ ∴ الجذر الآخر = ٢ − (١ + $\sqrt{٢}$ ت)

∴ **الجذر الآخر = ١ − $\sqrt{٢}$ ت**

لاحظ مباشرة أنه :

∵ معاملات الحدود ∈ ح ، أحد الجذرين مركب غير حقيقى

∴ الجذر الآخر هو مرافق الجذر المعطى أى أنه يساوى ١ − $\sqrt{٢}$ ت

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = حـ

∴ $(1 - \sqrt{2}\,ت)(1 + \sqrt{2}\,ت) =$ حـ　　　∴ $1^2 - (\sqrt{2}\,ت)^2 =$ حـ

∴ $1 - 2\,ت^2 =$ حـ　　　∴ $1 + 2 =$ حـ　　　∴ **حـ = ٣**

حل اخر:

∵ $(1 + \sqrt{2}\,ت)$ أحد جذرى المعادلة المعطاة ، فهو يحققها.

∴ $(1 + \sqrt{2}\,ت)^2 - 2(1 + \sqrt{2}\,ت) +$ حـ $= 0$

∴ $1 + 2\sqrt{2}\,ت + (\sqrt{2}\,ت)^2 - 2 - 2\sqrt{2}\,ت +$ حـ $= 0$

∴ $1 + 2\sqrt{2}\,ت - 2 - 2 - 2\sqrt{2}\,ت +$ حـ $= 0$

∴ $-3 +$ حـ $= 0$　　　∴ **حـ = ٣**

اى ان $س^2 - 2س + 3 = 0$

ويمكن باستخدام القانون العام إيجاد الجذر الآخر المطلوب.

حاول بنفسك

إذا كان : $(\sqrt{2} + ت)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س^2 - 2\sqrt{2}\,س +$ حـ $= 0$ حيث حـ ∈ ع

فأوجد : [١] قيمة الجذر الآخر.　　[٢] قيمة حـ

ملاحظات

فى المعادلة التربيعية : أ$س^2$ + ب س + حـ = ٠

[١] إذا كان : أ = ١　　فإن : ل + م = − ب ، ل م = حـ

اى ان مجموع الجذرين = المعكوس الجمعى لمعامل س ، حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق.

[٢] إذا كان : ب = ٠　　فإن : ل + م = ٠　　**اى** ل = − م

اى ان أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر.

[٣] إذا كان : أ = حـ　　فإن : ل م = ١　　**اى** ل = $\frac{1}{م}$

اى ان أحد جذرى المعادلة معكوس ضربى للآخر.

مثال ٥

١ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٣ س^{٢} + (ك − ٣) س + ٧ = ٠
هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

٢ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ ك س^{٢} + ٧ س + ك^{٢} + ١ = ٠
هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

الحل

١ ∵ أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر. ∴ ب = ٠
∴ ك − ٣ = ٠ ∴ **ك = ٣**

٢ ∵ أحد الجذرين معكوس ضربى للآخر. ∴ أ = جـ
∴ ك^{٢} + ١ = ٢ ك ∴ ك^{٢} − ٢ ك + ١ = ٠
∴ (ك − ١)^{٢} = ٠ ∴ **ك = ١**

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة :

١ س^{٢} + (ك − ٥) س − ٩ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر.

٢ س^{٢} + ٣ س + ك = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر.

مثال ٦

أوجد قيمة ء التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + ء س − ٥٠ = ٠ ضعف المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

الحل

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = −٢ ل

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل (−٢ ل) = $\frac{-٥٠}{١}$

∴ −٢ ل^{٢} = −٥٠ ∴ ل^{٢} = ٢٥ ∴ ل = ± ٥

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل + (−٢ ل) = $\frac{-ء}{١}$

∴ − ل = − ء ∴ ل = ء ∴ ء = ± ٥

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − ك س + ١٢ = ٠ ثلاثة أمثال الجذر الآخر.

مثال ٧

أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ح} = ٠$.

مساويًا المعكوس الجمعى لضعف الجذر الآخر.

الحل

بفرض أن أحد الجذرين = ل   ∴ الجذر الآخر = −٢ ل

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ ل + (−٢ ل) = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ∴ ل = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{ح}}{\text{أ}}$ ∴ ل × (−٢ ل) = $\frac{\text{ح}}{\text{أ}}$

∴ $\text{ل}^{٢} = \frac{-\text{ح}}{٢\,\text{أ}}$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{-\text{ح}}{٢\,\text{أ}}$ ∴ $\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{-\text{ح}}{٢\,\text{أ}}$

∴ $\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}} = \frac{-\text{ح}}{٢}$

∴ $٢\,\text{ب}^{٢} + \text{أ}\,\text{ح} = ٠$ (وهذا هو الشرط اللازم)

حاول بنفسك

أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ح} = ٠$.

مساويًا أربعة أمثال الجذر الآخر.

على العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموع جذرى المعادلة : $س^٢ + ٣ س - ١٠ = ٠$ هو ....

(أ) ١٠ (ب) -١٠ (جـ) ٣ (د) -٣

(٢) مجموع جذرى المعادلة : $٤ س^٢ + ٤ س - ٣٥ = ٠$ هو ....

(أ) -١ (ب) -٤ (جـ) ١ (د) $-\frac{٣٥}{٤}$

(٣) مجموع جذرى المعادلة : $٥ س^٢ - ٣ = ٠$ هو ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٥}{٣}$

(٤) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$ هو ....

(أ) -٦ (ب) ٥ (جـ) -٥ (د) ٦

(٥) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٧ س - ٦ = ٠$ يساوى ....

(أ) -٦ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) ٣ (د) -٣

(٦) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٣ + ٢ س - \frac{١}{٤} س^٢ = ٠$ يساوى ....

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) -١٢ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٧) المعادلة : $ب س^٢ + جـ س + أ = ٠$ حاصل ضرب جذريها يساوى ....

(أ) $\frac{-جـ}{أ}$ (ب) $\frac{أ}{ب}$ (جـ) $\frac{-جـ}{ب}$ (د) $\frac{أ}{جـ}$

(٨) حاصل ضرب الجذرين فى المعادلة : $٣ س^٢ - ٤ = ٠$ مضروبًا فى مجموع الجذرين فى المعادلة : $س^٢ - ٣ س = ٠$ هو ....

(أ) ١٢ (ب) -٣ (جـ) -٤ (د) ٣

(٩) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $(ك - ٢) س^٢ - ٦ س + ١٢ = ٠$ هو ٣ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣٨

(١٠) إذا كان : م ، (٥ - م) هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ك س + ٦ = ٠$ فإن : ك = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) -٨

(١١) فى المعادلة التربيعية : أ$س^٢$ − ب س + حـ = ٠ إذا كان مجموع جذريها يساوى حاصل ضربهما
فإن : ب = ...

(أ) −أ   (ب) أ   (جـ) −حـ   (د) حـ

(١٢) إذا كانت س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ك س − ٦ = ٠
فإن مجموع جذرى المعادلة = ...

(أ) −٥   (ب) ٦   (جـ) −٦   (د) ٥

(١٣) إذا كان (٢ + ت) هى أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٤ س + حـ = صفر   فإن قيمة حـ = ...

(أ) ١٦   (ب) −١٦   (جـ) −٥   (د) ٥

(١٤) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢$ − (ك + ٢) س − ٣ = ٠ ، وكان : ل + م = ٠
فإن : ك = ...

(أ) −٢   (ب) −٣   (جـ) ٢   (د) ٣

(١٥) إذا كان : م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : أ$س^٢$ + ب س + ١٢ = ٠   فإن : أ = ...

(أ) ٣   (ب) ٥   (جـ) ٦   (د) ٩

(١٦) إذا كان : ل + ١ ، م + ١ جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٣ س + ٢ = ٠ وكان : ل < م
فإن : ل = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

(١٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢$ + س + ١ = ٠   فإن : ل + م + ل م = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) −١   (د) ٢

(١٨) إذا كانت : ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٢١ س + ٤ = ٠   فإن : $\sqrt{ل}$ + $\sqrt{م}$ = ... سم

(أ) ٢٥   (ب) ٥   (جـ) −٥   (د) ± ٥

(١٩) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢$ + ب س + حـ = صفر هما ل ، ل   فإن : $ب^٢$ + ٤ حـ = ...

(أ) صفر   (ب) ٤ $ل^٢$ (جـ) ٨ ل   (د) ٨ $ل^٢$

(٢٠) حاصل ضرب جذور المعادلات : أ$س^٢$ + ب س + حـ = ٠ ، ب$س^٢$ + حـ س + أ = ٠
، حـ$س^٢$ + أ س + ب = ٠ يساوى ....

(أ) أ ب حـ   (ب) −١   (جـ) ١   (د) صفر

(٢١) إذا كان : ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة : ٢ $س^٢$ + ب س + ٥٤ = ٠   فإن : ب = ...

(أ) −١٢   (ب) −٢٤   (جـ) ٦   (د) ٩

(٢٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ن = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١

فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ أ، ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) إذا كان أحد جذور المعادلة : $س^٢ - ٣ س + حـ = ٠$ ضعف الجذر الآخر فإن : حـ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ك س - ٩٨ = ٠$ هو ضعف المعكوس الجمعى للجذر الآخر

فإن : ك = ...

(أ) ± ١٤ (ب) ± ٧ (جـ) ± ٨ (د) ٤٩

(٢٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $٣ س^٢ + (أ + ٣) س + ٧ = ٠$ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر

فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٢٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (ب - ٣) س + ٥ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (ب^٢ - ٢ ب + ١) س - ٩ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ١ (د) −١

(٢٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $(٢ س + ك)^٢ - ١٢ س = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١٢

(٢٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $٢ ك س^٢ + ٧ س + ١ + ك^٢ =$ صفر معكوسًا ضربيًا للآخر

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ± ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٣١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $٢ ك س^٢ + ٣ س + ٢ ك + ك^٢ - ١ = ٠$ معكوس ضربى للآخر

فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٣٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : (ك − ٣) س^{٢} − ٥ س + ٢ ك = ٨ معكوس ضربى للجذر الآخر

فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) −٥ (د) −٣

(٣٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٣ س^{٢} − (ك + ٢) س + ك^{٢} + ٢ ك = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : ك = ...

(أ) −٣ أ، ١ (ب) −٣ أ، −١ (جـ) ٣ أ، −١ (د) ٣ أ، ١

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فإن : ب + حـ = ...

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٤ (د) ٨

(٣٥) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = س^{٢} + ك س + ن

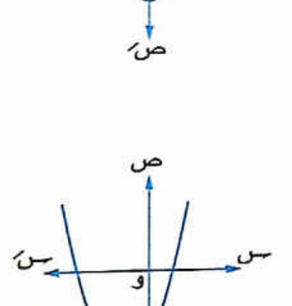
فإن : ك + ن = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) ٧ (د) −٧

(٣٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فأى مما يأتى صحيح ؟



(أ) أ > صفر ، حـ > صفر

(ب) أ > صفر ، حـ < صفر

(جـ) أ < صفر ، حـ > صفر

(د) أ < صفر ، حـ < صفر

(٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د :

د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فإن : ....

(أ) أ حـ > ٠ (ب) أ حـ < ٠

(جـ) أ حـ = ٠ (د) أ حـ عدد تخيلى.

(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = $س^{٢}$ − ٨ س + ك + ١

فإن : ك = ...

(أ) −١٤
(ب) ١٤
(ج) ٨
(د) −٨

(٣٩) إذا كان : س = −٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ $س^{٢}$ + ك س − ٣ = ٠

فإن الجذر الآخر يساوى ....

(أ) ٢
(ب) $\frac{-٣}{٢}$
(ج) $\frac{١}{٢}$
(د) ٤

(٤٠) إذا كان : س = ٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ $س^{٢}$ − ٥ س + ك = ٠

فإن الجذر الآخر يساوى ....

(أ) ٣
(ب) $-\frac{١}{٢}$
(ج) $\frac{-٥}{٢}$
(د) −٣

(٤١) إذا كان : س = ٢ ، س = −٣ هما جذرا المعادلة : ٢ $س^{٢}$ + أ س + ب = ٠

فإن : أ + ب = ...

(أ) −٦
(ب) −١
(ج) −١٠
(د) ١٢

(٤٢) إذا كان أحد جذور المعادلة : أ $س^{٢}$ + ب س + ج = ٠ يساوى واحد فإن الجذر الآخر يساوى ....

(أ) $\frac{أ}{ج}$
(ب) $\frac{ج}{أ}$
(ج) $\frac{-ب}{أ}$
(د) $\frac{-أ}{ب}$

(٤٣) إذا كان جذرا المعادلة : أ $س^{٢}$ + ب س + ج = ٠ هما هـ ، ١ فإن ....

(أ) أ = هـ
(ب) ب = أ هـ + ١
(ج) هـ + ١ = $\frac{-ب}{أ}$
(د) هـ + ١ = $\frac{ب}{أ}$

(٤٤) مجموع جذرى المعادلة : (س − أ) (س − ب) = ج هو ....

(أ) أ + ب
(ب) −(أ + ب)
(ج) أ + ب + ج
(د) أ + ب − ج

(٤٥) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ب}{س}$ = ج هو ....

(أ) $\frac{ج}{أ}$
(ب) أ ج
(ج) أ ب
(د) ب ج

(٤٦) إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ $س^{٢}$ + ب س − ٥ = ٠ هو $\frac{-٣}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$
(ب) $\frac{-٣}{٢}$
(ج) ٣
(د) −٣

(٤٧) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ $س^{٢}$ + ٨ س + ج = ٠ يساوى $\frac{٤}{٣}$

فإن : ج = ...

(أ) ٤
(ب) −٤
(ج) $\frac{٤}{٣}$
(د) $\frac{-٤}{٣}$

(٤٨) إذا كان : ٢ − ت أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ ، ب ، حـ ∈ ح

فإن : (ب ، حـ) = ...

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (−٤ ، ٥) (جـ) (٤ ، −٥) (د) (−٤ ، −٥)

(٤٩) إذا كان جذرا المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ هما (م − ن − ١) ، (ن − م + ٢)

فإن : ....

(أ) $\frac{حـ}{أ}$ = ١ (ب) $\frac{ب}{أ}$ = ١ (جـ) $\frac{حـ}{أ}$ = −١ (د) $\frac{ب}{أ}$ = −١

(٥٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة : (أ − ب) $س^٢$ + (ب − حـ) س + (حـ − أ) = ٠ معكوس جمعى

للجذر الآخر فإن : $\frac{حـ - أ}{أ - ب}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

ثانياً الأسئلة المقالية

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

(١) ٣ $س^٢$ = ٢٣ س − ٣٠

(٢) (٤ س + ١) (س + ٦) = (س − ٢) (٣ س − ٤)

(٣) $\frac{س}{٢}$ + $\frac{١}{س}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٤) $\frac{٣ س + ٢}{س + ٢}$ = $\frac{س + ١}{س - ١}$

(٥) (أ − ١) $س^٢$ + س − $أ^٢$ س − ١ + أ = ٠

(٦) (أ + ب) $س^٢$ + ($أ^٢$ − $ب^٢$) س + $أ^٢$ + ٢ أ ب + $ب^٢$ = ٠

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ $س^٢$ + ١٠ س − حـ = ٠ هو $-\frac{٨}{٣}$

فأوجد قيمة حـ ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «حـ = ٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = −٤»

٣ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ + ب س − ٥ = ٠ هو $-\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «ب = ٣ ، س = $\frac{-٥}{٢}$ أ، س = ١»

٤ أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة أ فى كل مما يأتى حيث أ ∈ ح :

(١) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٢ س + أ = ٠ . «٣ ، −٣»

(٢) إذا كان : س = $\frac{١}{٢}$ أحد جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − أ س + ٣ = ٠ . «٣ ، ٧»

(٣) إذا كان : (١ + ت) أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٢ س + أ = ٠ . «١ − ت ، ٢»

(٤) إذا كان : (٢ + ت) أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ + أ س + ٥ = ٠ . «٢ − ت ، −٤»

5 أوجد قيمتى أ ، ب فى كل من المعادلات الآتية إذا كان :

(١) ٢ ، ٥ جذرى المعادلة : $س^2 + أ س + ب = ٠$. «أ = −٧ ، ب = ١٠»

(٢) −٣ ، ٧ جذرى المعادلة : $أ س^2 - ب س - ٢١ = ٠$. «أ = ١ ، ب = ٤»

(٣) −١ ، $\frac{٣}{٢}$ جذرى المعادلة : $أ س^2 - س + ب = ٠$. «أ = ٢ ، ب = −٣»

(٤) $\sqrt{٣}$ ت ، $-\sqrt{٣}$ ت جذرى المعادلة : $س^2 + أ س + ب = ٠$. «أ = ٠ ، ب = ٣»

---

6 فى كل مما يأتى أوجد قيمة ك التى تجعل :

(١) أحد جذرى المعادلة : $س^2 + (ك - ١) س - ٣ = ٠$ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر. «١»

(٢) أحد جذرى المعادلة : $(ك - ٢) س^2 + (ك - ٣) س - ٤ = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر. «−٢»

(٣) أحد جذرى المعادلة : $٤ ك س^2 + ٧ س + ك^2 + ٤ = ٠$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «٢»

(٤) أحد جذرى المعادلة : $٢ س^2 + ك^2 = ٥ س + ٢$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «±٢»

---

7 أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^2 - أ س + ٢١ = ٠$

يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١ «−٩,٥ أ ، ١٠»

---

8 فى المعادلة : $(أ - ٢) س^2 + (أ - ٣) س - ٤ = ٠$. أوجد قيمة أ إذا كان :

(١) مجموع جذريها يساوى ٣

(٢) حاصل ضرب جذريها يساوى −٤ «$\frac{٩}{٤}$ ، ٣»

---

9 فى المعادلة : $(ك - ٤) س^2 - (٣ - ك) س - ٣ = ٠$. أوجد قيمة ك إذا كان :

(١) مجموع جذريها يساوى ٥

(٢) حاصل ضرب جذريها يساوى −٣

(٣) أحد جذريها يساوى المعكوس الجمعى للآخر.

(٤) أحد جذريها يساوى المعكوس الضربى للآخر. «$\frac{٢٣}{٦}$ ، ٥ ، ٣ ، ١»

---

10 أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $٢ س^2 - (ك - ١) س + (ك^2 + ٢ ك - ٣) = ٠$

ضعف الجذر الآخر. «−٣,٥ أ ، ١»

---

11 أوجد قيمة أ إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^2 - أ س + ٢ أ - ٤ = ٠$

أربعة أمثال الجذر الآخر. «١٠ أ ، $٢\frac{١}{٢}$»

١٢ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $(أ - ٢)$ س^٢ $-$ أ س $+$ ب^٢ $=$ ٠ يساوى ٣ وحاصل ضربهما ٥

أوجد قيمتى : أ ، ب

«٣ ، $\pm\sqrt{٥}$»

١٣ أوجد قيمة حـ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س^٢ $-$ ٦ س $+$ حـ $=$ ٠

يساوى مربع الجذر الآخر.

«-٢٧ أ ، ٨»

١٤ إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٨ س^٢ $-$ ٣٠ س $+$ حـ $=$ ٠

يساوى مربع الجذر الآخر **فأوجد قيمة : حـ**

«٢٧ أ ، -١٢٥»

١٥ أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ س^٢ $-$ أ س $-$ ٣ $=$ ٠

يزيد عن المعكوس الجمعى للآخر بمقدار ١

«٤»

١٦ أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ س^٢ $-$ أ س $+$ ٣ $=$ ٠

يزيد عن المعكوس الضربى للجذر الآخر بمقدار ١

«٧»

١٧ أوجد قيمة حـ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س^٢ $-$ ١٠ س $+$ حـ $=$ ٠

يقل عن مربع الجذر الآخر بمقدار ٢

«-٥٦ أ ، ٢١»

١٨ إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة : أ س^٢ $+$ ب س $+$ حـ $=$ ٠ كنسبة ٢ : ٣

أثبت أن : ٢٥ أ حـ $=$ ٦ ب^٢

١٩ إذا كان جذرا المعادلة : ٨ س^٢ $-$ ب س $+$ ٣ $=$ ٠ موجبين والنسبة بينهما ٢ : ٣ **فأوجد قيمة : ب** «١٠»

٢٠ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $(أ + ١)$ س^٢ $+$ $(٣ أ - ١)$ س $+$ أ^٢ $+$ ١ $=$ ٠

يساوى حاصل ضربهما فما قيمة أ ؟

«٠ أ ، -٣»

٢١ أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : أ س^٢ $+$ ب س $+$ حـ $=$ ٠

(١) ضعف الجذر الآخر.

(٢) يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

«٩ أ حـ $=$ ٢ ب^٢ ، ٤ أ حـ $=$ ب^٢ $-$ ٩ أ^٢»

٢٢ أوجد قيمة أ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة : س^٢ $-$ $(أ + ٤)$ س $+$ ٣ أ^٢ $=$ ٠

يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^٢ $-$ ٧ أ س $+$ أ^٢ $=$ ٠ .

«٤ أ ، -٢»

اكتشف الخطأ

٢٣ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ك = ٢$ هو ١٢ فأوجد قيمة : ك

إجابة مى

∵ حاصل ضرب الجذرين = ١٢

∴ $\frac{ك}{١} = ١٢$

∴ ك = ١٢

إجابة نورا

∵ $س^٢ + ٤ س + ك = ٢$

∴ $س^٢ + ٤ س + ك - ٢ = ٠$

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ١٢

∴ $\frac{ك - ٢}{١} = ١٢$ ∴ ك − ٢ = ١٢

∴ ك = ١٤

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان (٢ ت) أحد جذرى المعادلة التربيعية : $س^٢ + أ س + ب = ٠$ حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ....

(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (−٢ ت) (ب) مجموع جذرى المعادلة = صفر

(جـ) حاصل ضرب جذرى المعادلة = −٤ (د) المميز للمعادلة التربيعية < صفر

(٢) لإيجاد قيم ب ، حـ الحقيقية فى المعادلة : $س^٢ + ب س + حـ = ٠$ يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط. (ب) أحد الجذرين = (٣ + ت) فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شىء مما سبق.

(٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = $أ س^٢ + ب س + حـ$

فإن : $\frac{ب + حـ}{أ} = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٧ (د) ١٠

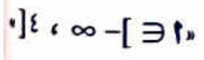
(٤) إذا كان : $س_١$ ، $س_٢$ هما جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$

وكان : $س_١ < ٠ < س_٢$ ، $|س_١| > |س_٢|$ فأى من العبارات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) أ > ٠ (ب) ب حـ > ٠ (جـ) ب حـ < ٠ (د) $س_١ + س_٢ > ٠$

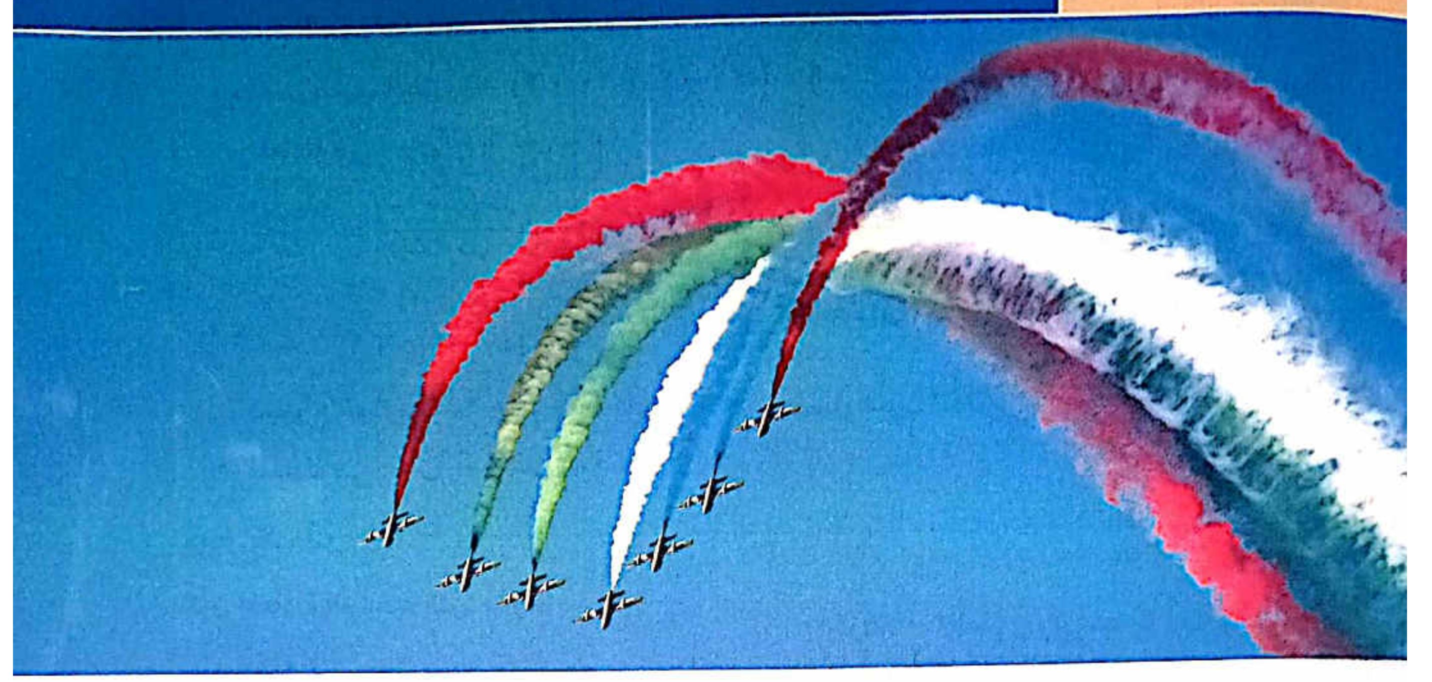
٢ أوجد قيم أ التى تجعل للمعادلة : $٣ س^٢ - (٢ أ - ١) س + (أ - ٤) = ٠$

جذرين مختلفى الإشارة.



الدرس 4

تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها



بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + حـ = ٠$

وبضرب الطرفين فى $\frac{١}{أ}$ حيث $أ \neq ٠$ تصبح المعادلة على الصورة :

$س^2 + \frac{ب}{أ} س + \frac{حـ}{أ} = ٠$ أى : $س^2 - \left(-\frac{ب}{أ}\right) س + \frac{حـ}{أ} = ٠$ (١)

ولكن : $-\frac{ب}{أ} = ل + م$ ، $\frac{حـ}{أ} = ل م$

وبالتعويض فى (١) نحصل على المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م

وهى : $س^2 - (ل + م) س + ل م = ٠$ (٢)

أى $س^2$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

وبتحليل المقدار الثلاثى فى الطرف الأيمن للمعادلة (٢) نحصل على صورة أخرى للمعادلة

وهى $(س - ل)(س - م) = ٠$

مثال ١

كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١ $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ٢ $٣ + \sqrt{٢}$ ، $٣ - \sqrt{٢}$ ٣ $\frac{-١ + ت}{ت}$ ، $\frac{٢}{١ + ت}$

الحل

١ مجموع الجذرين = $\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٣}{٢} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٥}{٨}$

، ∵ المعادلة هى : $س^2$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى : $س^2 - \frac{١١}{٤} س + \frac{١٥}{٨} = ٠$ وبضرب الطرفين فى ٨

∴ المعادلة هى : $٨ س^2 - ٢٢ س + ١٥ = ٠$

٢ مجموع الجذرين = $٣ + \sqrt{٢} + ٣ - \sqrt{٢} = ٦$

، حاصل ضرب الجذرين = $(٣ + \sqrt{٢})(٣ - \sqrt{٢}) = ٩ - ٢ = ٧$

∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٦ س + ٧ = ٠$

٣ ∵ $\frac{-١ + ت}{ت} = \frac{(-١ + ت) ت}{ت \times ت} = \frac{- ت + ت^٢}{ت^٢} = \frac{- ت - ١}{-١} = ١ + ت$

، $\frac{٢}{١ + ت} = \frac{٢ (١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)} = \frac{٢ - ٢ ت}{١ - ت^٢} = \frac{٢ - ٢ ت}{٢} = ١ - ت$

∴ مجموع الجذرين = ١ + ت + ١ - ت = ٢ ، حاصل ضرب الجذرين = $(١ + ت)(١ - ت) = ٢$

∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٢ س + ٢ = ٠$

حاول بنفسك

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١ -٤ ، ٧

٢ ٣ - ٢ ت ، $\frac{٤ + ٧ ت}{٢ + ت}$

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٢

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ هما ل ، م

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل + ٧ ، م + ٧

الحل

فى هذا المثال المطلوب تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاة حيث توجد علاقة معينة بين جذرى كل من المعادلتين.

ولهذا المثال عدة طرق للحل نسردها فيما يلى :

الطريقة الأولى

وتتلخص خطواتها فيما يلى :

١ نوجد جذرى المعادلة المعطاة.

٢ نوجد جذرى المعادلة المطلوبة.

٣ نكون المعادلة المطلوب تكوينها.

∵ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ ∴ $(س - ٦)(س + ١) = ٠$

∴ ٦ ، -١ هما جذرا المعادلة المعطاة.

وبفرض أن : ل = ٦ ، م = -١ ، جذرى المعادلة المطلوبة هما هـ ، و

∴ هـ = ل + ٧ = ٦ + ٧ = ١٣ ، و = م + ٧ = -١ + ٧ = ٦

∴ هـ + و = ١٣ + ٦ = ١٩ ، هـ و = ١٣ × ٦ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ١٩ س + ٧٨ = ٠$

الطريقة الثانية

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ هـ + و = ل + ٧ + م + ٧ = ل + م + ١٤

، ∵ ل + م = ٥ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ + و = ٥ + ١٤ = ١٩

، هـ و = (ل + ٧) (م + ٧) = ل م + ٧ (ل + م) + ٤٩

، ∵ ل م = −٦ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ و = −٦ + ٧ × ٥ + ٤٩ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠

الطريقة الثالثة

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ ل = هـ − ٧ ، م = و − ٧

، ∵ ل أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ $ل^٢$ − ٥ ل − ٦ = ٠

، ∵ ل = هـ − ٧

∴ $(هـ − ٧)^٢$ − ٥ (هـ − ٧) − ٦ = ٠

∴ $هـ^٢$ − ١٤ هـ + ٤٩ − ٥ هـ + ٣٥ − ٦ = ٠

∴ $هـ^٢$ − ١٩ هـ + ٧٨ = ٠

أى أن هـ جذر للمعادلة : $س^٢$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠ وهى المعادلة المطلوبة.

ملاحظة

لا تستخدم الطريقة الثالثة إلا فى حالة أن تكون العلاقة بين الجذر الأول للمعادلة المطلوبة والجذر الأول للمعادلة المعطاة هى نفسها العلاقة بين الجذر الثانى للمعادلة المطلوبة والجذر الثانى للمعادلة المعطاة.

تذكر المتطابقات الآتية

١ $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ − ٢ ل م$

٢ $(ل − م)^٢ = (ل + م)^٢ − ٤ ل م$

٣ $ل^٣ + م^٣ = (ل + م) [(ل + م)^٢ − ٣ ل م]$

٤ $ل^٣ − م^٣ = (ل − م) [(ل + م)^٢ − ل م]$

٥ $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل} = \frac{ل + م}{ل م}$

٦ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م} = \frac{(ل + م)^٢ − ٢ ل م}{ل م}$

مثال ٣

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

[١] $ل^٢ + م^٢$ [٢] $ل^٢ + ٣ ل م + م^٢$ [٣] ل − م [٤] $ل^٣ - م^٣$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ ∴ $ل + م = ٧$ ، $ل م = ٩$

[١] $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = ٧^٢ - ٢ × ٩ = ٤٩ - ١٨ = ٣١$

[٢] $ل^٢ + ٣ ل م + م^٢ = (ل^٢ + ٢ ل م + م^٢) + ل م = (ل + م)^٢ + ل م = ٧^٢ + ٩ = ٤٩ + ٩ = ٥٨$

[٣] ∵ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م = ٧^٢ - ٤ × ٩ = ٤٩ - ٣٦ = ١٣$

∴ $ل - م = \sqrt{١٣}$ حيث ل > م

[٤] ∵ $ل^٣ - م^٣ = (ل - م) [(ل + م)^٢ - ل م]$ وبالتعويض من [٣] :

∴ $ل^٣ - م^٣ = \sqrt{١٣} [٧^٢ - ٩] = \sqrt{١٣} (٤٩ - ٩) = ٤٠ \sqrt{١٣}$

مثال ٤

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هما ل ، م فكوِّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $ل + م = ٨$ ، $ل م = ٥$

، ∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة. ∴ مجموع الجذرين $= \frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{م + ل}{ل م} = \frac{٨}{٥}$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{١}{ل} × \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - \frac{٨}{٥} س + \frac{١}{٥} = ٠$ أى $٥ س^٢ - ٨ س + ١ = ٠$

مثال ٥

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٩ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $ل + م = ٥$ ، $ل م = ٩$

، ∵ $ل^٢$ ، $م^٢$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين $= ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = ٥^٢ - ٢ × ٩ = ٧$

، حاصل ضرب الجذرين $= ل^٢ × م^٢ = (ل م)^٢ = ٩^٢ = ٨١$ ∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ٧ س + ٨١ = ٠$

مثال ٦

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^٢$ + ٥ س − ٧ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها : ل + $\frac{١}{م}$ ، م + $\frac{١}{ل}$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ ل + م = $\frac{-٥}{٣}$ ، ل م = $\frac{-٧}{٣}$

، ∵ ل + $\frac{١}{م}$ ، م + $\frac{١}{ل}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين = ل + $\frac{١}{م}$ + م + $\frac{١}{ل}$ = ل + م + $\frac{ل + م}{ل م}$

$= -\frac{٥}{٣} + \frac{-\frac{٥}{٣}}{-\frac{٧}{٣}} = -\frac{٥}{٣} + \frac{٥}{٧} = \frac{-٣٥ + ١٥}{٢١} = -\frac{٢٠}{٢١}$

، حاصل ضرب الجذرين = (ل + $\frac{١}{م}$) (م + $\frac{١}{ل}$) = ل م + $\frac{١}{ل م}$ + ٢

$= \frac{-٧}{٣} - \frac{٣}{٧} + ٢ = \frac{-٤٩ - ٩ + ٤٢}{٢١} = \frac{-١٦}{٢١}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - \frac{-٢٠}{٢١}$ س + $\frac{-١٦}{٢١}$ = ٠ **أى** ٢١ $س^٢$ + ٢٠ س − ١٦ = ٠

حاول بنفسك

إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − ٣ س − ١ = ٠ فكوِّن المعادلة التى جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$

مثال ٧

إذا كان $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٦ س + ٤ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م

الحل

∵ $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م}$ = ٤

∴ $\frac{٤}{ل م}$ = ٤ ∴ ل م = ١

، $\frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م}$ = ٦ ∴ $\frac{٢ ل + ٢ م}{ل م}$ = ٦

∴ $\frac{٢ (ل + م)}{١}$ = ٦ ∴ ل + م = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

، ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة ، ل + م = ٣ ، ل م = ١

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢$ − ٣ س + ١ = ٠

حاول بنفسك

إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة : ٦ $س^٢$ − ٥ س + ١ = ٠ فكوِّن المعادلة التى جذراها : ل ، م

مثال ٨

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$ فأوجد قيمة : ك

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ هما : ل ، م

∴ ل + م = ك ، ل م = ٤ ك

، ∵ الفرق بين ل ، م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$

∴ ل − م = −٣ ك

∵ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤$ ل م (من المتطابقات السابق ذكرها)

∴ $(-٣ ك)^٢ = ك^٢ - ٤ (٤ ك)$ ∴ $٩ ك^٢ = ك^٢ - ١٦ ك$

∴ $٨ ك^٢ + ١٦ ك = ٠$ ∴ ٨ ك (ك + ٢) = ٠ ∴ ك = ٠

أ، ك + ٢ = ٠ ومنها ك = −٢

حل آخر : (باستخدام قانون الفرق بين الجذرين) :

∵ $ل - م = \frac{\pm\sqrt{المميز}}{أ} = \pm\frac{\sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{أ}$

ومن المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ نجد أن :

$ل - م = \pm\sqrt{ك^٢ - ١٦ ك}$ (١)

، ∵ ل − م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$

∴ ل − م = −٣ ك (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\pm\sqrt{ك^٢ - ١٦ ك} = -٣ ك$ وبتربيع الطرفين.

∴ $ك^٢ - ١٦ ك = ٩ ك^٢$ ∴ $٨ ك^٢ + ١٦ ك = ٠$

∴ ك = ٠ ، أ، ك = −٢

لاحظ أنه

يمكن استنتاج قانون الفرق بين الجذرين من القانون العام بنفس الطريقة التى أوجدنا بها قانون مجموع الجذرين فى الدرس السابق.

حاول بنفسك

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^٢ + ك س + ٢ ك = ٠$ يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٦ س^٢ + ٥ س + ك = ٠$ فأوجد قيمة : ك



على تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها



اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها -١ وحاصل ضربهما -٣ هي ....

(أ) $س^{٢} - س - ٣ = ٠$ (ب) $س^{٢} + س + ٣ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - س + ٣ = ٠$ (د) $س^{٢} + س - ٣ = ٠$

(٢) المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، -٥ هي ....

(أ) $س^{٢} + ٢س - ١٥ = ٠$ (ب) $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - ٢س + ١٥ = ٠$ (د) $س^{٢} + ٢س + ١٥ = ٠$

(٣) 📖 المعادلة التربيعية التي جذراها -٢ ، ٣ هي ....

(أ) $(س - ٢)(س + ٣) = ٠$ (ب) $س^{٢} - ٤س + ٦ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - س = ٦$ (د) $٤س^{٢} - ٢س + ٣ = ٠$

(٤) المعادلة التربيعية التي جذراها : ٨ ، ٨ هي ....

(أ) $٢س = ١٦$ (ب) $(س + ٨)^{٢} = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ١٦س - ٦٤ = ٠$ (د) $س^{٢} - ١٦س + ٦٤ = ٠$

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية -٩ ، صفر فإن هذه المعادلة هي ....

(أ) $س + ٩ = ٠$ (ب) $(س - ٩)(س) = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ٩س = ٠$ (د) $س^{٢} + ٩س + ٩ = ٠$

(٦) المعادلة التربيعية التي جذراها : ت ، $-$ت هي ....

(أ) $س^{٢} - ١ = ٠$ (ب) $(س + ١)^{٢} = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ١ = ٠$ (د) $(س - ١)^{٢} = ٠$

(٧) 📖 المعادلة التربيعية التي جذراها -٢ت ، ٢ت هي ....

(أ) $س^{٢} = ٤ت$ (ب) $س^{٢} + ٤ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - ٤ = ٠$ (د) $ت س^{٢} + ٤ = ٠$

(٨) المعادلة التى جذراها : $\frac{٣}{٢}$ ت ، $\frac{٣}{٢}$ ت^{٣} هى ....

(أ) ٤ س^{٢} – ٩ = ٠ (ب) ٤ س^{٢} + ٩ = ٠

(جـ) ٩ س^{٢} – ٤ = ٠ (د) ٩ س^{٢} + ٤ = ٠

(٩) المعادلة التربيعية التى جذراها : ١ – ٥ ت ، ١ + ٥ ت هى ....

(أ) س^{٢} – ٢ س + ٢٦ = ٠ (ب) س^{٢} + ٢ س – ٢٦ = ٠

(جـ) س^{٢} – ٢ س – ٢٦ = ٠ (د) س^{٢} + ٢ س + ٢٦ = ٠

(١٠) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} – ٤ س + ١ = ٠

فإن قيمة المقدار : ل^{٢} – ٤ ل + ١ = ...

(أ) صفر (ب) –٤ (جـ) ١ (د) –١

(١١) إذا كان ل جذرًا للمعادلة : ٣ س^{٢} + ٤ س – ٥ = ٠ فإن : ٣ ل^{٢} + ٤ ل + ٥ = ...

(أ) صفر (ب) ١٠ (جـ) –٥ (د) ٥

(١٢) إذا كان ل أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + ٤ س + ٧ = ٠ فإن : (ل + ٢)^{٢} = ...

(أ) –١١ (ب) ١١ (جـ) ٣ (د) –٣

(١٣) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : س^{٢} – ٧ س + ٣ = ٠ فإن قيمة المقدار : ل^{٢} م + ل م^{٢} = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ١٠ (د) ٢١

(١٤) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} – ٧ س + ٣ = ٠ فإن : ل^{٢} + م^{٢} = ...

(أ) ٧ (ب) ٤٣ (جـ) ٥٨ (د) ٧٩

(١٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٨ س + حـ = ٠ وكان : ل^{٢} + م^{٢} = ٤٠

فإن : حـ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٧ س + ٩ = ٠ حيث ل > م

فإن : ل^{٣} – م^{٣} = ...

(أ) ٣١ (ب) ٦٣ (جـ) ٤٠ $\sqrt{١٣}$ (د) ٩ $\sqrt{٧}$

(١٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٥ س + ٧ = ٠ فإن : ل (م + ١) + م = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ١٢ (د) ٧

(١٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} – ٨ س + ٢ = ٠ فإن : $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$.

فإن المعادلة التي جذراها : ل + م ، ل م هي ....

(أ) $س^٢ - ١٠ س + ٢١ = ٠$.
(ب) $س^٢ + ١٠ س + ٢١ = ٠$.
(جـ) $س^٢ - ٢١ س + ١٠ = ٠$.
(د) $س^٢ - ٢١ س - ١٠ = ٠$.

(٢٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٣ = ٠$.

فإن المعادلة التي جذراها : ٢ ل ، ٢ م هي ....

(أ) $٢ س^٢ - ١٠ س + ٦ = ٠$.
(ب) $س^٢ - ١٠ س + ١٢ = ٠$.
(جـ) $٢ س^٢ - ١٠ س - ٦ = ٠$.
(د) $س^٢ + ١٠ س + ١٢ = ٠$.

(٢١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ - ٣ س - ٦ = ٠$.

فإن المعادلة التي جذراها $\frac{ل}{٤}$ ، $\frac{م}{٤}$ هي ....

(أ) $س^٢ - ٣ س - ٣ = ٠$.
(ب) $٤ س^٢ - ٦ س - ٣ = ٠$.
(جـ) $١٦ س^٢ + ٦ س - ٣ = ٠$.
(د) $١٦ س^٢ - ٦ س - ٣ = ٠$.

(٢٢) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ = ٠$.

فإن المعادلة التي جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$ هي ....

(أ) $س^٢ + ١١ س + ٤٩ = ٠$.
(ب) $س^٢ - ١١ س + ٤٩ = ٠$.
(جـ) $س^٢ - ٤٩ س + ١١ = ٠$.
(د) $س^٢ + ١١ س - ٤٩ = ٠$.

(٢٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٥ س + ٦ = ٠$ فإن المعادلة التي جذراها : ل - م ، م - ل هي ....

(أ) $س^٢ + س + ١ = ٠$.
(ب) $س^٢ + ١ = ٠$.
(جـ) $س^٢ - س + ١ = ٠$.
(د) $س^٢ - ١ = ٠$.

(٢٤) المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ٢ عن كل من جذرى المعادلة :
$س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ هي ....

(أ) $س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$.
(ب) $س^٢ + ٧ س + ١٢ = ٠$.
(جـ) $س^٢ - ٧ س + ١٢ = ٠$.
(د) $س^٢ - ٧ س - ١٢ = ٠$.

(٢٥) إذا كان : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ جذرى المعادلة : $٤ س^٢ + ٣ س = ٢$

فإن المعادلة التي جذراها ل ، م هي ....

(أ) $٣ س^٢ - ٨ س + ٣ = ٠$.
(ب) $س^٢ - ٣ س + ٨ = ٠$.
(جـ) $س^٢ - ٣ س - ٨ = ٠$.
(د) $٣ س^٢ + ٨ س - ٣ = ٠$.

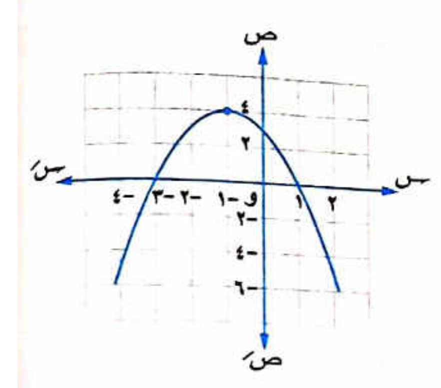
(٢٦) إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة : ٢ $س^٢$ + ب س + ٥٤ = ٠ فإن : −٣ $ل^٢$ − ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −٣ (جـ) −٥١ (د) ± ٣

(٢٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ $س^٢$ + ٣ س − ١ = ٠ فإن : ٤ $ل^٢$ + ٦ ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٨) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد فإن قاعدة الدالة يمكن كتابتها على الصورة ....



(أ) د (س) = − $س^٢$ − ٢ س + ٣

(ب) د (س) = − $س^٢$ + ٢ س + ٣

(جـ) د (س) = $س^٢$ + ٢ س + ٣

(د) د (س) = − $س^٢$ + ٢ س − ٣

(٢٩) المعادلات التربيعية التى معاملات حدودها أعداد حقيقية وأحد جذريها (٣ − ت) هى ....

(أ) $س^٢$ − ٦ س − ١٠ = ٠ (ب) ٢ $س^٢$ + ٦ س + ١٠ = ٠

(جـ) $س^٢$ − ٦ س + ١٠ = ٠ (د) $س^٢$ + ٦ س + ١٠ = ٠

(٣٠) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ − $\sqrt{٣}$ ، ٢ + $\sqrt{٣}$ هى ....

(أ) $س^٢$ + ٢ س + ٣ = ٠ (ب) $س^٢$ − ٤ س + ١ = ٠

(جـ) $س^٢$ − ٤ س + ٧ = ٠ (د) $س^٢$ + ٤ س − ١ = ٠

(٣١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢$ + ٤ س + ٥ = ٠

فإن المعادلة التى جذراها (٤ ل + ٥) ، (٤ م + ٥) هى ....

(أ) $س^٢$ + ١٦ س + ٢٥ = ٠ (ب) $س^٢$ + ٦ س + ٢٥ = ٠

(جـ) $س^٢$ − ١٦ س + ٢٥ = ٠ (د) $س^٢$ − ٦ س + ٢٥ = ٠

(٣٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢$ + ب س + جـ = ٠

فإن المعادلة التى جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هى ....

(أ) $س^٢$ + ب س + جـ = ٠ (ب) $س^٢$ + جـ س + ب = ٠

(جـ) جـ $س^٢$ + ب س + ١ = ٠ (د) جـ $س^٢$ + س + ب = ٠

(٣٣) إذا كان : ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : $س^٢$ + ٤ س + ٢ = ٠

فإن المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م هى ....

(أ) $س^٢$ + ٥ س + ٣ = ٠ (ب) $س^٢$ + ٥ س + ٥ = ٠

(جـ) $س^٢$ + ٤ س + ٣ = ٠ (د) $س^٢$ + ٦ س + ٧ = ٠

(٣٤) القيمة المطلقة للفرق بين جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٤ س + ٢ = ٠$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ (د) $\sqrt{٨}$

(٣٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٤ س + ٢ = ٠$.

فإن المعادلة التى جذراها $ل^{٢} - ٤ ل + ٧$ ، $٢ م^{٢} - ٨ م + ٩$ هى ....

(أ) $س^{٢} - ١٠ س + ٢٥ = ٠$ (ب) $س^{٢} - ٢٥ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ٢٥ = ٠$ (د) $س^{٢} - ٧ س - ٩ = ٠$

(٣٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٤ س + ٥ = ٠$.

فإن المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}$ ، $٤ م - ٥$ هى ....

(أ) $س^{٢} - ٥ س + ٤ = ٠$ (ب) $٥ س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - ٦ س + ٢٥ = ٠$ (د) $س^{٢} + ٥ س + ٤ = ٠$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

(١) -٢ ، ٤ (٢) ٧ ، ٧ (٣) -٧ ، صفر

(٤) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ (٥) $\frac{٣}{٥}$ ، $-٢\frac{١}{٥}$ (٦) $٥\sqrt{٣}$ ، $-٢\sqrt{٣}$

(٧) $٧ + ٢\sqrt{٥}$ ، $٧ - ٢\sqrt{٥}$ (٨) -٥ ت ، ٥ ت (٩) $١ - ٣$ ت ، $١ + ٣$ ت

(١٠) $٣ - ٢\sqrt{٢}$ ت ، $٣ + ٢\sqrt{٢}$ ت

(١١) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ ت}{١ - ت}$ (١٢) $\frac{-٢ + ٢ ت}{١ + ت}$ ، $\frac{-٢ - ٤ ت}{٢ - ت}$

(١٣) أ − ب ، أ + ب (١٤) $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ - ب}$ ، $\frac{أ^{٣} - ب^{٣}}{أ^{٢} + أ ب + ب^{٢}}$

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٧ س + ٥ = ٠$.

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) $ل^{٢} م + م^{٢} ل$ (٢) $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل}$

(٣) $(ل - ٢)(م - ٢)$ (٤) $(ل + \frac{١}{م})(م + \frac{١}{ل})$

«٣٥ ، $\frac{٧}{٥}$ ، -٥ ، $٧\frac{١}{٥}$»

٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٤ س + ٢ = ٠$ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) $ل^{٢} + م^{٢}$ (٢) ل − م (٣) $ل^{٣} + م^{٣}$

(٤) $ل^{٢} - ٤ ل + ٧$ (٥) $٢ م^{٢} - ٨ م + ١٥$

«١٢ ، $٢\sqrt{٢}$ ، ٤٠ ، ٥ ، ١١»

٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س − ٥ = ٠

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل − ٤ ، م − ٤

«س^{٢} + ٥ س − ١ = ٠»

٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ٥ س − ٧ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ١ − ل ، ١ − م

«٢ س^{٢} + س − ١٠ = ٠»

٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س − ٤ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

«٤ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠»

٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ٢ ل^{٢} ، ٢ م^{٢}

«٢ س^{٢} − ٢١ س + ٢ = ٠»

٨ 📖 كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة :

س^{٢} − ٧ س − ٩ = ٠

«س^{٢} − ٩ س − ١ = ٠»

٩ كوّن المعادلة التربيعية التى كل جذر من جذريها يساوى نصف نظيره من جذرى المعادلة :

٤ س^{٢} − ١٢ س + ٧ = ٠

«١٦ س^{٢} − ٢٤ س + ٧ = ٠»

١٠ 📖 كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة :

س^{٢} + ٣ س − ٥ = ٠

«س^{٢} − ١٩ س + ٢٥ = ٠»

١١ 📖 إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

«٢ س^{٢} + ١٣ س + ٢ = ٠»

١٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٢ س − ٤ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$

«١٦ س^{٢} − ١٢ س + ١ = ٠»

١٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٠

فكوّن المعادلة التى جذراها : $\frac{ل^{٢}}{م}$ ، $\frac{م^{٢}}{ل}$

«١٨ س^{٢} − ٣٥ س + ١٢ = ٠»

١٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ١٠ س^{٢} + ١٢ س − ١ = ٠

فكوّن المعادلة التى جذراها : ٢ ل + $\frac{١}{م}$ ، ٢ م + $\frac{١}{ل}$

«٥٠ س^{٢} − ٤٨ س − ٣٢ = ٠»

١٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٣ سـ − ٥ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ل^{٢} م ، م^{٢} ل «سـ^{٢} + ١٥ سـ − ١٢٥ = ٠»

---

١٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٣ سـ + ٥ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ٦ ، ل^{٢} + م^{٢} «سـ^{٢} − ٥ سـ − ٦ = ٠»

---

١٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٣ سـ − ١ = ٠ حيث ل > م

كوِّن المعادلة التى جذراها : ٣ ل − ٢ م ، ٢ ل − ٣ م «سـ^{٢} − ٥ $\sqrt{١٣}$ سـ + ٧٩ = ٠»

---

١٨ إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ جذرى المعادلة : سـ^{٢} − ١١ سـ + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م «سـ^{٢} − ٧ سـ − ١٥ = ٠»

---

١٩ إذا كان ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٥ سـ + ١١ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ل^{٢} م ، م^{٢} ل «سـ^{٢} + ٥ سـ + ١٢٥ = ٠»

---

٢٠ إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٣ سـ + ١ = ٠

كوِّن المعادلة التى جذراها : ل م − ٧ ، ل + م + ٣ «سـ^{٢} − ٣٦ = ٠»

---

٢١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٢ سـ − ٥ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ل^{٢} + م ، م^{٢} + ل «سـ^{٢} − ١٦ سـ + ٥٨ = ٠»

---

٢٢ إذا كان $\frac{٣}{ل}$ ، $\frac{٣}{م}$ هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ١٢ سـ + ٩ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$ «سـ^{٢} − ٥٢ سـ + ١ = ٠»

---

٢٣ إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : ٦ سـ^{٢} − ٧ سـ + ١ = حـ هو $\frac{١١}{٦}$

أوجد : قيمة حـ «٤»

---

٢٤ إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : ٣ سـ^{٢} − ٢ سـ + حـ = ٠ يساوى الفرق بين جذرى المعادلة : ٢ سـ^{٢} − حـ سـ + ٣ = ٠ **فأثبت أن :** ٩ حـ^{٢} + ٤٨ حـ − ٢٣٢ = ٠

---

٢٥ 📖 إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : سـ^{٢} + ك سـ + ٢ ك = ٠ يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : سـ^{٢} + ٣ سـ + ك = ٠ . **أوجد :** قيمة ك «٠ ، أ ، $\frac{-٨}{٣}$»

٢٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٤ س^{٢} – ٦ س + أ = ٠ وكان : ل^{٢} + م^{٢} = ٧ ل م

أوجد : قيمة أ «١»

٢٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٨ س + حـ = ٠ وكان : ل^{٢} + م^{٢} = ٤٠

فأوجد قيمة حـ العددية ، ثم كوِّن المعادلة التى جذراها : ل^{٢} م + م^{٢} ل ، ل م

«حـ = ١٢ ، س^{٢} – ١٠٨ س + ١١٥٢ = ٠»

٢٨ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٤ س – ٥ = ٠ حيث ل > م

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ل – ٧ ، ٢ م^{٢} + ١

«س^{٢} – س – ٦ = ٠»

اكتشف الخطأ

٢٩ إذا كان ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : س^{٢} + ٥ س + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها : ل ، م

حل يوسف

∵ (ل + ١) + (م + ١) = –٥

∴ ل + م + ٢ = –٥ ∴ ل + م = –٧

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ٣

∴ ل م + (ل + م) + ١ = ٣

∴ ل م – ٧ + ١ = ٣ ∴ ل م = ٩

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ٧ س + ٩ = ٠

حل أميرة

∵ ل + م = –٥ ، ل م = ٣

∴ (ل + ١) + (م + ١)

= ل + م + ٢ = –٥ + ٢ = –٣

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= ٣ – ٣ + ١ = ١

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التى جذراها بعدا مستطيل مساحته ١٥ سم^{٢} ومحيطه ٢٦ سم هى ....

(أ) س^{٢} – ٢٦ س + ١٥ = ٠

(ب) س^{٢} + ٢٦ س – ١٥ = ٠

(جـ) س^{٢} – ١٣ س – ١٥ = ٠

(د) س^{٢} – ١٣ س + ١٥ = ٠

(٢) إذا كان : أ^{٢} + ٣ أ + ١ = ٠ ، ب^{٢} + ٣ ب + ١ = ٠ حيث أ ، ب عددان حقيقيان مختلفان

فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٥- (د) ١١

(٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : (س - أ) (س - ب) = ك فإن المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى ....

(أ) (س - ل) (س - م) = ٠

(ب) (س - ل) (س - م) + ك = ٠

(جـ) (س - ل) (س - م) = ك

(د) س^{٢} - (ل + م) س + ك = ٠

(٤) لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م حيث ل ، م عددان حقيقيان يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) ل + م = ٥ فقط.

(ب) (ل + م + ٤)^{٢} + (ل م - ٣)^{٢} = صفر فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.

(٥) عمر وخالد يحاولان حل معادلة تربيعية ، أخطأ عمر فى كتابة الحد المطلق فى المعادلة فوجد أن جذرى المعادلة هما ٣ ، ٤ بينما أخطأ خالد فى كتابة معامل س فى المعادلة فوجد أن جذرى المعادلة هما ٢ ، ٣ فإن الجذرين الصحيحين للمعادلة هما ....

(أ) ٢ ، ٤ (ب) ٢- ، ٤- (جـ) ١ ، ٦ (د) ١- ، ٦-

(٦) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س^{٢} + ب س + حـ = ٠ عددين فرديين متتاليين

فإن : ب^{٢} - ٤ حـ = ...

(أ) ١- (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س^{٢} - ب س + حـ = ٠ عددين صحيحين مختلفين وكل من ب ، حـ عددًا أوليًا فأى من العبارات الآتية صحيحة ؟

① الفرق بين جذرى المعادلة عدد فردى.

② ب^{٢} - حـ عدد أولى.

③ ب + حـ عدد أولى.

(أ) ① فقط.

(ب) ① ، ③ فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط.

(د) كل ما سبق صحيح.

(٨) إذا قطع منحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ محور السينات فى س = ل ، س = م

حيث | ل − م | > ١ فإن : ....

(أ) د (ل + ١) > د (ل) > د (ل − ١)

(ب) د (ل − ١) > د (ل) > د (ل + ١)

(جـ) د (ل) > د (ل + ١) > د (ل − ١)

(د) د (ل + ١) × د (ل − ١) > ٠

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^٢ − (ظا θ) س − ١ = ٠ وكان : ل^٢ + م^٢ = ٣

حيث ٠° > θ > ٩٠° فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

---

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س^٢ + ٢ ب س + حـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، ل > م

وكان : ل − م = ٢

فأثبت أن : (١) ب^٢ = أ (أ + حـ) (٢) ل = ١ − $\frac{ب}{أ}$

---

٣ إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

يساوى ضعف مجموع معكوسيهما الضربيين أثبت أن : حـ^٢ (ب^٢ − ٤ أ حـ) = ٤ أ^٢ ب^٢

الدرس 5

إشارة الدالة



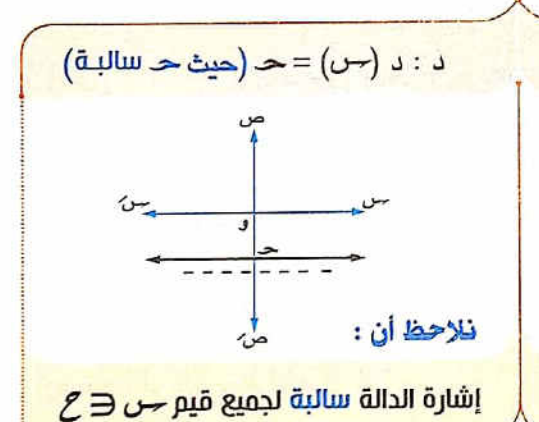
بحث إشارة الدالة

المقصود ببحث إشارة الدالة د فى المتغير س هو تحديد قيم س التى تكون عندها قيم الدالة على النحو التالى :

- موجبة أى : د (س) > ٠
- سالبة أى : د (س) < ٠
- مساوية للصفر أى : د (س) = ٠

أولًا إشارة الدالة الثابتة

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

د : د (س) = حـ (حيث حـ موجبة)	د : د (س) = حـ (حيث حـ سالبـة)
نلاحظ أن :	 نلاحظ أن :
إشارة الدالة موجبة لجميع قيم س ∈ ح	إشارة الدالة سالبة لجميع قيم س ∈ ح

مما سبق نستنتج أن :

- إشارة الدالة الثابتة د : د (س) = حـ ، حـ ∈ ح* هى نفس إشارة حـ لجميع قيم س ∈ ح

فمثلًا

- إذا كانت د (س) = ٥ فإن إشارة الدالة د تكون موجبة لجميع قيم س ∈ ح
- وإذا كانت د (س) = −٣ فإن إشارة الدالة د تكون سالبة لجميع قيم س ∈ ح

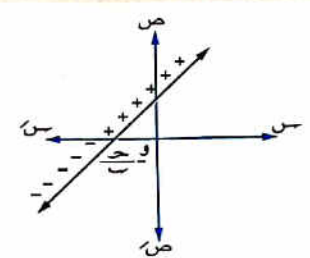
حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين : [١] د : د (س) = ١٠ [٢] د : د (س) = $-\frac{٢}{٥}$

ثانيًا إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

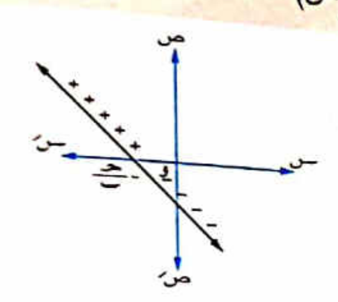
د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب موجبة)



نلاحظ أن إشارة الدالة :

- مثل إشارة ب (موجبة) عندما س > $-\frac{حـ}{ب}$
- مخالفة لإشارة ب (سالبة) عندما س < $-\frac{حـ}{ب}$
- مساوية للصفر عندما س = $-\frac{حـ}{ب}$

د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب سالبة)



نلاحظ أن إشارة الدالة :

- مثل إشارة ب (سالبة) عندما س > $-\frac{حـ}{ب}$
- مخالفة لإشارة ب (موجبة) عندما س < $-\frac{حـ}{ب}$
- مساوية للصفر عندما س = $-\frac{حـ}{ب}$

مما سبق نستنتج أنه :

لإيجاد إشارة الدالة الخطية د : د (س) = ب س + حـ ، ب ≠ ٠

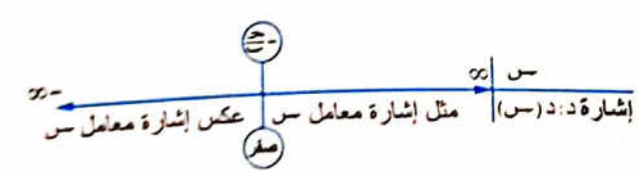
نضع د (س) = ٠ ∴ ب س + حـ = ٠ ∴ س = $\frac{-حـ}{ب}$

- فتكون إشارة الدالة د :

[١] مثل إشارة ب عندما س > $\frac{-حـ}{ب}$ [٢] عكس إشارة ب عندما س < $\frac{-حـ}{ب}$

[٣] د (س) = ٠ عندما س = $\frac{-حـ}{ب}$

- ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :



مثال ١

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين مع التوضيح على خط الأعداد :

١ د : د (س) = ٣ س + ٦ ٢ د : د (س) = ١ - $\frac{١}{٢}$ س

الحل

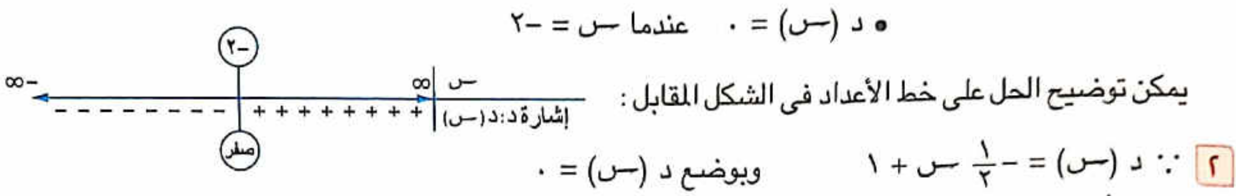
١ ∵ د (س) = ٣ س + ٦ وبوضع د (س) = ٠

∴ ٣ س + ٦ = ٠ ∴ س = -٢

∴ إشارة الدالة د تكون : • موجبة عندما س > -٢ • سالبة عندما س < -٢

• د (س) = ٠ عندما س = -٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد فى الشكل المقابل :



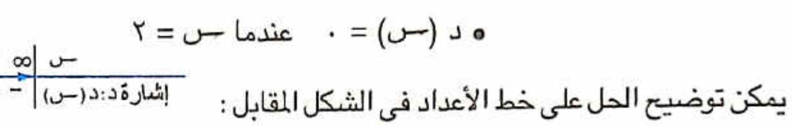
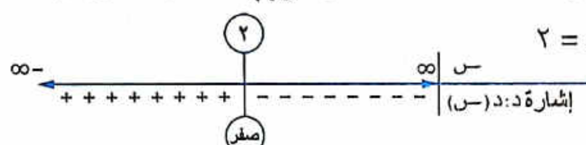
٢ ∵ د (س) = -$\frac{١}{٢}$ س + ١ وبوضع د (س) = ٠

∴ -$\frac{١}{٢}$ س = -١ ∴ س = ٢

∴ إشارة الدالة د تكون : • سالبة عندما س > ٢ • موجبة عندما س < ٢

• د (س) = ٠ عندما س = ٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد فى الشكل المقابل :

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

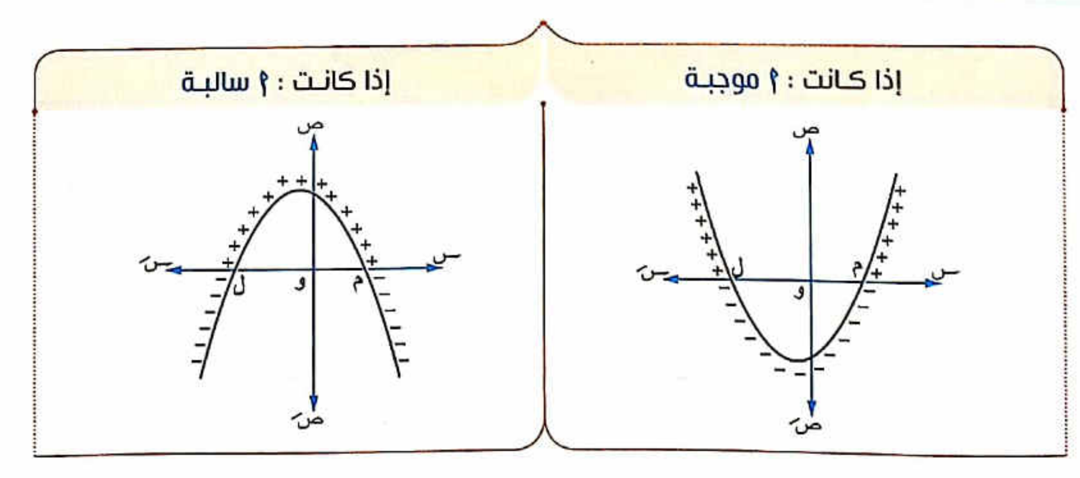
١ د : د (س) = -٣ س + ٦ ٢ د : د (س) = ٢ + $\frac{١}{٢}$ س

ثالثًا إشارة دالة الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، أ ≠ ٠ .

فإننا نوجد مميز المعادلة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ وتوجد ثلاث حالات :

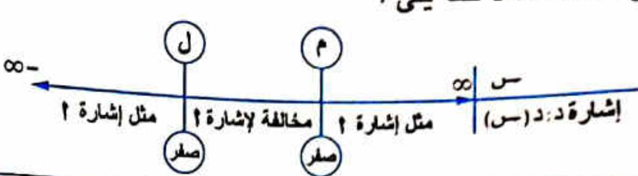
١ **المميز ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠** فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيان نفرض أنهما ل ، م حيث ل < م :



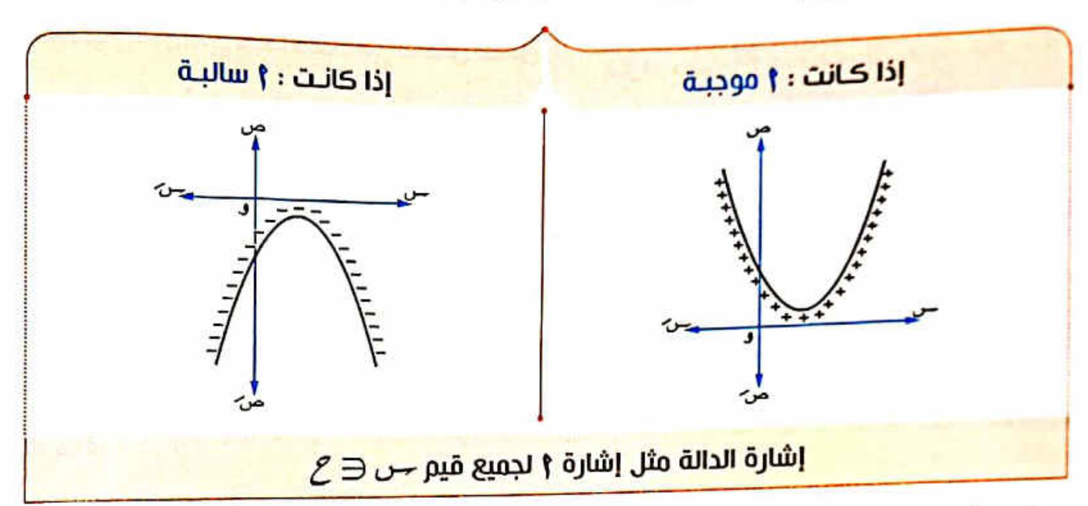
وتكون إشارة الدالة كما يلي :

- مثل إشارة أ عندما س ∈ ع − [ل ، م]
- مساوية للصفر عندما س ∈ {ل ، م}
- مخالفة لإشارة أ عندما س ∈]ل ، م[

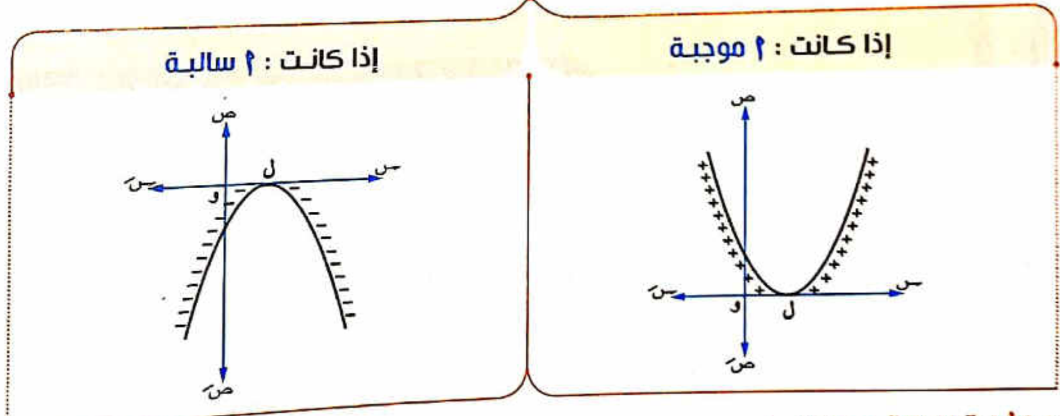
ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :



٢ المميز $ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠$ فإنه لا توجد للمعادلة جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة كما يلي :



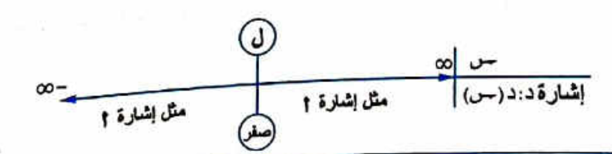
٣ المميز $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٠$ فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ، وليكن كل منهما يساوى ل :



وتكون إشارة الدالة كما يلي :

- مثل إشارة أ عندما س ≠ ل
- مساوية للصفر عندما س = ل

ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :

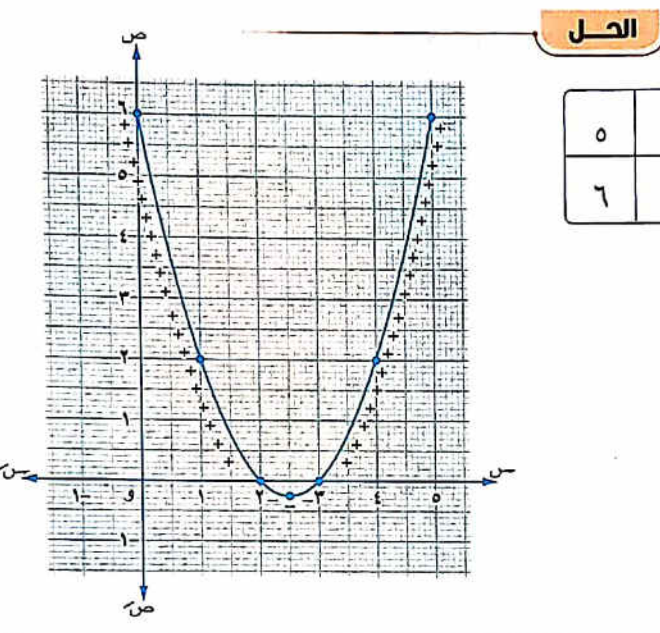


مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ فى الفترة [٠ ، ٥] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

الحل

س	٠	١	٢	٢,٥	٣	٤	٥
د (س)	٦	٢	٠	−٠,٢٥	٠	٢	٦



ومن الرسم نلاحظ أن إشارة د تكون :

- موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

ملاحظة

إذا طُلب بحث إشارة الدالة فى الفترة المعطاة فإن إشارة د تكون :

- موجبة عندما س ∈ [٠ ، ٢[∪]٣ ، ٥] أى [٠ ، ٥] − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

تذكر أن :

فى المثال السابق :

- مجال الدالة د هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح
- مدى الدالة د هو [−٠,٢٥ ، ∞[
- نقطة رأس المنحنى هى (٢,٥ ، −٠,٢٥) وتكون للدالة عندها قيمة صغرى وهى −٠,٢٥
- معادلة محور تماثل المنحنى هى : س = ٢,٥

مثال ٣

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٤ فى الفترة [٠ ، ٤] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

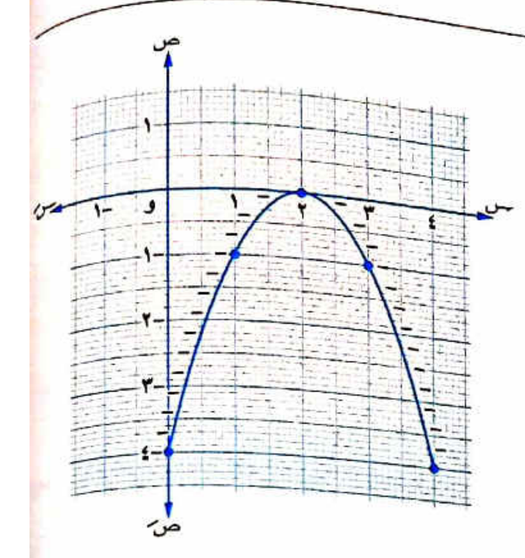
الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	−٤	−١	٠	−١	−٤



ومن الرسم نلاحظ أن :

- د (س) = ٠ عندما س = ٢
- إشارة الدالة د سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

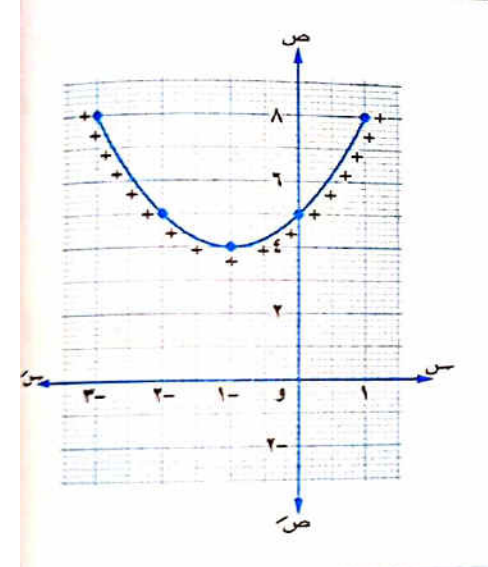


مثال ٤

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٥ فى الفترة [−٣ ، ١] ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د فى ح

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١
د (س)	٨	٥	٤	٥	٨



ومن الرسم نلاحظ أن :

إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ فى الفترة [−٢ ، ٤]

ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د فى ح

مثال ٥

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

١ د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

٢ د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٥

٣ د : د (س) = ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩

٤ د : د (س) = ٩ + ٢ س − س^{٢}

الحــل

١ ∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٤ - ٤ × ١ × (-٣) = ٤ + ١٢ = ١٦$ (> صفر)

∴ المعادلة : $س^٢ + ٢ س - ٣ = ٠$ لها جذران.

وبالتحليل ∴ $(س + ٣)(س - ١) = ٠$ ∴ $س = -٣$ أ، $س = ١$

، ∵ أ (معامل $س^٢$) = ١ > ٠ .

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

- موجبة عندما $س ∈ ح - [-٣ ، ١]$
- سالبة عندما $س ∈]-٣ ، ١[$
- $د(س) = ٠$ عندما $س ∈ \{-٣ ، ١\}$

٢ ∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٩ - ٤ × ١ × ٥ = ٩ - ٢٠ = -١١$ (< صفر)

∴ المعادلة : $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ = ١ > ٠ .

∴ **إشارة الدالة د موجبة لكل $س ∈ ح$**

٣ ∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = ١٤٤ - ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ - ١٤٤ = ٠$.

∴ المعادلة : $٤ س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠$ لها جذران متساويان.

وبالتحليل ∴ $(٢ س - ٣)^٢ = ٠$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠ .

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

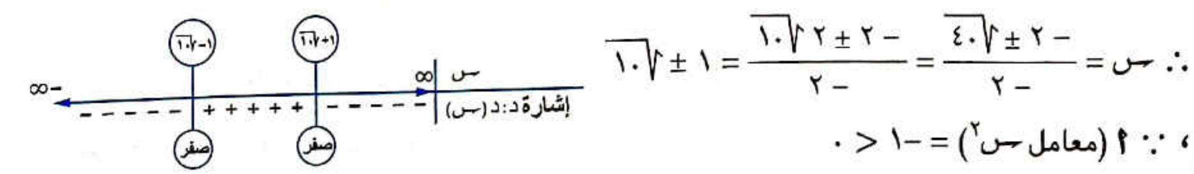
- موجبة عندما $س ∈ ح - \{\frac{٣}{٢}\}$
- $د(س) = ٠$ عندما $س = \frac{٣}{٢}$

٤ ∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٤ - ٤ × (-١) × ٩ = ٤٠$ (> صفر)

∴ المعادلة : $٩ + ٢ س - س^٢ = ٠$ لها جذران وباستخدام القانون العام :

∴ $س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤٠}}{-٢} = \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{١٠}}{-٢} = ١ \pm \sqrt{١٠}$

، ∵ أ (معامل $س^٢$) = -١ < ٠ .



∴ **إشارة الدالة د تكون :**

• سالبة عندما سـ ∈ ح − [١ − √١٠ ، ١ + √١٠]   • موجبة عندما سـ ∈]١ − √١٠ ، ١ + √١٠[

• د (سـ) = ٠ عندما سـ ∈ {١ − √١٠ ، ١ + √١٠}

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدوال الآتية :

[١] د : د (سـ) = سـ^{٢} − سـ − ٦   [٢] د : د (سـ) = − سـ^{٢} − ٤ سـ − ٤

[٣] د : د (سـ) = سـ^{٢} − ٤ سـ + ٥

مثال ٦

إذا كانت د : د (سـ) = سـ − ١ ، ر : ر (سـ) = سـ^{٢} + سـ − ٦

فأوجد الفترة التى تكون فيها د ، ر موجبتين معًا ، وكذلك الفترة التى تكون فيها د ، ر سالبتين معًا.

الحل

∵ د (سـ) = سـ − ١   ∴ د (سـ) = صفر عندما سـ = ١

، د تكون موجبة عندما سـ > ١   أى فى الفترة]١ ، ∞[

، د تكون سالبة عندما سـ < ١   أى فى الفترة]− ∞ ، ١[

، ∵ ر (سـ) = سـ^{٢} + سـ − ٦ نوجد جذرى المعادلة : سـ^{٢} + سـ − ٦ = ٠ كما يلى :

(سـ − ٢) (سـ + ٣) = ٠   ∴ سـ = ٢ أ، سـ = −٣   ∴ ر (سـ) = ٠ عندما سـ ∈ {٢ ، −٣}

، ر تكون موجبة عندما سـ ∈ ح − [−٣ ، ٢] ، ر تكون سالبة عندما سـ ∈]−٣ ، ٢[

بملاحظة الشكل المقابل نجد أن :

إشارة د	∞ + + + + + + + +	١	− − − − − − −	−∞
إشارة ر	+ + + + + +	٢	− − − − − −	−٣	+ + + +

• د ، ر موجبتان معًا فى الفترة]٢ ، ∞[

وهى الفترة التى تعبر عن :]١ ، ∞[∩ ح − [−٣ ، ٢]

• د ، ر سالبتان معًا فى الفترة]−٣ ، ١[وهى الفترة التى تعبر عن :]− ∞ ، ١[∩]−٣ ، ٢[

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين د$_{١}$ ، د$_{٢}$: د$_{١}$ (سـ) = ٢ − سـ ، د$_{٢}$: د$_{٢}$ (سـ) = سـ^{٢} − ٩ سـ + ١٨

ومتى تكون إشارتاهما سالبتين معًا ؟

مثال ٧

أثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح يكون جذرا المعادلة : $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$ حقيقيين مختلفين.

الحل

∵ $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$.

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ك ، حـ = ك - ٢

∴ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = (٢ ك)^٢ - ٤ (ك - ٢) = ٤ ك^٢ - ٤ ك + ٨$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

ولذلك سنبحث إشارة الدالة د : د (ك) = $٤ ك^٢ - ٤ ك + ٨$ كما يلى :

∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = (-٤)^٢ - ٤ × ٤ × ٨ = ١٦ - ١٢٨ = -١١٢$ (< صفر)

∴ المعادلة : $٤ ك^٢ - ٤ ك + ٨ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ح

وبالتالى فإن مميز المعادلة : $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$ موجب لجميع قيم س ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$ حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ح

حل آخر:

∵ مميز المعادلة : $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$ هو : $٤ ك^٢ - ٤ ك + ٨$

، ∵ $٤ ك^٢ - ٤ ك + ٨ = ٤ ك^٢ - ٤ ك + ١ + ٧ = (٢ ك - ١)^٢ + ٧$ وهو مقدار موجب لكل ك ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : $س^٢ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠$ حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ح

استخدام التكنولوجيا

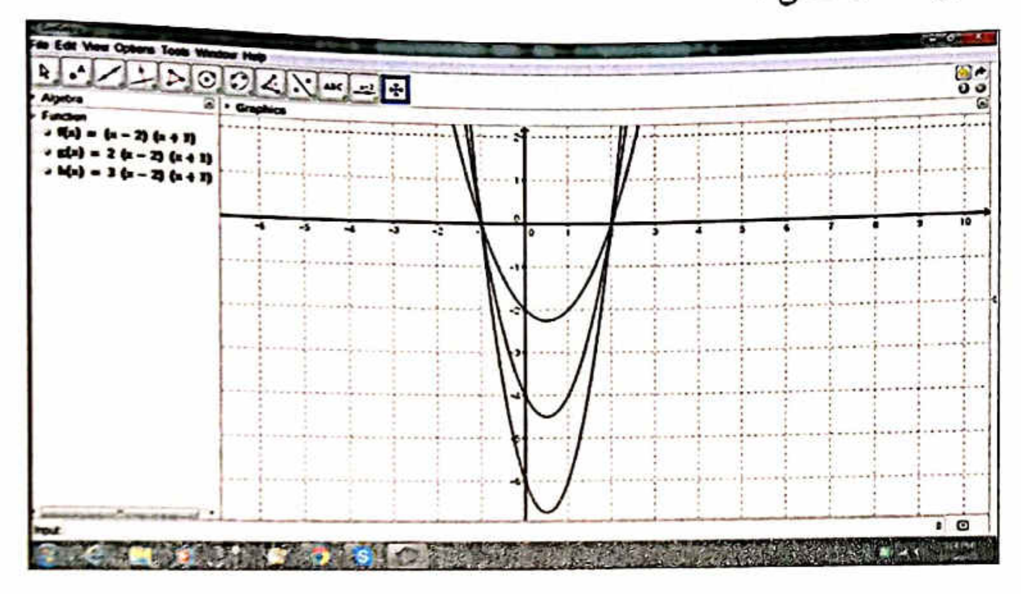
باستخدام برنامج GeoGebra ارسم فى شكل واحد الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = (س − ٢) (س + ١)

٢ ر (س) = ٢ (س − ٢) (س + ١)

٣ ك (س) = ٣ (س − ٢) (س + ١)

سوف تحصل على الشكل التالى :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأعلى ويقطع كل منها محور السينات فى النقطتين (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠) وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هى {٢ ، −١}

- حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

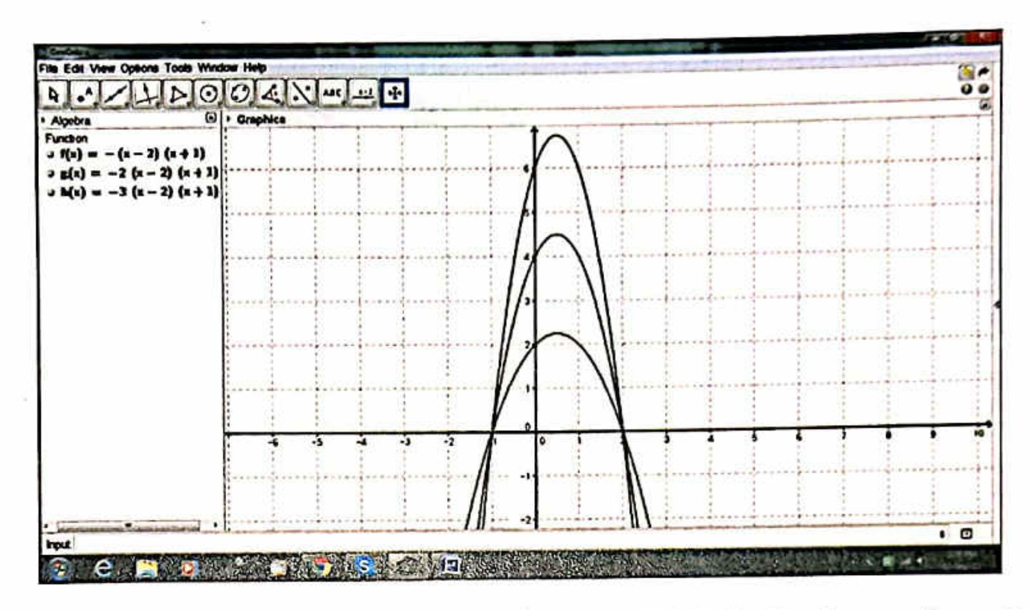
أيضًا باستخدام نفس البرنامج ارسم فى شكل واحد الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = − (س − ٢) (س + ١)

٢ ر (س) = −٢ (س − ٢) (س + ١)

٣ ك (س) = −٣ (س − ٢) (س + ١)

سوف تحصل على الشكل التالى :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأسفل ويقطع كل منها محور السينات فى نفس النقطتين السابقتين (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠) وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هى نفس مجموعة الحل السابقة {٢ ، −١}

- حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

استنتاج :

إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية فإنه يمكن كتابة قاعدة الدالة المرتبطة بالمعادلة التربيعية على الصورة :

د (س) = أ (س − ل) (س − م) حيث أ ∈ ح − {٠}

ويكون : • المنحنى مفتوحًا لأعلى إذا كانت : أ > ٠

• المنحنى مفتوحًا لأسفل إذا كانت : أ < ٠

تمارين 5





اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = -٤ تكون سالبة في الفترة ....

(أ)]-∞ ، ٤[فقط (ب)]-٤ ، ٤[فقط (جـ)]-∞ ، ∞[(د)]-٢ ، ٢[فقط

(٢) الدالة د : د (س) = ٥ س - ٣ تكون موجبة عندما ....

(أ) س > $\frac{٣}{٥}$ (ب) س < $\frac{٣}{٥}$ (جـ) س > $\frac{١}{٢}$ (د) س < $\frac{٥}{٣}$

(٣) إذا كانت : د (س) = ٢ س - ٤ فإن : د تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]-∞ ، ٢]

(٤) إشارة الدالة د : د (س) = ٦ - ٢ س تكون غير موجبة عند ....

(أ) س > ٣ (ب) س ≤ ٣ (جـ) س < ٣ (د) س ≥ ٣

(٥) الدالة د حيث د (س) = ٣ - $\frac{١}{٢}$ س تكون غير سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]-∞ ، ٦] (ب)]-∞ ، ٦[(جـ) [٦ ، ∞[(د)]٦ ، ∞[

(٦) إذا كانت : د (س) = س + ٢ حيث س ∈]-٤ ، ٣[فإن : د تكون موجبة عندما س ∈ ....

(أ)]-∞ ، -٢[(ب)]-٢ ، ∞[(جـ)]-٤ ، -٢[(د)]-٢ ، ٣[

(٧) إذا كانت : د (س) = س + ٣ ، س ∈]-٥ ، ٦[

فإن : د (س) تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]-٥ ، -٣[(ب)]-∞ ، -٣[(جـ)]-٣ ، ∞[(د)]-٣ ، ٦[

(٨) الدالة د : د (س) = أ لها إشارة .... دائمًا.

(أ) موجبة (ب) سالبة (جـ) مثل إشارة س (د) مثل إشارة أ

(٩) إشارة الدالة د حيث د (س) = أ س + ب على ح تكون مثل إشارة ب إذا كان ....

(أ) أ = ب (ب) أ = ٠ (جـ) أ > ٠ (د) أ < ٠

(١٠) الدالة د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة في ح عندما ....

(أ) $ب^٢$ − ٤ أ جـ > ٠ (ب) $ب^٢$ − ٤ أ جـ < ٠ (جـ) $ب^٢$ − ٤ أ جـ = ٠ (د) $ب^٢$ − ٤ أ جـ ≥ ٠

(١١) إذا كانت : د (س) = ٣ س فإن : إشارة الدالة تكون سالبة في الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٣[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]−٣ ، ∞[

(١٢) الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٩ سالبة لكل س ∈ ....

(أ) ح − [−٣ ، ٣] (ب)]−٣ ، ٣[(جـ)]−∞ ، −٩[(د)]−∞ ، −٣[

(١٣) الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ١ تكون موجبة لكل س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[فقط (ب)]١ ، ∞[فقط (جـ)]−∞ ، ١[فقط (د) ح

(١٤) الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٦ س + ٩ موجبة في الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٣] (جـ) ح − {٣} (د) ح − {٠}

(١٥) الفترة التي تكون فيها الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٥ س + ٦ موجبة هي ....

(أ) [٢ ، ٣] (ب) ح − {٢ ، ٣} (جـ) ح − [٢ ، ٣] (د) ح −]٢ ، ٣[

(١٦) إذا كانت : د (س) موجبة لكل س ∈]−٢ ، ٥[فإن : د (س) = ...

(أ) $س^٢$ − ٣ س − ١٠ (ب) ١٠ − ٣ س − $س^٢$

(جـ) $س^٢$ + ٣ س − ١٠ (د) ١٠ + ٣ س − $س^٢$

(١٧) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ب س + جـ سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

فإن حاصل ضرب جذري المعادلة : $س^٢$ + ب س + جـ = صفر يساوي ....

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ب (د) − جـ

(١٨) إشارة الدالتين المعرفتين بالقاعدتين : د (س) = (س − ١) (س + ٢)

، ر (س) = − $س^٢$ + ٩ يكونا موجبتين معًا عندما س ∈ ....

(أ)]١ ، ٣[∪]−٣ ، −٢[(ب)]−٢ ، ٠[

(جـ)]٣ ، ∞[∪]−∞ ، −٣[(د)]−٣ ، ٣[

(١٩) إشارة الدالتين د ، ر حيث د (س) = س − ٢ ، ر (س) = ٤ − $س^٢$ تكونان سالبتين معًا في الفترة ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، −٢[(جـ)]−٢ ، ٢[(د)]−∞ ، −٢]

(٢٠) إذا كانت الدالة د : د(س) = أ س² + ب س + حـ وكانت : أ < ٠ وجذرا د(س) = ٠ هما ٢ ، -٥

فإن الدالة د تكون موجبة فى الفترة ....

(أ) {-٥ ، ٢} (ب) ح -]-٥ ، ٢[(جـ)]-٥ ، ٢[(د)]-∞ ، -٥[

(٢١) لبحث إشارة الدالة د يكون كافيًا إذا علم أن ....

(أ) منحنى الدالة د يوازى محور السينات فقط.

(ب) منحنى الدالة د يقع بأكمله تحت محور السينات فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.

(٢٢) إذا كانت : د(س) = أ س + ب وكان : س = ل جذرًا للمعادلة د(س) = ٠

فإن : د(ل + ١) × د(ل - ١) ∈ ....

(أ) ح⁺ (ب) ح⁻ (جـ) [-١ ، ١] (د) [-٥ ، ٥]

(٢٣) أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∈ ح ؟

(أ) د : د(س) = س² + ٤ (ب) د : د(س) = ٣

(جـ) د : د(س) = (س - ١)² + ٩ (د) كل ما سبق.

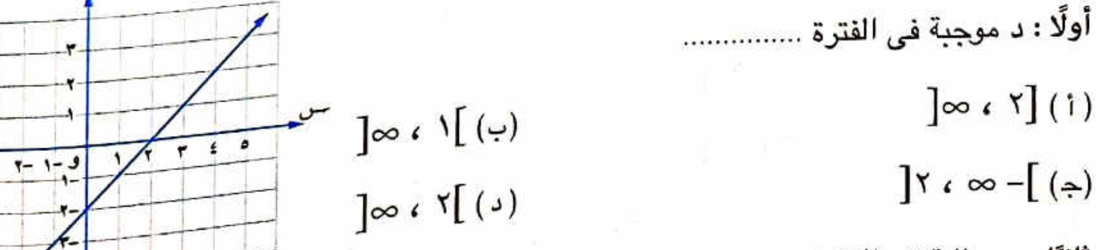
(٢٤) الدالة د : د(س) = ١٢ + ٤ س - س² تكون غير سالبة فى الفترة ....

(أ)]-٢ ، ٦[(ب) [-٢ ، ٦] (جـ) ح -]-٢ ، ٦[(د)]-∞ ، ∞[

(٢٥) الدالة د حيث د(س) = -(س - ١)(س + ٢) موجبة فى الفترة ....

(أ)]١ ، ٢[(ب) [-١ ، ٢] (جـ)]-٢ ، ١[(د)]-∞ ، ∞[

(٢٦) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الأولى فى س :



أولًا : د موجبة فى الفترة ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٢[(د)]٢ ، ∞[

ثانيًا : د سالبة فى الفترة ....

(أ)]-∞ ، ٢] (ب)]-٢ ، ٢] (جـ)]-∞ ، ٢[(د)]٢ ، ∞[

(٢٧) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الثانية فى س :

أولًا : د (س) = ٠ عندما س ∈ ....

(أ) ح　　(ب) ط

(جـ) [-١ ، ٣]　　(د) {٣ ، -١}

ثانيًا : د (س) > ٠ عندما س ∈ ....

(أ)]-١ ، ٣[　　(ب) [-١ ، ٣]　　(جـ) ح - [-١ ، ٣]　　(د) ح

ثالثًا : د (س) < ٠ عندما س ∈ ....

(أ)]-١ ، ٣[　　(ب) [-١ ، ٣]　　(جـ) ح - [-١ ، ٣]　　(د) ح

(٢٨) إذا كانت : د (س) = (س - أ)^{٢}　فإن : د (أ + ١) × د (أ - ١) ∈ ....

(أ) ح$^{-}$　　(ب) ح$^{+}$　　(جـ) [-١ ، ١]　　(د)]-١ ، ١[

(٢٩) إذا كان جذرا المعادلة : د (س) = ٠ هما ل ، م حيث د دالة تربيعية ، ل > م

فإن : د (ل + ١) × د (م - ١) ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[　　(ب)]-∞ ، ٠[　　(جـ) [-١ ، ١]　　(د) {٠}

(٣٠) إذا كان ل هو جذر المعادلة : د (س) = ٠ حيث د (س) = أ س + ب

فإن : د (ل + ١) × د (ل + ٣) ∈ ....

(أ) ح　　(ب) ح$^{+}$　　(جـ) ح$^{-}$　　(د)]٠ ، ∞[

(٣١) إذا كان منحنى الدالة د حيث د دالة خطية يقطع محور السينات فى (٣ ، ٠)

فإن أى من العبارات التالية يكون صحيح دائمًا ؟

(أ) د (٢) > د (٣)　　(ب) د (٤) > د (٣)

(جـ) د (٢) × د (٤) < د (٣)　　(د) د (٢) × د (٤) > د (٣)

(٣٢) إشارة الدالة د : د (س) = (س - ٣)^{٢} تكون غير سالبة فى ....

(أ) {٣} فقط　　(ب)]٣ ، ∞[فقط　　(جـ) ح　　(د) ∅

(٣٣) إذا كانت د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ وكانت أ > ٠ وجذرا المعادلة د (س) = ٠ هما -٢ ، ١

فإن الدالة د تكون غير موجبة عند س ∈ ....

(أ) {-٢ ، ١}　　(ب)]-٢ ، ١[　　(جـ) [-٢ ، ١]　　(د) ح - [-٢ ، ١]

(٣٤) الدالة د : د $(س) = أ^٢ س^٢ + ح$ حيث أ ≠ ٠ ، ح > ٠ لها إشارة .... دائمًا.

(أ) سالبة (ب) موجبة

(جـ) مثل إشارة س (د) مثل إشارة أ

(٣٥) الدالة د : د $(س) = س^٢ - ٦ س + ٩$ سالبة فى ....

(أ) {٣} (ب) ح − {٣} (جـ)]٣ ، ∞[(د) ∅

(٣٦) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تكون موجبة فى ح ما عدا ....

(أ) د (س) = ٣ (ب) د (س) = س + ٣

(جـ) د $(س) = س^٢ - ٣ س + ٣$ (د) د $(س) = س^٢ + س + ٣$

(٣٧) إذا كانت القيمة الصغرى للدالة التربيعية ص = د (س) هى ٣ فإن الدالة تكون سالبة عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) {٣} (د)]٣ ، ∞[

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عيِّن إشارة كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) = (س − ٢) (س + ٣)

(٢) د $(س) = (٢ س - ٣)^٢$

(٣) د $(س) = ٢ س^٢ + ٥ س - ٧$

(٤) د $(س) = س^٢ - ٤ س + ٣$

(٥) د $(س) = س^٢ - ٨ س + ١٦$

(٦) د $(س) = ٢ س^٢ - ٣ س + ٥$

(٧) د $(س) = ٤ س - ٧ - س^٢$

(٨) د $(س) = ٩ - ٤ س^٢$

(٩) د $(س) = ٢ س^٢$

٢ ارسم منحنى الدالة د : د $(س) = ٢ س^٢ - ٨$ فى الفترة [−٢ ، ٢] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى ح

٣ ارسم منحنى الدالة د : د $(س) = ٢ س^٢ - ٣ س + ٤$ فى الفترة [−١ ، ٢ $\frac{١}{٢}$]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى ح

٤ ارسم منحنى الدالة د : د $(س) = - س^٢ + ٨ س - ١٥$ متخذًا الفترة [١ ، ٧]

ومن الرسم بيِّن إشارة الدالة د فى ح وكذلك مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ .

{٣ ، ٥}

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٩ فى الفترة [−٣ ، ٤]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٢ س + ٤ فى الفترة [−٣ ، ٥]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

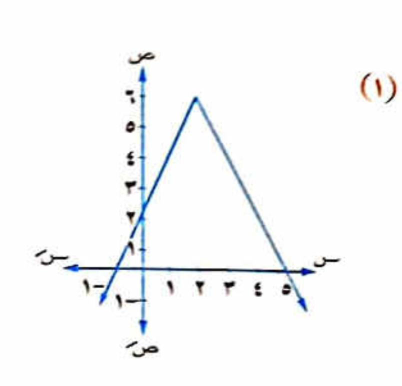
٧ ابحث إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د : [−١ ، ٦] ⟵ ح حيث د (س) = ٣ − س

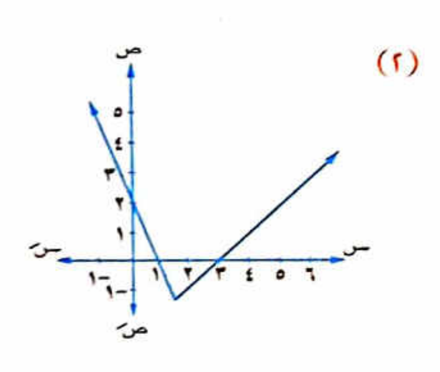
(٢) د : [−٢ ، ٨] ⟵ ح حيث د (س) = س^{٢} − ٥ س − ٦

٨ ابحث إشارة كل من الدالتين الممثلتين فى الشكلين التاليين :

(١)



(٢)



٩ عيِّن إشارة كل من الدالتين د : د (س) = س − ٣ ، ر : ر (س) = س^{٢} − ٥ س − ٦

ومتى تكون إشارتاهما موجبتين معًا ؟

١٠ إذا كانت : د$_{١}$ (س) = س − ٣ ، د$_{٢}$ (س) = ٥ + ٤ س − س^{٢} ابحث إشارة كل من :

د$_{١}$ ، د$_{٢}$ على خط الأعداد وعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان سالبتين معًا.

١١ إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ ، ر (س) = ٢ س^{٢} − ٥ س − ١٨

فبيِّن متى تكون الدالتان د ، ر موجبتين معًا أو سالبتين معًا.

١٢ أثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة :

٢ س^{٢} − ك س + ك − ٣ = صفر حقيقيين مختلفين.

اكتشف الخطأ

١٣ إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ − س^{٢}

فعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

إجابة يوسف

س = −١ تجعل د (س) = ٠.

د (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠.

ر (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]−١ ، ∞[∪]−١ ، ١[=]−١ ، ∞[

إجابة أميرة

س = −١ تجعل د (س) = ٠

د (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠

ر (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]−١ ، ∞[∩]−١ ، ١[=]−١ ، ١[

أى الإجابتين تكون صحيحة ؟ مثل كلًا من الدالتين بيانيًا وتأكد من صحة الإجابة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ ادرس إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د : د (س) = −٢ س^{٢} − ٢ $\sqrt{٢}$ س − ١

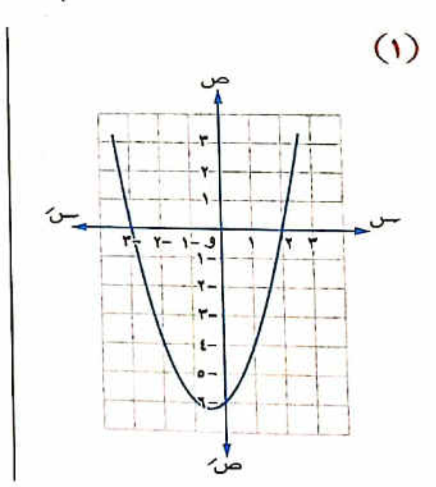
(٢) د : د (س) = س + (س + ١) (٢ س + ٣) − ٤ (س + ١) + ١

---

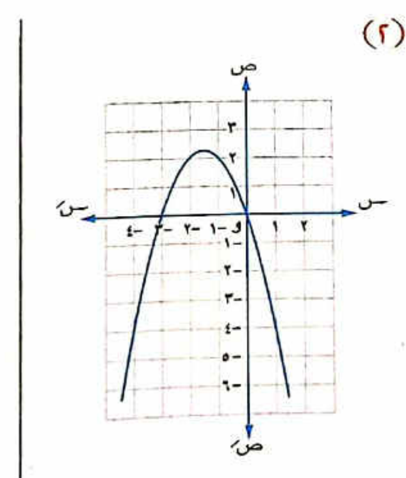
٢ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

ادرس إشارة كل دالة فى ح ، ثم أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال :

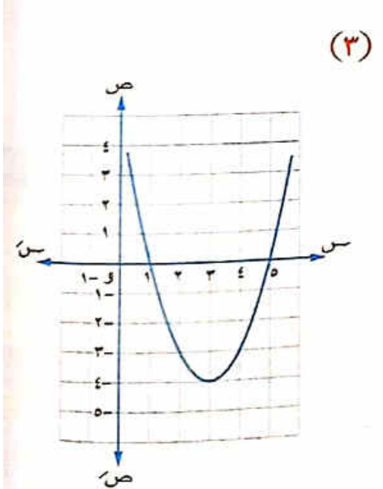
(١)



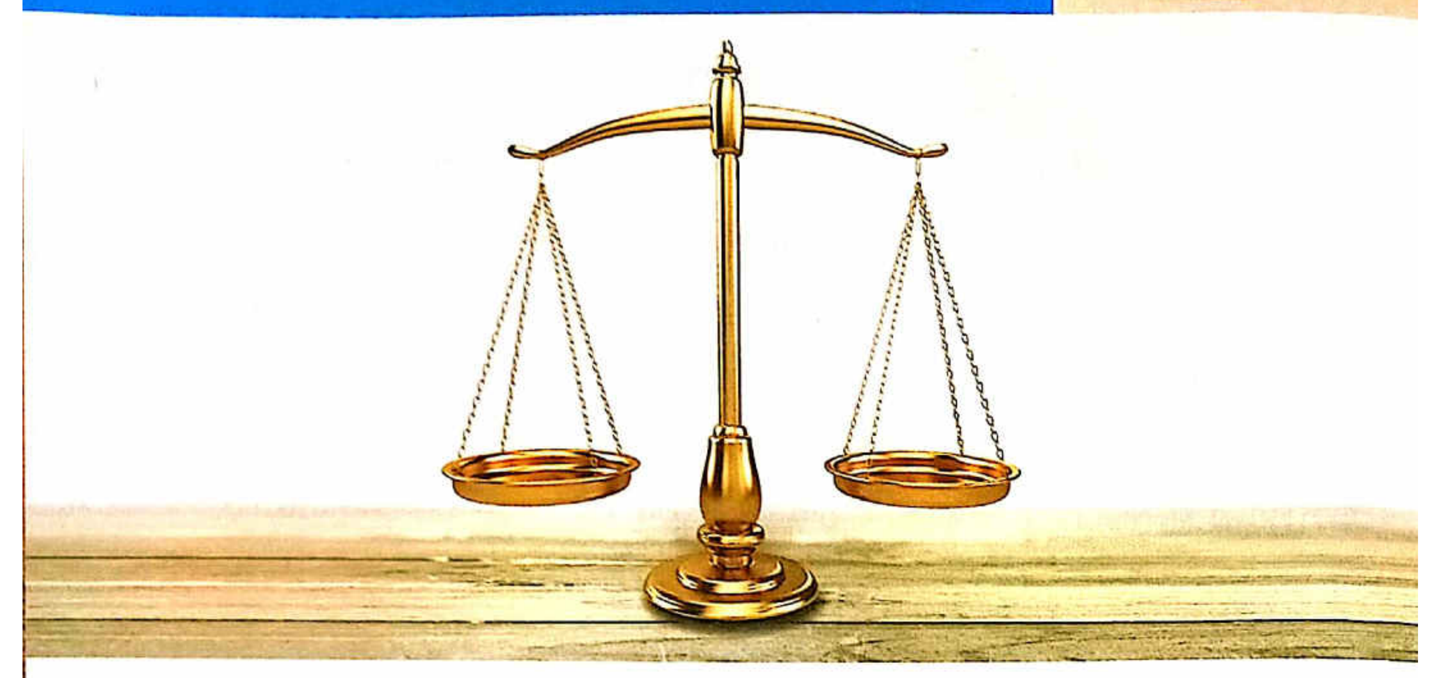
(٢)



(٣)



الدرس 6 متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد



تمهيد

سبق أن درسنا فى المرحلة الإعدادية متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد مثل :

س + ٣ > ٥ ، ٤ − ٢ س ≥ ٢ ، ٧ (س − ١) ≤ ٩ س − ٦

وعلمنا أن حل المتباينة يعنى إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة وعند حل هذه المتباينات فى ح وجدنا أن مجموعة الحل تُكتب على صورة فترة

فمثلًا عند حل المتباينة −٢ س + ٦ > ١٠ فى ح نجد أن :

−٢ س > ٤ ومنها س < −٢ «لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب»

وتكون مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية التى كل منها أقل من −٢

٣ ٢ ١ صفر −١ −٢ −٣

أى أن مجموعة الحل =]− ∞ ، −٢[

وفى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية حل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد (المتباينات التربيعية) فى ح مثل المتباينات :

س^{٢} − ٥ س + ٦ > ٠ ، س^{٢} + س ≤ ٢ ، س (س − ٦) < −٥

حل المتباينات التربيعية فى ح

لحل المتباينة التربيعية فى ح نتبع الخطوات التالية :

١ نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة.

٢ ندرس إشارة الدالة التربيعية التى كتبناها.

٣ نحدد الفترات التى تحقق المتباينة.

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المتباينة التربيعية.

مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٥ س + ٦ > ٠$

الحل

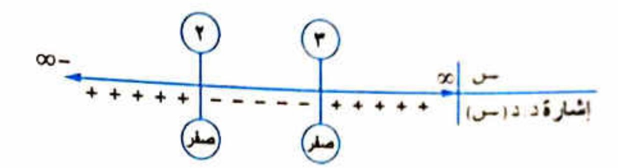
أولاً : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ، كما يلي : د (س) = $س^٢ - ٥ س + ٦$

ثانياً : ندرس إشارة الدالة د كما يلي :

∵ المميز = $ب^٢ - ٤ أ ح = ٢٥ - ٤ × ١ × ٦ = ١$ (> صفر)

∴ المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$ لها جذران مختلفان

وبالتحليل : ∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠ ∴ س = ٢ أ، س = ٣



ثالثاً : نحدد الفترات التي تحقق أن : $س^٢ - ٥ س + ٦ > ٠$ (موجبة) فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة =]-∞ ، ٢[∪]٣ ، ∞[أ، ح - [٢ ، ٣]



لاحظ أنه

من المثال السابق مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٥ س + ٦ < ٠$ في ح هي]٢ ، ٣[

حاول بنفسك

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١ $س^٢ - ٢ س - ٨ > ٠$

٢ $س^٢ - ٢ س - ٨ < ٠$

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س - ١) ≤ س + ٥

الحل

∵ (س + ٥) (س - ١) ≤ س + ٥

∴ $س^٢ + ٤ س - ٥ ≤ س + ٥$

∴ $س^٢ + ٣ س - ١٠ ≤ ٠$

أولاً : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة : د (س) = س^{٢} + ٣ س − ١٠

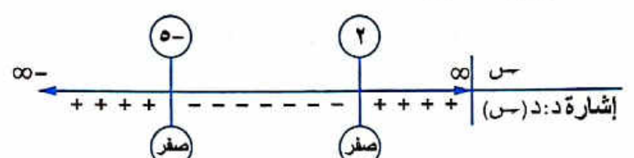
ثانيًا : ندرس إشارة الدالة د كما يلى :

∵ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × (−١٠) = ٤٩ (> صفر)

∴ المعادلة : س^{٢} + ٣ س − ١٠ = ٠ لها جذران مختلفان وبالتحليل :

∴ (س − ٢) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٥



ثالثًا : نحدد الفترات التى تحقق أن : س^{٢} + ٣ س − ١٠ ≥ ٠ فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة =]− ∞ ، −٥] ∪ [٢ ، ∞[أ، ح −]−٥ ، ٢[



لاحظ أن

مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س − ١) ≤ س + ٥ فى ح هى [−٥ ، ٢]

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

[١] ٢ س^{٢} + ٥ س ≥ ٣

[٢] س (س + ٦) < ٤ س + ١٥

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

[١] س^{٢} − ٣ س + ٥ < ٠

[٢] س^{٢} + ٢ س + ٤ > ٠

[٣] ٤ س − س^{٢} − ٤ < ٠

[٤] س^{٢} − ٦ س + ٩ ≤ ٠

الحل

[١] بوضع د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٥ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ٥ = −١١ (< صفر)

∴ المعادلة : س^{٢} − ٣ س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠ ∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة : س^{٢} − ٣ س + ٥ < ٠ هى ∅

٢ بوضع د (س) = $س^{٢}$ + ٢ س + ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × ٤ = −١٢ (< صفر)

∴ المعادلة : $س^{٢}$ + ٢ س + ٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ + ٢ س + ٤ > ٠ هى ح

٣ بوضع د (س) = ٤ س − $س^{٢}$ − ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ = ١٦ − ٤ × (−١) × (−٤) = ٠

∴ المعادلة : ٤ س − $س^{٢}$ − ٤ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ $(س − ٢)^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ أ = −١ < ٠

∴ الدالة سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ مجموعة حل المتباينة : ٤ س − $س^{٢}$ − ٤ < ٠ هى ح − {٢}

٤ بوضع د (س) = $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٣٦ − ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ المعادلة : $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ $(س − ٣)^{٢}$ = ٠

∴ س = ٣ ، ∵ أ = ١ > ٠

∴ الدالة موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س = ٣

∴ مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ ≥ ٠ هى {٣}

حاول بنفسك



أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ $س^{٢}$ + س + ١٢ > ٠

٢ − $س^{٢}$ + س − ١ > ٠

٣ $س^{٢}$ − ٢ س + ١ > ٠

٤ ١٠ س − $س^{٢}$ − ٢٥ ≥ ٠

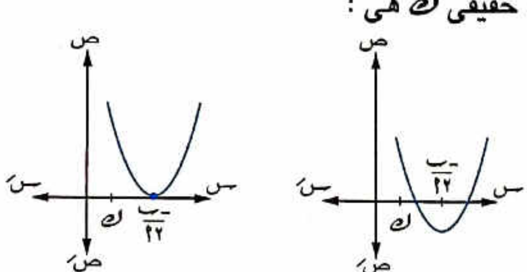
ملاحظات

إذا كانت المعادلة التربيعية أ $س^2$ + ب س + حـ = ٠ .

حيث د هى الدالة التربيعية المرتبطة بها فإن :

١ شروط أن يكون كل من جذرى المعادلة أكبر من عدد حقيقى ك هى :

- $ب^2$ − ٤ أ حـ ≥ ٠ .
- أ د (ك) > ٠ .
- $\frac{-ب}{٢أ}$ > ك



فمثلًا

إذا كان كل من جذرى المعادلة $س^2$ − ٥ س + م = ٠ أكبر من ٢

فإن : • (٢٥) − ٤ × م ≥ ٠ . ∴ م ≤ $٦\frac{١}{٤}$

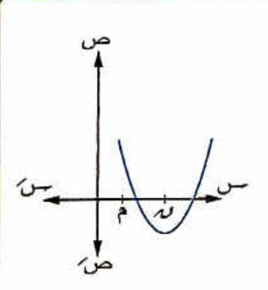
• ٤ − ٥ (٢) + م > ٠ . ∴ م > ٦

• $\frac{٥}{٢}$ > ٢ متحققة لكل قيم م

وحتى تتحقق الشروط الثلاثة فإن : ٦ < م ≤ $٦\frac{١}{٤}$

٢ شرط وجود أحد الجذرين فقط بين العددين الحقيقيين م ، ن هو :

د (م) × د (ن) < صفر



فمثلًا

إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^2$ − ب س + ١٢ = ٠ .

ينتمى للفترة]١ ، ٤[

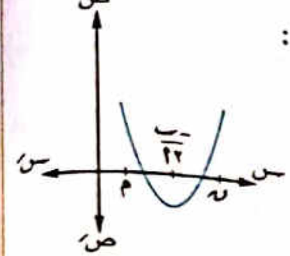
فإن : د (١) × د (٤) < ٠

∴ (١ − ب + ١٢) (١٦ − ٤ ب + ١٢) < ٠

∴ (١٣ − ب) (٢٨ − ٤ ب) < ٠

∴ (١٣ − ب) (٧ − ب) < ٠

∴ ب ∈]٧ ، ١٣[



٣ شروط أن يكون جذرا المعادلة بين العددين الحقيقيين م ، ن حيث م < ن هي :

- $ب^٢ - ٤ أ حـ \geq ٠$
- أ د (م) > ٠
- أ د (ن) > ٠
- $م < \frac{-ب}{٢أ} < ن$

فمثلاً

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية ٤ $س^٢$ − ٢ س + هـ = ٠

ينتميان للفترة]−١ ، ١[

فإن : • ٤ − ٤ × ٤ × هـ ≥ ٠ ∴ $هـ \leq \frac{١}{٤}$ (١)

• ٤ × د (−١) > ٠ ∴ ٤ × (٤ + ٢ + هـ) > ٠ ∴ هـ > −٦ (٢)

• ٤ × د (١) > ٠ ∴ ٤ × (٤ − ٢ + هـ) > ٠ ∴ هـ > −٢ (٣)

• $−١ < \frac{٢}{٢ \times ٤} < ١$ متحققة لجميع قيم هـ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : ∴ $−٢ < هـ \leq \frac{١}{٤}$

تمارين 6

على متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد



📖 من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (س − ٥) < ٠ في ح هي ....

(أ) {٢ ، ٥} (ب)]٢ ، ٥[(جـ) [٢ ، ٥] (د) ح − [٢ ، ٥]

(٢) مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٣ س − ٤ ≤ ٠ في ح هي ....

(أ) {−٤ ، ١} (ب) [−٤ ، ١] (جـ) ح −]−٤ ، ١[(د) ح − [−٤ ، ١]

(٣) مجموعة حل المتباينة : ٧ + س^{٢} − ٤ س < ٠ في ح هي ....

(أ)]−٤ ، ٧[(ب) ح − [−٤ ، ٧] (جـ) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المتباينة : ٢ س + س^{٢} + ٥ < ٠ في ح هي ....

(أ) ح − [−٢ ، ٣] (ب) [−٢ ، ٣] (جـ) ح (د) ∅

(٥) مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٩ > ٦ س في ح هي ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح (جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د) ح − {٣}

(٦) مجموعة حل المتباينة : ٤ س − س^{٢} − ٤ < ٠ هي ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) ح$^{-}$ (د) ح − {٢}

(٧) م.ح المتباينة : (س − ١)^{٢} ≥ ٠ في ح هي ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) {١} (د) ح − {١}

(٨) مجموعة حل المتباينة : − س (س + ٢) ≤ ٠ في ح هي ....

(أ) {٠ ، −٢} (ب) [−٢ ، ٠] (جـ)]−٢ ، ٠[(د) [−٢ ، ٢]

(٩) مجموعة حل المتباينة : س (س − ١) < ٠ في ح هي ....

(أ) {٠ ، ١} (ب)]٠ ، ١[(جـ) [٠ ، ١] (د) ح − [٠ ، ١]

(١٠) مجموعة الحل في ح للمتباينة : س (س − ٢) < صفر هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب)]−٢ ، ٢[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]١ ، ٢[

(١١) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 < ٣ سـ هى ....

(أ) ح − [٠ ، ٣] (ب) [٠ ، ٣] (جـ)]٠ ، ٣[(د) ح −]٠ ، ٣[

(١٢) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 + ٤٩ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) [−٧ ، ٧] (د) ح − [−٧ ، ٧]

(١٣) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 + ١ ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

(١٤) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 + ٩ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]−٣ ، ٣[(د) ح − [−٣ ، ٣]

(١٥) إذا كانت : د (سـ) = سـ^2 − ٦ سـ + ٩ فإن مجموعة حل المتباينة د (سـ) ≥ ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) ح −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

(١٦) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 ≥ ٩ فى ح$^+$ هى ....

(أ) [−٣ ، ٣] (ب) ح −]−٣ ، ٣[(جـ)]٠ ، ٣] (د) ∅

(١٧) مجموعة حل المتباينة : سـ^2 > ١٦ فى الفترة [−٤ ، ٤] هى ....

(أ) [−٤ ، ٤] (ب) ح − [−٤ ، ٤] (جـ) ∅ (د) {−٤ ، ٤}

(١٨) أى من الإجابات الآتية لا تنتمى إلى مجموعة حل للمتباينة : ٣ سـ − ٥ ≤ ٤ سـ − ٣ ؟

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٥

(١٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (سـ) = سـ^2 − ٢ سـ − ٣

فإن مجموعة حل المتباينة :

سـ^2 − ٢ سـ − ٣ ≥ ٠ فى ح هى ....

(أ)]−١ ، ٣[(ب)]−∞ ، ٢[

(جـ)]٣ ، ∞[(د)]−∞ ، −١] ∪ [٣ ، ∞[

(٢٠) إذا كانت مجموعة الحل فى ح للمتباينة : أ سـ^2 + ب سـ + جـ > ٠ هى ح فإن : ....

(أ) أ ، ب ، جـ ∈ ح$^+$ (ب) أ ، جـ لهما نفس الإشارة.

(جـ) ٤ أ جـ > ب^2 (د) $\sqrt{\text{ب}^2 - \text{٤ أ جـ}}$ ∈ ح

(٢١) إذا كانت مجموعة الحل فى $ح$ للمتباينة : $أ س^٢ + ب س + حـ > ٠$ هى $ح - \{ء\}$

فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) $ب^٢ = ٤ أ حـ$ (ب) $أ \in ح^+$

(جـ) $أ ء^٢ + ب ء + حـ > ٠$. (د) $ء^٢ = \frac{حـ}{أ}$

(٢٢) إذا كانت مجموعة الحل فى $ح$ للمتباينة : $أ س^٢ + ب س + حـ > ٠$ هى $ح - [ل ، م]$

فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) مجموعة حل المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ فى $ح$ هى $\{ل ، م\}$

(ب) $ل + م = \frac{-ب}{أ}$

(جـ) $ب^٢ > ٤ أ حـ$

(د) مجموعة حل المتباينة : $أ س^٢ + ب س + حـ > ٠$ هى $[ل ، م]$

(٢٣) مجموعة حل المتباينة : $(س + ٥)(س - ١) \leq (س + ٥)$ هى ....

(أ) $]١ ، \infty[$ (ب) $[-٥ ، ٢]$

(جـ) $ح -]-٥ ، ٢[$ (د) $ح -]-٥ ، ١[$

(٢٤) المتباينة التى مجموعة حلها $]-٢ ، ٤[$ هى ....

(أ) $س^٢ - ٨ > ٢ س$ (ب) $س^٢ - ٢ س \geq ٨$

(جـ) $٨ + ٢ س > س^٢$ (د) $س^٢ - ٢ س \leq ٨$

(٢٥) عدد الأعداد الصحيحة فى مجموعة حل المتباينة : $(٢ س + ١)(س - ٢) > ٠$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٦) إذا كان : $٥ \leq س \leq ٨$ فإن : ....

(أ) $(س - ٥)(س - ٨) \leq ٠$ (ب) $(س - ٥)(س - ٨) > ٠$

(جـ) $(س - ٥)(س - ٨) \geq ٠$ (د) $(س - ٥)(س - ٨) < ٠$

(٢٧) إذا كان $أ ، ب \in ح^+$ ، $أ > ب$ فإن : ....

(أ) $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$ (ب) $\frac{١}{أ} < \frac{١}{ب}$

(جـ) $أ^٢ > ب^٢$ (د) لاشىء مما سبق.

(٢٨) قيم س الحقيقية التى تحقق أن : $س^٢ - ٢ س - ٣ < ٠$ ، $س - ٢ > ٠$ هى ....

(أ) $]-١ ، ٣[$ (ب) $]-١ ، ٢[$ (جـ) $]٢ ، ٣[$ (د) $[-١ ، ٣]$

١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) 📖 $س^٢ + ٢س - ٨ > ٠$

(٢) $س^٢ - ٥س - ٦ > ٠$

(٣) $س^٢ - س - ٢ \leq ٠$

(٤) $٤ - ٣س - س^٢ \geq ٠$

(٥) $٥س - س^٢ - ٦ > ٠$

(٦) 📖 $س^٢ - ١ \leq ٠$

(٧) $٤ - س^٢ > ٠$

(٨) 📖 $س^٢ - ٤س + ٤ \geq ٠$

(٩) $٦س - س^٢ - ٩ > ٠$

(١٠) $س^٢ - ٨س + ١٦ > ٠$

(١١) $-س^٢ - ١٠س - ٢٥ \geq ٠$

(١٢) 📖 $٢س - س^٢ > ٠$

٢ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) $س^٢ + ٥س > -٤$

(٢) 📖 $٥س^٢ + ١٢س \geq ٤٤$

(٣) 📖 $٣س^٢ \leq ١١س + ٤$

(٤) 📖 $س^٢ \geq ٦س - ٩$

(٥) 📖 $٣ - ٢س \geq س^٢$

(٦) $٧س + ١٥ \leq ٢س^٢$

(٧) 📖 $س^٢ + ٥ \leq ١$

(٨) $-س^٢ - ٧ > ٢$

(٩) $(س - ٢)^٢ \geq ٩$

(١٠) 📖 $(س - ٢)^٢ \leq -٥$

(١١) 📖 $س (س + ٢) - ٣ \leq ٠$

(١٢) $(س + ٢)^٢ + (س + ١)(س - ٤) > ٠$

(١٣) 📖 $(س + ٣)^٢ > ١٠ - ٣(س + ٣)$

(١٤) 📖 $٥ - ٢س \geq س^٢$

٣ عيِّن إشارة الدالة د حيث د (س) = $س^٢ - ٥س + ٦$ ومن ذلك عيِّن فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

٤ ابحث إشارة الدالة د حيث د (س) = $٢س^٢ + ٧س - ١٥$ ومن ذلك أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :
$٢س^٢ + ٧س \leq ١٥$

٥ عين إشارة الدالة د حيث د (س) = $س^٢ + ٤$ ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ صفر

٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $-س^٢ + ٢س + ٣$ فى الفترة [-٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد فى ح :

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ .

(٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠ .

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠ .



٧ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $(س + ١)^٢ < ٤ (٢ س - ١)^٢$

حل يوسف

∵ $(س + ١)^٢ < ٤ (٢ س - ١)^٢$

∴ س + ١ < ٢ (٢ س - ١)

وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين.

∴ -٤ س + س + ٢ + ١ < ٠

∴ -٣ س + ٣ < ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى : -٣ س + ٣ = ٠

مجموعة الحل هى {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث د (س) = -٣ س + ٣

نجد أن : مجموعة حل المتباينة هى]١ ، ∞[

حل نور

∵ $(س + ١)^٢ < ٤ (٢ س - ١)^٢$

∴ $س^٢ + ٢ س + ١ < ١٦ س^٢ - ١٦ س + ٤$

∴ $١٥ س^٢ - ١٨ س + ٣ > ٠$

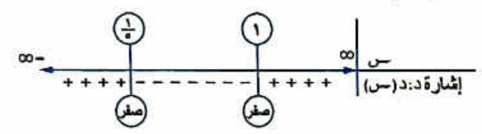
المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

∴ ٣ (٥ س - ١) (س - ١) = ٠

مجموعة الحل هى $\{١ ، \frac{١}{٥}\}$

* ببحث إشارة الدالة د حيث

$د (س) = ١٥ س^٢ - ١٨ س + ٣$



نجد أن : مجموعة حل المتباينة هى ح - $[\frac{١}{٥} ، ١]$

أى الحلين صحيح ؟

٨ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٢ س + ١ \leq ٠$.

حل باسم

∵ المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

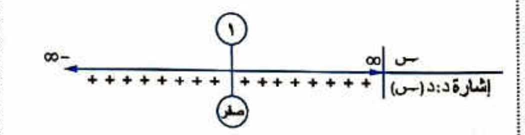
$س^٢ - ٢ س + ١ = ٠$

∴ $(س - ١)^٢ = ٠$

∴ مجموعة الحل = {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

$د (س) = س^٢ - ٢ س + ١$



نجد أن : مجموعة الحل = ح - {١}

حل إسلام

∵ المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

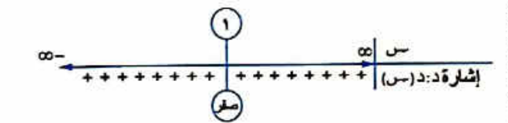
$س^٢ - ٢ س + ١ = ٠$

∴ $(س - ١)^٢ = ٠$

∴ مجموعة الحل = {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

$د (س) = س^٢ - ٢ س + ١$



نجد أن : مجموعة الحل = ح

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ٧ س + ١٢ ، س ∈ ح فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ....

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هى ح − [٣ ، ٤]

(جـ) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى]٣ ، ٤[

(د) د موجبة فى الفترة ح −]٣ ، ٤[

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (٣ س − ١) ≤ ٠ يساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) مجموعة حل المتباينة : (س + ٣)^{٢} > ٤ (س + ١)^{٢} فى ح هى ....

(أ)]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[(ب) ح −]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[(جـ) [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١] (د) ح − [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

(٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ > ٠ ، ل > م

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س^{٢} + ب س + جـ < ٠ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ل[(ب)]ل ، م[(جـ)]م ، ∞[(د) ح − [ل ، م]

(٥) إذا كان مميز المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ سالبًا

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س^{٢} + ب س + جـ < ٠ حيث أ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) ح$^{+}$ (د) ح$^{-}$

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} + (ك − ٢) س − ٥ = ٠ وكان : −١ > ل > م فإن ....

(أ) −١ > ك > ٠ (ب) ك < ٦ (جـ) ك > −١ (د) −١ > ك > ٦

(٧) إذا كان كل من جذرى المعادلة التربيعية : س^{٢} − ٢ ك س + ك^{٢} + ك − ٥ = ٠ أقل من ٥

فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ٥] (ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤[(د) ح − [٤ ، ٥]

(٨) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س^{٢} − ك س + ١ = ٠ غير حقيقيين فإن : ....

(أ) ك ∈ ص$^{-}$ (ب) −٢ > ك > ٢ (جـ) ك < ٢ (د) ك > −٢

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٤ \geq س + ك$ هى $[-٢ ، ٣]$ فإن : ك = ...

(أ) -٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠

(١٠) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ١٠ < ب س$ هى $]-٢ ، ٥[$ فإن : ب = ...

(أ) -١٠ (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ب س + ٣ = ٠$ ينتمى للفترة $]١ ، ٢[$

فإن : $ب \in$ ....

(أ) $]١ ، ٢[$ (ب) $]-\infty ، ٣[$ (جـ) $]٣\frac{١}{٢} ، ٤[$ (د) $ح -]٣\frac{١}{٢} ، ٤[$

(١٢) إذا كانت $م_١$ هى مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - س - ٢ \leq ٠$ وكانت $م_٢$

هى مجموعة حل المتباينة : $س^٢ + س - ٢ \leq ٠$ فإن : $م_١ \cap م_٢$ = ...

(أ) $\varnothing$ (ب) $[-٢ ، ٢]$ (جـ) $[-١ ، ١]$ (د) $ح -]-١ ، ١[$

(١٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $أ س^٢ + أ س + أ + ٢ = ٠$ وكان $٢ \in]ل ، م[$

فإن : $أ \in$ ....

(أ) $[١ ، ٢]$ (ب) $ح^+$ (جـ) $]\frac{-٢}{٧} ، ٠[$ (د) $]\frac{٢}{ل} ، \frac{٢}{م}[$

(١٤) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $٤ س^٢ - ٢ س + م = ٠$ ينتميان للفترة $]-١ ، ١[$

فإن : ....

(أ) $٠ \leq م < ٢$ (ب) $-٦ < م \leq \frac{١}{٨}$ (جـ) $-٢ < م \leq \frac{١}{٤}$ (د) $-٦ \leq م < -٢$

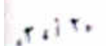
٢ أوجد مجموعة حل المتباينة : $١٠ > س^٢ + ٢ س - ٥ \geq ٣$ فى ح

تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى



١ أُطلقت قذيفة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ع تساوى ٢٤,٥ متر/ث احسب الفترة الزمنية ن بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر ، علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) والزمن (ن) هى كالآتى : ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}



٢ أ ، ٣

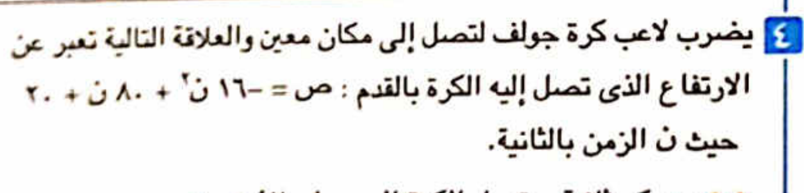


٢ يبدأ غواص بالقفز من على منصة بارتفاع ١٠ أمتار فوق سطح الماء فإذا كان ارتفاع الغواص عن سطح الماء ف مترًا تعبر عنه العلاقة :
ف = −٤,٩ ن^{٢} + ٣,٥ ن + ١٠ حيث ن الزمن بالثوانى.
بعد كم ثانية يصل الغواص إلى سطح الماء ؟

$\frac{٥}{٤}$ ثانية

٣ 📖 قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار ، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار.
أوجد المقدار المضاف.

٣ أمتار



٤ يضرب لاعب كرة جولف لتصل إلى مكان معين والعلاقة التالية تعبر عن الارتفاع الذى تصل إليه الكرة بالقدم : ص = −١٦ ن^{٢} + ٨٠ ن + ٢٠
حيث ن الزمن بالثانية.
(١) بعد كم ثانية ستصل الكرة إلى سطح الأرض ؟
(٢) هل ستصل الكرة إلى ارتفاع ١٣٠ قدمًا ؟

٥ ، ٢٤ : ثانية

٥ 📖 يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :
ع = ن^{٢} + ١,٢ ن + ٩١ حيث (ع) عدد السكان بالمليون ، (ن) عدد السنوات.
(١) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟ (٢) قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣
(٣) قدر عدد السنوات التى يبلغ عدد السكان فيها ٢٠٣ ملايين.

٩١٠ مليونًا ، ٥١٥ مليونًا ، ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٢٣.

٦ أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى (٤ – ٢ ت) أمبير وفى المقاومة الثانية $\frac{٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ أمبير

(علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين) «(٧ – ٢ ت) أمبير»

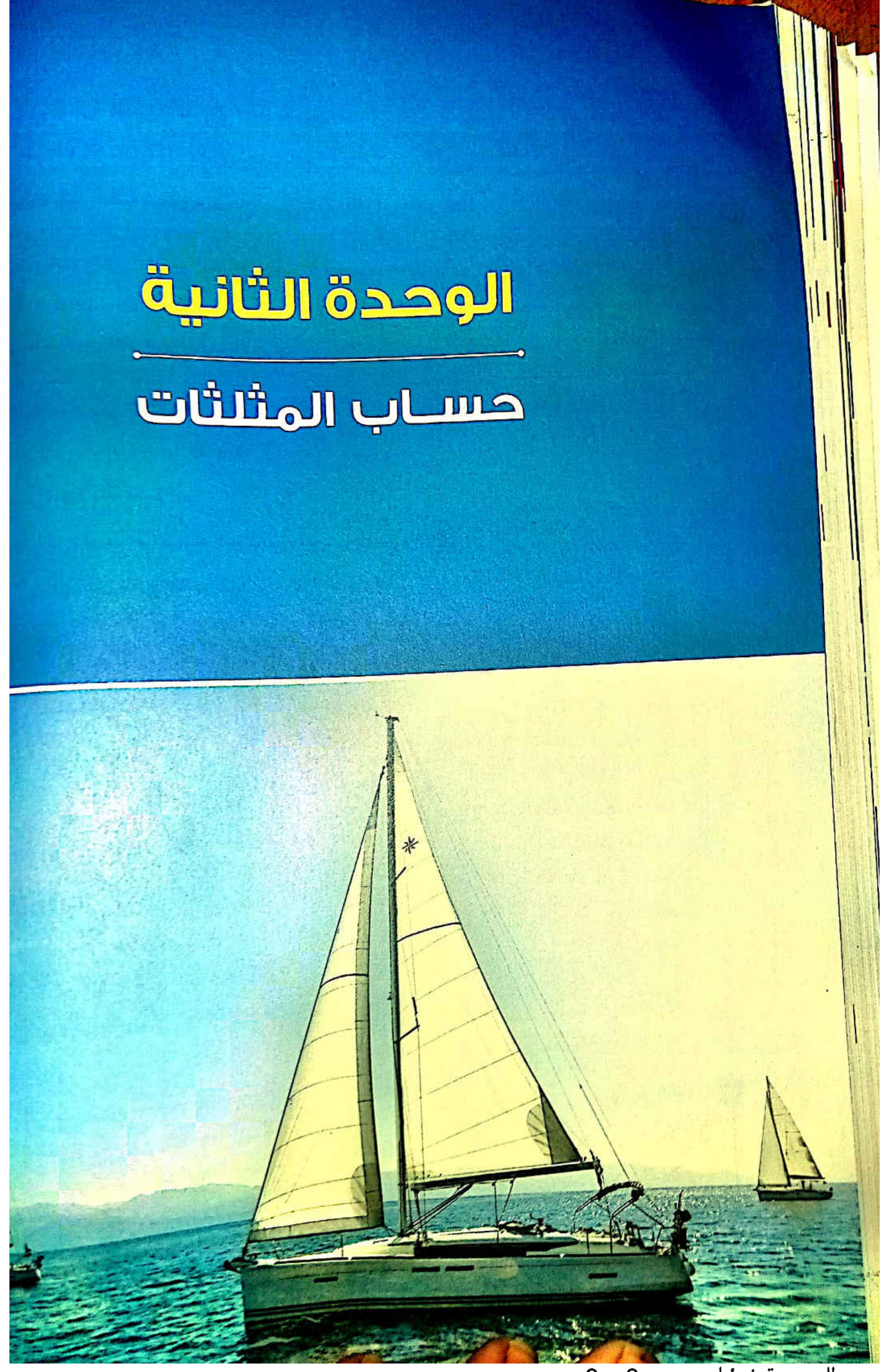
٧ إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى (٦ + ٤ ت) أمبير ، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤ - ت}$ أمبير ، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى. «(٢ + ٣ ت) أمبير»

٨ فى الفترة من عام ١٩٩٠م إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية يتحدد بالدالة د : د (ن) = ١٢ $ن^٢$ – ٩٦ ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات ، د (ن) إنتاج الذهب.

(١) ابحث إشارة دالة الإنتاج د

(٢) أوجد إنتاج منجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠ ، ٢٠٠٥

(٣) فى أى عام كان إنتاج المنجم مساويًا ٢٠١٦ ألف أوقية ؟ «٤٨٠ ألف أوقية ، ١٧٤٠ ألف أوقية ، ٢٠٠٦»


الوحدة الثانية
حساب المثلثات

دروس الوحدة

الدرس 1	الزاوية الموجهة.
الدرس 2	القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.
الدرس 3	الدوال المثلثية.
الدرس 4	الزوايا المنتسبة.
الدرس 5	التمثيل البيانى للدوال المثلثية.
الدرس 6	إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

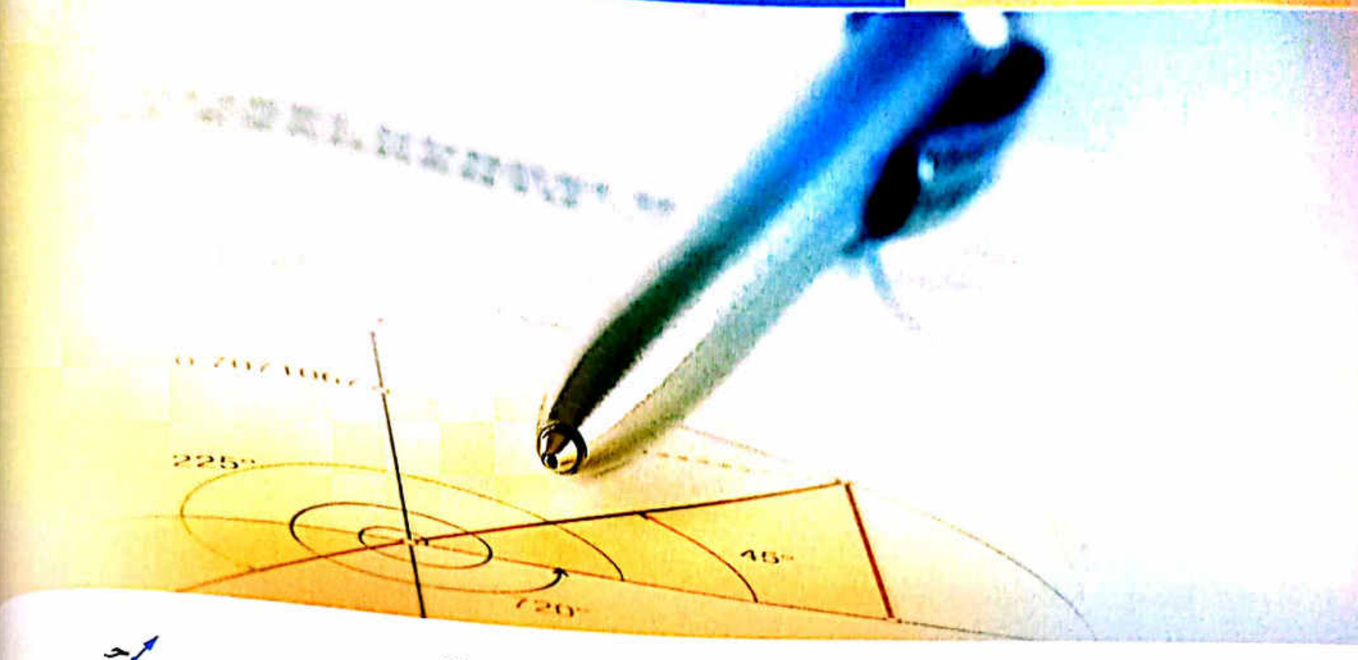
فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثانية.

نـواتـج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف مفهوم الزوايا المتكافئة.
- يحدد الربع الذى تقع فيه زاوية فى وضعها القياسى.
- يتعرف القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة.
- يحوّل من القياس الستينى للزاوية إلى القياس الدائرى لها والعكس.
- يتعرف إشارات الدوال المثلثية فى كل ربع.
- يوجد الدوال المثلثية لبعض الزوايا المنتسبة لزاوية خاصة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد النسب المثلثية.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الستينى للدائرى والعكس.
- يرسم الدوال المثلثية (دالة الجيب - دالة جيب التمام).
- يستخدم الحاسب الآلى فى تمثيل الدوال المثلثية.
- يحل بعض التطبيقات الحياتية باستخدام الدوال المثلثية.
- يوجد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

الدرس 1 الزاويـة الموجهـة



- سبق أن تعلمنا أن الزاوية هى اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة ب

فإن : $\overrightarrow{ب أ} \cup \overrightarrow{ب حـ}$ = ∠ أ ب حـ ويُسمى الشعاعان $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ضلعى الزاوية

، والنقطة ب رأس الزاوية.

- كما علمنا أن ترتيب ضلعى الزاوية غير هام.

فيمكن أن نكتب : ∠ أ ب حـ أو ∠ حـ ب أ لتعبر عن نفس الزاوية.

- وفى هذا الدرس سوف نتناول مفهومًا جديدًا وهو مفهوم «**الزاوية الموجهة**» وبعض الموضوعات الأخرى المتعلقة بها.

الزاويـة الموجهـة

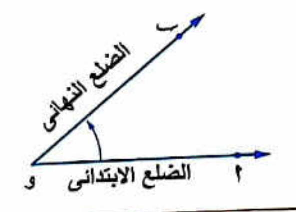
إذا أخذنا فى الاعتبار ترتيب ضلعى الزاوية بحيث يكون أحدهما ضلعًا ابتدائيًا والآخر ضلعًا نهائيًا ، ففى هذه الحالة تكتب الزاوية على شكل «**زوج مرتب**» مسقطه الأول هو الضلع الابتدائى ومسقطه الثانى هو الضلع النهائى وتسمى الزاوية بـ «**الزاوية الموجهة**» ، وعند رسمها اصطلح على رسم سهم بين ضلعيها يخرج من الضلع الابتدائى متجهًا نحو الضلع النهائى.

تعريف الزاوية الموجهة

هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

فإذا كان : و أ ، و ب ضلعى زاوية رأسها نقطة و فإن :

الزوج المرتب (و أ ، و ب) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ أ و ب ضلعها الابتدائى و أ ، ضلعها النهائى و ب



الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ ب و أ ضلعها الابتدائى و ب ، ضلعها النهائى و أ

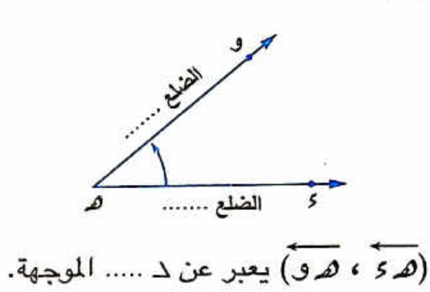
الضلع الابتدائى
ب
الضلع النهائى
و
أ

نستنتج مما سبق أن

∠ أ و ب الموجهة ≠ ∠ ب و أ الموجهة وذلك لأن : (و أ ، و ب) ≠ (و ب ، و أ)

تحقق من فهمك

أكمل : ١



(هـ د ، هـ و) يعبر عن ∠ ..... الموجهة.

٢

و
الضلع ......
الضلع ......
ص
س

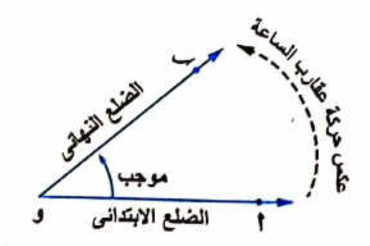
(..... ، .....) يعبر عن ∠ س و ص الموجهة.

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يكون قياس الزاوية الموجهة أ و ب

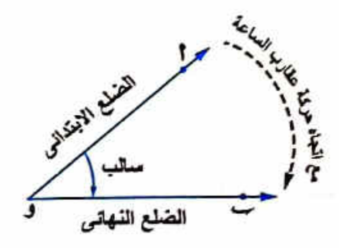
موجباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **عكس** اتجاه حركة عقارب الساعة.



سالباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **نفس** اتجاه حركة عقارب الساعة.



مـلاحظـة

لكل زاوية موجهة غير صفرية قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين يساوى ٣٦٠°

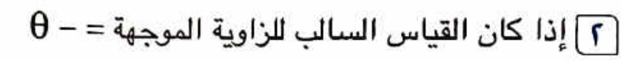
أى أن | القياس الموجب للزاوية الموجهة | + | القياس السالب للزاوية الموجهة | = ٣٦٠°

وعلى هذا فإنه

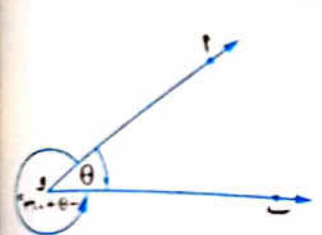
١ إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة = θ

فإن القياس السالب لنفس الزاوية = θ − ٣٦٠°

فمثلًا القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٢١٠° = ٢١٠° − ٣٦٠° = −١٥٠°



٢ إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة = − θ



فإن القياس الموجب لنفس الزاوية = − θ + ٣٦٠°

فمثلًا القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٢٠°)

= −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

حاول بنفسك

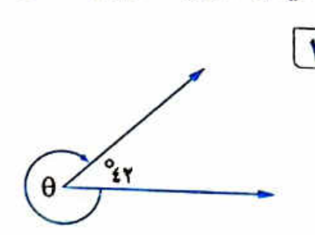
أوجد : ١ القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٧٠°)

٢ القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٣٢٠°

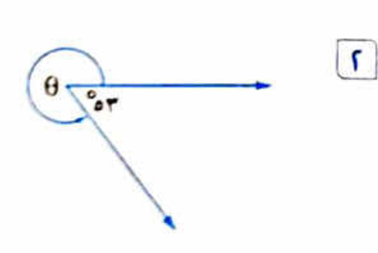


أوجد قياس الزاوية الموجهة θ فى كل من الشكلين الآتيين :

١



٢



الحـل

١ ∵ اتجاه السهم فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

∴ قياس الزاوية سالب.

∴ θ = ٤٢° − ٣٦٠° = −٣١٨°

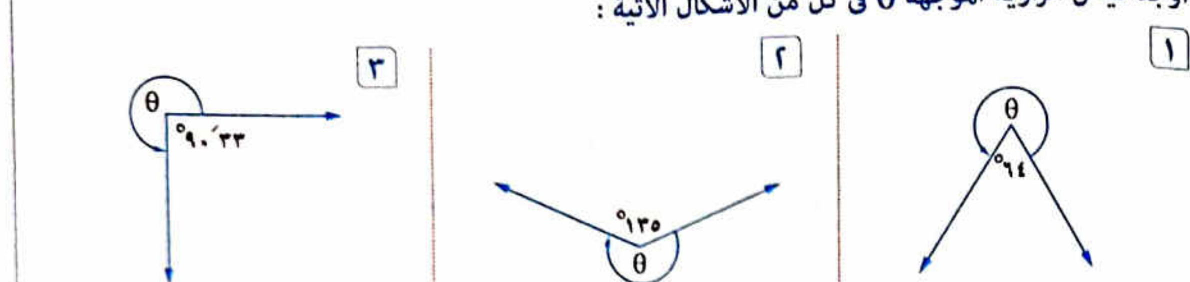
٢ ∵ اتجاه السهم ضد اتجاه حركة عقارب الساعة.

∴ قياس الزاوية موجب.

∴ θ = −٥٣° + ٣٦٠° = ٣٠٧°

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ فى كل من الأشكال الآتية :



الوضع القياسى للزاوية الموجهة

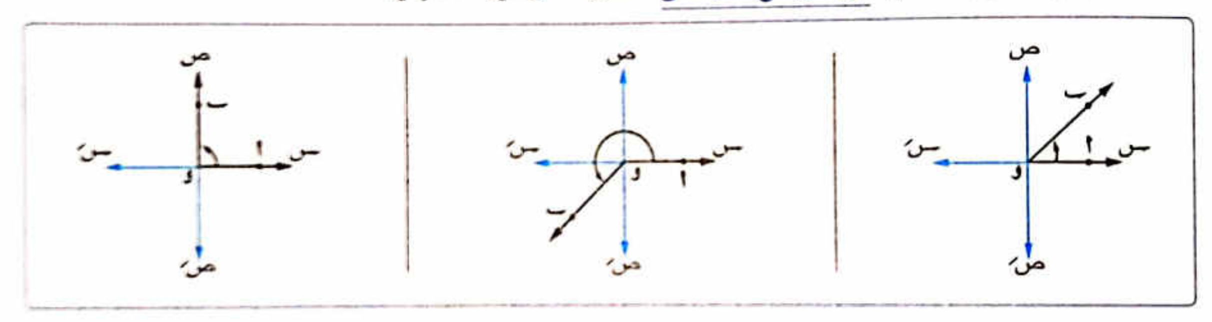
تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان

١ ضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

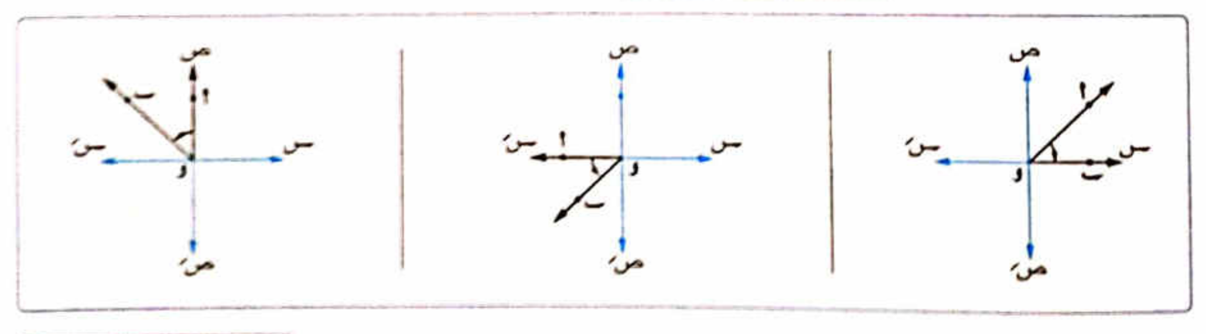
٢ رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

وعلى هذا فإن :

- كل من الزوايا الموجهة التالية فى الوضع القياسى لتحقق الشرطين السابقين :

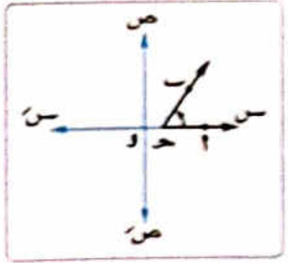


- كل من الزوايا الموجهة التالية ليست فى الوضع القياسى لأن الضلع الابتدائى لا يقع على و س :



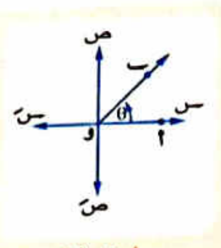
- الزاوية الموجهة فى الشكل المقابل ليست فى الوضع القياسى

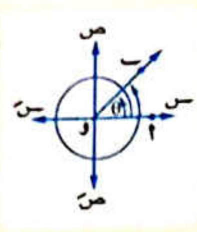
لأن رأسها ليس نقطة الأصل و

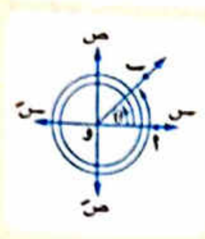


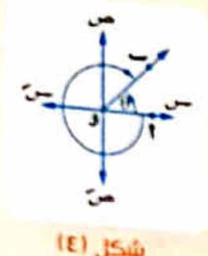
الزوايا المتكافئة

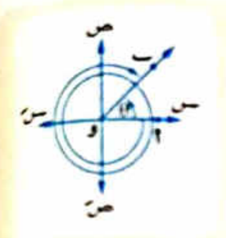
- إذا تأملنا الزوايا الموجهة فى الوضع القياسى فى الأشكال الآتية :


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)


شكل (٤)


شكل (٥)

فإننا نلاحظ ما يلى

١ الزوايا فى الأشكال الخمسة لها نفس الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$

٢ الزاوية فى شكل (١) قياسها = θ

، الزاوية فى شكل (٢) قياسها = θ + ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٣) قياسها = θ + ٢ × ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٤) قياسها = − (٣٦٠° − θ) = θ − ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٥) قياسها = − (٢ × ٣٦٠° − θ) = θ − ٢ × ٣٦٠°

ومن ذلك نستنتج أنه

إذا كان (θ) هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها :

(θ ± ٣٦٠°) ، (θ ± ٢ × ٣٦٠°) ، (θ ± ٣ × ٣٦٠°) ، ..... ، (θ ± ن × ٣٦٠°)

حيث ن عدد صحيح موجب يكون لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

مثل هذه الزوايا التى تشترك فى الضلع النهائى توصف بأنها **زوايا متكافئة**.

تعريف الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا موجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

مثال ٢

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من :

١ ١٠٠° ٢ -٢٥٠°

الحل

١ زاوية بقياس موجب : ١٠٠° + ٣٦٠° = ٤٦٠°

زاوية بقياس سالب : ١٠٠° - ٣٦٠° = -٢٦٠°

٢ زاوية بقياس موجب : -٢٥٠° + ٣٦٠° = ١١٠°

زاوية بقياس سالب : -٢٥٠° - ٣٦٠° = -٦١٠°

لاحظ أنه

يوجد عدد لا نهائى من الزوايا الأخرى بقياس موجب وبقياس سالب تشترك فى الضلع النهائى.

مثال ٣

عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

١ -٦٢° ٢ -٢٢٥° ٣ ٥٣٠° ٤ -٧٩٠°

الحل

١ أصغر قياس موجب = -٦٢° + ٣٦٠° = ٢٩٨°

٢ أصغر قياس موجب = -٢٢٥° + ٣٦٠° = ١٣٥°

٣ أصغر قياس موجب = ٥٣٠° - ٣٦٠° = ١٧٠°

٤ أصغر قياس موجب = -٧٩٠° + ٣ × ٣٦٠° = ٢٩٠°

حاول بنفسك

١ عيِّن أحد القياسات السالبة لكل من :

١ ٧٢° ٢ ١١٥٠°

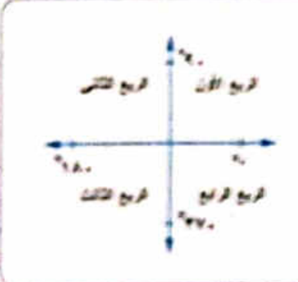
٢ عيِّن أصغر قياس موجب لكل من :

١ -١١٥° ٢ ٤٠٥°

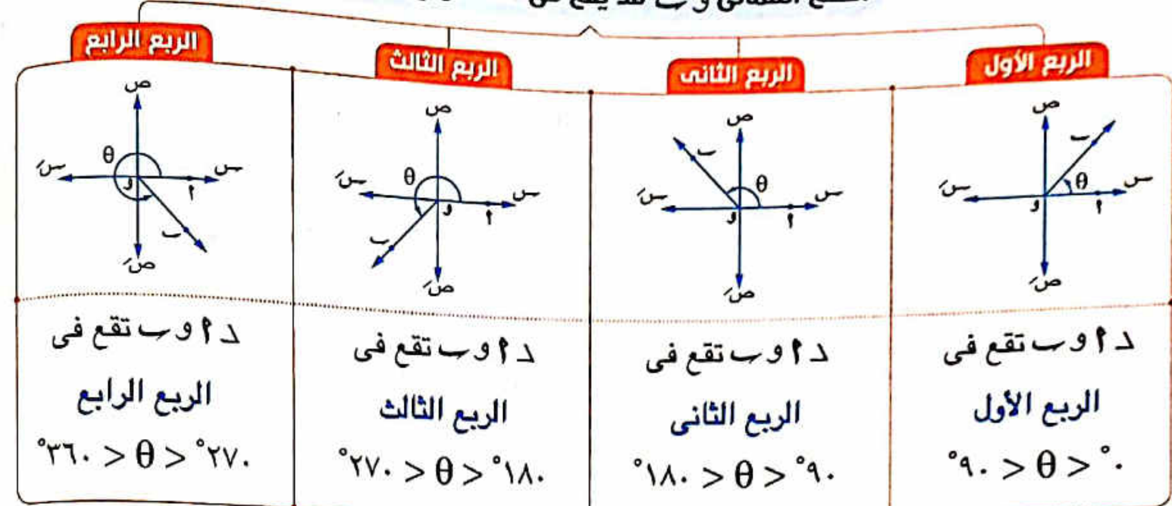
موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد

- نعلم أن المستوى الإحداثى المتعامد ينقسم إلى أربعة أرباع كما فى الشكل التالى.

يتحدد موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد بموقع ضلعها النهائى عندما تكون فى وضعها القياسى.



فإذا رسمنا ∠ أ و ب الموجهة التى قياسها الموجب θ فى وضعها القياسى فإن :



∠ أ و ب تقع فى الربع الأول	∠ أ و ب تقع فى الربع الثانى	∠ أ و ب تقع فى الربع الثالث	∠ أ و ب تقع فى الربع الرابع
°٠ < θ < °٩٠	°٩٠ < θ < °١٨٠	°١٨٠ < θ < °٢٧٠	°٢٧٠ < θ < °٣٦٠

ملاحظة

إذا وقع الضلع النهائى على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية بالزاوية الربعية.

أى أن الزوايا التى قياساتها °٠ ، °٩٠ ، °١٨٠ ، °٢٧٠ ، °٣٦٠ هى زوايا ربعية.

مثال ٤

عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

١ °٢١٣ ٢ °١٣٢ ٣ −°٣١٠ ٤ −°١٢

٥ °٢٧٠ ٦ °٩٦٤ ٧ −°١٠٧٠

الحل

١ ∵ °١٨٠ < °٢١٣ < °٢٧٠ ∴ الزاوية تقع فى الربع الثالث.

٢ ∵ °٩٠ < °١٣٢ < °١٨٠ ∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى.

٣ أصغر قياس موجب = −°٣١٠ + °٣٦٠ = °٥٠

، ∵ °٠ < °٥٠ < °٩٠

∴ الزاوية التى قياسها °٥٠ تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها −°٣١٠ تقع أيضًا فى الربع الأول.

لاحظ أنه
لتحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب لها أولًا.

[٤] أصغر قياس موجب = −١٢° + ٣٦٠° = ٣٤٨°

، ∵ ٢٧٠° < ٣٤٨° < ٣٦٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٣٤٨° تقع فى الربع الرابع.

∴ الزاوية التى قياسها −١٢° تقع أيضًا فى الربع الرابع.

[٥] ٢٧٠° زاوية ربعية.

[٦] أصغر قياس موجب = ٩٦٤° − ٢ × ٣٦٠° = ٢٤٤°

، ∵ ١٨٠° < ٢٤٤° < ٢٧٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٢٤٤° تقع فى الربع الثالث.

∴ الزاوية التى قياسها ٩٦٤° تقع أيضًا فى الربع الثالث.

[٧] أصغر قياس موجب = −١٠٧٠° + ٣ × ٣٦٠° = ١٠°

، ∵ ٠° < ١٠° < ٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ١٠° تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها −١٠٧٠° تقع أيضًا فى الربع الأول.

حاول بنفسك

حدد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

[١] ٦٧°   [٢] −٢٢٠°   [٣] ٨٧٥°   [٤] −٢٠٢٠°



● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

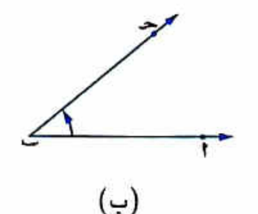
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

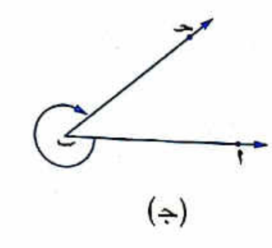
(١) الزوج المرتب ($\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وحـ}$) يمثل الزاوية الموجهة ....

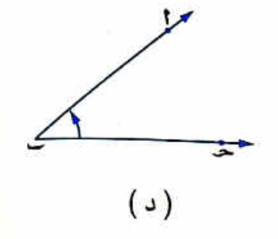
(أ) ∠ و ب حـ (ب) ∠ ب و حـ (جـ) ∠ ب حـ و (د) ∠ و حـ ب

(٢) أى مما يأتى لا يعبر عن ∠ أ ب حـ الموجهة ؟

(أ) ($\overleftarrow{بأ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$)


(ب)


(جـ)


(د)

(٣) إذا كانت θ هو القياس الموجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب لها هو ....

(أ) $-\theta$ (ب) $\theta - 180°$ (جـ) $\theta - 360°$ (د) $360° - \theta$

(٤) إذا كان θ_1 هو القياس الموجب لزاوية موجهة ، θ_2 هى القياس السالب لها

فإن : $\theta_1 - \theta_2 = $ ....°

(أ) صفر (ب) ± ٣٦٠ (جـ) ٣٦٠ (د) −٣٦٠

(٥) إذا كانت زاوية موجهة غير صفرية فإن مجموع القياسين الموجب والسالب لها ....°

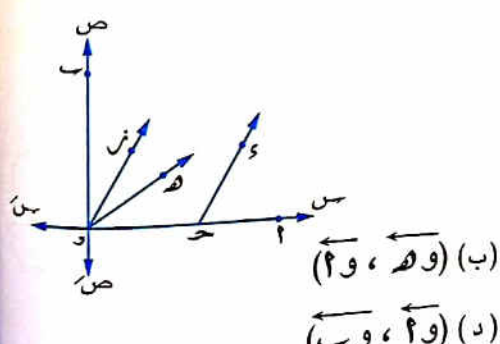
(أ) يساوى ٣٦٠ (ب) أكبر من ٣٦٠

(جـ) ∋]−٣٦٠ ، ٣٦٠[(د) ∋]٠ ، ٣٦٠[

(٦) في الشكل المقابل :

أى من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة

فى وضعها القياسى ؟ فسّر إجابتك.



(أ) ($\overleftarrow{حـأ}$ ، $\overleftarrow{حـء}$) (ب) ($\overleftarrow{وهـ}$ ، $\overleftarrow{وأ}$)

(جـ) ($\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وز}$) (د) ($\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وب}$)

(٧) إذا كانت الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى فأى مما يأتى صحيح ؟

① رأسها نقطة الأصل.

② ضلعها الابتدائى ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

③ قياسها موجب.

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ② فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(٨) يقال للزوايا الموجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها نفس ....

(أ) الضلع الابتدائى. (ب) الضلع النهائى. (جـ) رأس الزاوية. (د) اتجاه الدوران.

(٩) إذا كانت θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ں ∈ ص

فإن الزوايا التى قياساتها (θ ± ں × ٣٦٠°) تسمى بالزوايا ....

(أ) المتكافئة. (ب) الربعية. (جـ) المتكاملة. (د) المتجاورة.

(١٠) إذا كان : ؟ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فإن : −؟ ، −ب يكونان ....

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين.

(جـ) متتامتين. (د) مجموعهما −٣٦٠°

(١١) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات ....

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ٦٠°

(١٢) 🕮 الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

(١٣) 🕮 الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(١٤) الزاوية التى قياسها ٩٥٠° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٣٠° (ب) −١٣٠° (جـ) ٢٣٥° (د) −٢٣٠°

(١٥) جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية التى قياسها ٧٥° فى الوضع القياسى ما عدا ....

(أ) −٢٨٥° (ب) −٦٤٥° (جـ) ٢٨٥° (د) ٤٣٥°

(١٦) الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١٦٧٠° هو ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٧) الزاوية التى قياسها (−١٣٥°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٨) الزاوية التى قياسها (-٨٥٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٩) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ....

(أ) -٢٤٠° (ب) ١٠٠° (جـ) -١٢٠° (د) ٨٦٠°

(٢٠) الزاوية التى قياسها ٤٥° + (٤ ن + ١) × ٩٠° تقع فى الربع .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢١) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية التى قياسها ....

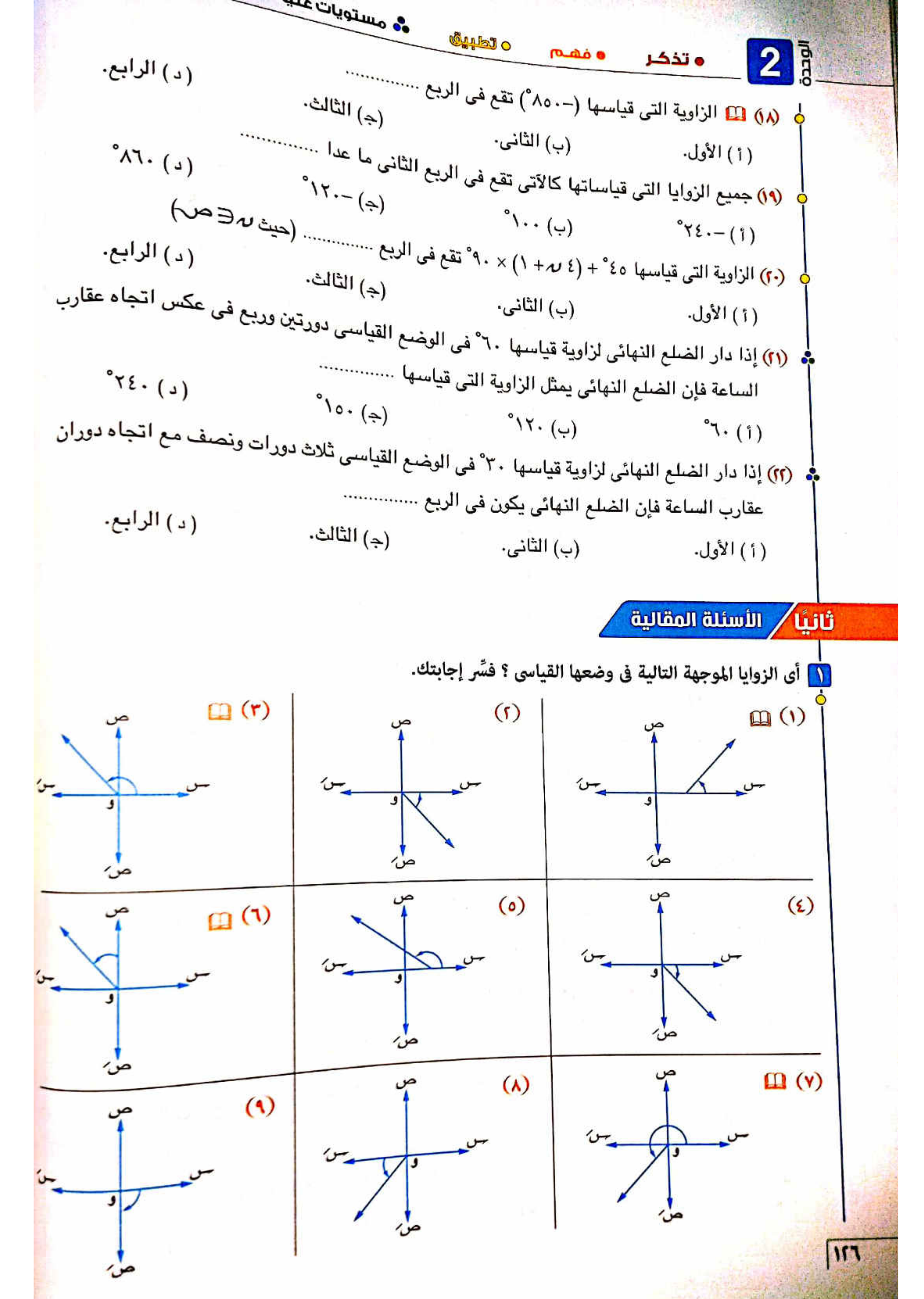
(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

(٢٢) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٣٠° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون فى الربع ....

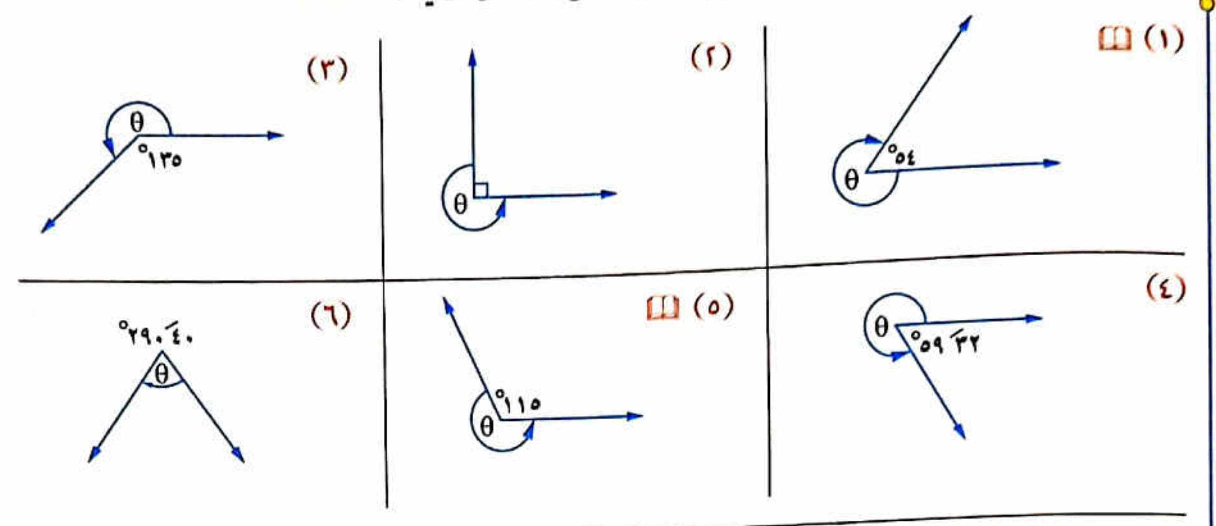
(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى ؟ فسِّر إجابتك.



٢ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية :



٣ ضع كلًّا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى ، موضحًا ذلك بالرسم :

(١) ٣٢°　(٢) ١٤٠°　(٣) −٨٠°　(٤) −١١٠°　(٥) −٣١٥°

٤ عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٢٤°	(٢) ٢١٥°	(٣) −٥٠°	(٤) −٢١٠°
(٥) ١٥٠ ١٤َ°	(٦) ٨٩ ٥٩َ°	(٧) −١٨٠°	(٨) ٢٦٩ ٥٩َ ٦٠ً°

٥ عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى ثم عيِّن الربع الذى تقع فيه كل زاوية :

(١) −٥٦°	(٢) ٦٠٠°	(٣) −٢١٥	(٤) ٩٤٠°
(٥) ٤١٥°	(٦) −٨٧٠°	(٧) ١١٢٠ ١٥َ°	(٨) −٥٩٠ ١٨َ°

٦ عيِّن أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٨٣°	(٢) ١٣٦°	(٣) ٩٠°
(٤) ٢٦٤°	(٥) ٩٦٤°	(٦) ١٠٧٠°

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٤٠°	(٢) ١٥٠°	(٣) −١٢٥°
(٤) −٢٤٠°	(٥) −١٨٠°	

اكتشف الخطأ

٨ اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان فى الضلع النهائى للزاوية التى قياسها (−١٣٥°)

إجابة كريم

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ١٨٠° = −٣١٥°

إجابة زياد

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ٣٦٠° = −٤٩٥°

أى الإجابتين صحيحة ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فأى مما يأتى يمثل قياسى زاويتين متكافئتين أيضًا حيث حـ ∈ ص ؟

(أ) (أ + حـ) ، (ب + حـ) (ب) (أ − حـ) ، (ب − حـ)

(جـ) (حـ أ) ، (حـ ب) (د) كل ما سبق صحيح.

(٢) إذا كان : أ ، − أ قياسى زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٣) إذا كان (٣ س − ٥)° أصغر قياس موجب ، (٣ ص − ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فى الوضع القياسى فإن : س − ص = ...

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

(٤) إذا كان (θ + ٢٠)° ، (٢٠ − ٨ θ)° هما القياسان الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب فإن أقل قيمة موجبة لـ θ تكون ....

(أ) ٢٠° (ب) ١٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٠°

(٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ....

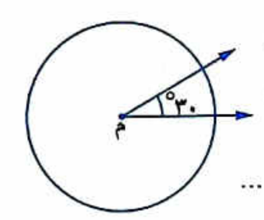
(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) الربع الثالث. (د) غير ذلك.

الدرس **2**

القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية



القياس الستينى للزاوية



تعتمد فكرته على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول ، وعليه فالزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة ويرمز لها بالرمز ١° والزاوية المركزية التى تحصر بين ضلعيها ٣٠ قوسًا من هذه الأقواس يكون قياسها ٣٠° وهكذا ...

وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى

الدرجة هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى ، وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **دقيقة** ويرمز لها بالرمز ١َ ، كما تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **ثانية** ويرمز لها بالرمز ١ً

أى أن ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

وفى هذا النوع من القياس تستخدم المنقلة كوسيلة لقياس الزوايا بالدرجات.

تذكر أنه :

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتحويل أجزاء الدرجات والدقائق إلى دقائق وثوانٍ والعكس

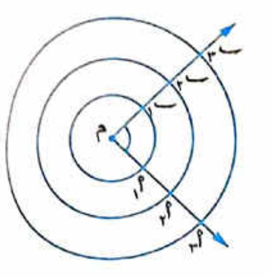
فمثلًا

- ٣٧ $\frac{٣}{٨}$° = ٣٧° ٢٢َ ٣٠ً — $37\frac{3}{8}$ [° ' ''] [=] $37^\circ\ 22'\ 30''$
- ٧٠° ٣٧َ ٣٠ً = ٧٠ $\frac{٥}{٨}$° — 70 [° ' ''] 37 [° ' ''] 30 [° ' ''] [=] [SHIFT] [S↔D] $70\frac{5}{8}$

القياس الدائرى للزاوية

يعتمد هذا القياس على الحقيقة الهندسية الآتية

في الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظر تساوى مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التى تحصر هذا القوس.



ففى الشكل المقابل :

$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{م أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{م أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{م أ_3} = \text{مقدار ثابت.}$$

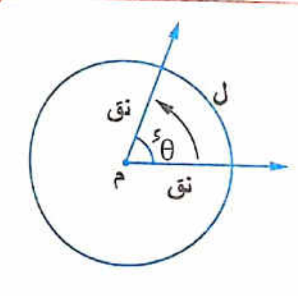
هذا المقدار الثابت يسمى بـ «القياس الدائرى للزاوية»

أى أن

$$\text{القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة} = \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

مما سبق يمكن صياغة التعريف السابق رمزيًا كما يلى :

تعريف



إذا كان $\theta^{د}$ هو القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق

وتقابل قوسًا طوله ل فإن : $\boxed{\theta^{د} = \frac{ل}{نق}}$

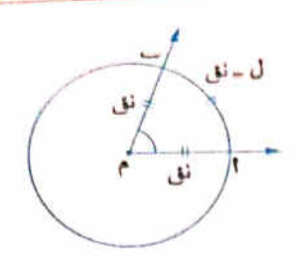
وحيث إن طول نصف قطر الدائرة نق مقدار ثابت فإن القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة يتناسب طرديًا مع طول القوس المقابل لها.

أى أن $\theta^{د} \propto ل$

وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى

الزاوية النصف قطرية هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى ، ويُرمز لها بالرمز $1^{د}$ ويُقرأ «واحد دائرى» (راديان) ، ويمكن تعريف الزاوية النصف قطرية كالتالى :

تعريف



الزاوية النصف قطرية هى الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة.

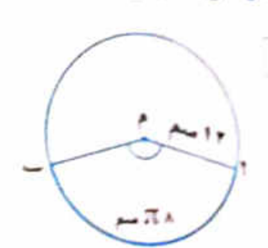
لاحظ أن $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ $\therefore \theta^{د} = \frac{نق}{نق} = ١^{د}$

فمثلًا

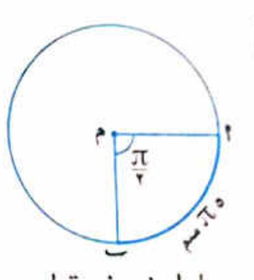
الزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرتها يكون قياسها = $٢^{د}$

مثال ١

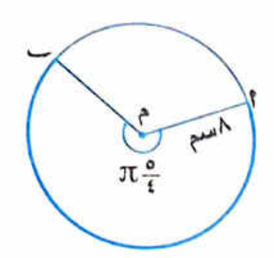
فى كل من الدوائر الآتية أوجد المطلوب أسفل كل شكل لأقرب جزء من عشرة :



ق (∠ أ م ب) بالقياس الدائرى.

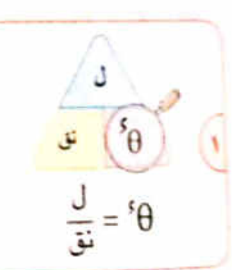


طول نصف قطر الدائرة م



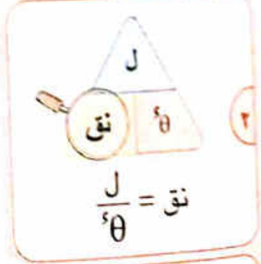
طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر.

الحل



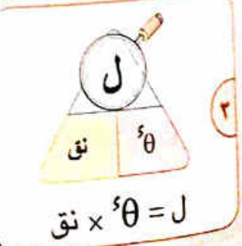
$\theta^{د} = ؟$ ، ل = ٨ π سم ، نق = ١٢ سم

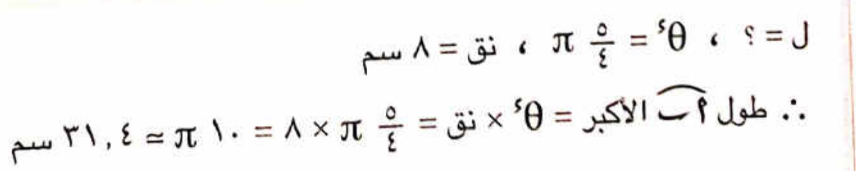
$\therefore$ ق (∠ أ م ب) بالقياس الدائرى $= \frac{ل}{نق} = \frac{٨ \pi}{١٢} = \frac{٢}{٣} \pi \simeq ٢,١^{د}$



نق = ؟ ، ل = ٥ π سم ، $\theta^{د} = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ طول نصف القطر $= \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{٥ \pi}{\frac{\pi}{٢}} = ٥ \pi \times \frac{٢}{\pi} = ١٠$ سم





ل = ؟ ، $\theta^{د} = \frac{٥}{٤} \pi$ ، نق = ٨ سم

$\therefore$ طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر $= \theta^{د} \times$ نق $= \frac{٥}{٤} \pi \times ٨ = ١٠ \pi \simeq ٣١,٤$ سم

ملاحظة

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة ويكون $\theta^{د} = ل$

فمثلًا في دائرة الوحدة الزاوية المركزية التي تقابل قوسًا طوله $\frac{١}{٢}\pi$ وحدة طول قياسها بالتقدير الدائرى = $\frac{١}{٢}\pi$ (راديان) $\simeq ١,٥٧^{د}$

حاول بنفسك

١ أوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية التي تحصر قوسًا في دائرة طوله ١٥ سم إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم.

٢ أوجد طول القوس في دائرة طول نصف قطرها ٨ سم إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله $\frac{٧\pi}{١٢}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها $\frac{٩}{٨}\pi$ وتحصر قوسًا طوله ٢٤ سم لأقرب رقم عشرى واحد.

العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الستينى

نعلم أنه في أى دائرة يكون : $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول هذا القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$

أى أنه في الشكل المقابل : $\frac{ق(\overset{\frown}{أب})}{٣٦٠^{\circ}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أب}}{٢\pi \text{ نق}}$

م

أ

ب

، ∵ ق(∠ أ م ب) = ق($\overset{\frown}{أب}$) ∴ $\frac{ق(∠ أ م ب)}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أب}}{\pi \text{ نق}}$

ويفرض أن : ق(∠ أ م ب) يساوى س° بالقياس الستينى ويساوى $\theta^{د}$ بالقياس الدائرى

وأن : طول $\overset{\frown}{أب}$ = ل ∴ $\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{ل}{\pi \text{ نق}}$

، ∵ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

∴ $\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}$ ومنها $\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ، $س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

مثال ٢

[١] أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية القياس الدائرى للزاوية التى قياسها الستينى ١٥ َ ٣٢ ً ٧٥°

[٢] أوجد القياس الستينى للزاوية التى قياسها الدائرى ٢,٣٨ ء

الحـل

[١] ∵ θ ء = س° × $\frac{\pi}{180°}$

∴ θ ء = ١٥ َ ٣٢ ً ٧٥° × $\frac{\pi}{180°}$ ≃ ١,٣١٨ ء

[٢] ∵ س° = θ ء × $\frac{180°}{\pi}$

∴ س° = ٢,٣٨ ء × $\frac{180°}{\pi}$ ≃ ٥٠ ً ٢١ َ ١٣٦°

حاول بنفسك

[١] حوِّل قياس الزاوية ١,٢ ء إلى قياس ستيني.

[٢] حوِّل قياس الزاوية ٣٠ َ ٧٢° إلى قياس دائرى مقربًا إلى رقمين عشريين.

معلومة إثرائية

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grade) وتساوى $\frac{1}{200}$ من قياس الزاوية المستقيمة.

وعلى هذا فإنه : إذا كانت س ، θ ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة ، والراديان ، والجراد

فإن : $\frac{س°}{180°} = \frac{\theta ء}{\pi} = \frac{ص}{200}$

ملاحظات

[١] إذا كان القياس الدائرى للزاوية يساوى π (راديان) فإن قياسها الستينى = $\pi \times \frac{180°}{\pi}$ = ١٨٠°

أى أن π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى

فمثلا $\frac{3}{5}\pi$ تكافئ $\frac{3}{5}$ × ١٨٠° = ١٠٨°

[٢] إذا علم القياس الستينى لزاوية ما وطلب تحويله إلى القياس الدائرى بدلالة π

فإننا نستخدم العلاقة : θ ء = س° × $\frac{\pi}{180°}$ ولا نعوض عن π

فمثلا ١٨° تكافئ ١٨° × $\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{10}$ ، ١٣٥° تكافئ ١٣٥° × $\frac{\pi}{180°} = \frac{3}{4}\pi$

مثال ٣

عيِّن الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

١ $٢,٠٢^{د}$ ٢ $-٣,٧^{د}$ ٣ $\frac{٥}{٤}\pi$

الحل

لإيجاد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة نوجد قياسها بالتقدير الستينى.

١ $\because$ س° $= \theta^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ٢,٠٢^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ١٥' ٤٤' ١١٥°$

$\therefore$ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{د}$ تكافئ $١٥'' ٤٤' ١١٥°$ بالتقدير الستينى.

، $\because$ الزاوية التى قياسها $١٥'' ٤٤' ١١٥°$ تقع فى الربع الثانى.

$\therefore$ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{د}$ تقع فى الربع الثانى.

٢ $\because$ س° $= -٣,٧^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq -١٥'' ٣٣' ٢١٨°$

، $\because$ الزاوية التى قياسها $-١٥'' ٣٣' ٢١٨°$ تكافئ : $-١٥'' ٣٣' ٢١٨° + ٢ \times ٣٦٠° = ٤٥'' ٢٦' ٥٠١°$

$\because$ الزاوية التى قياسها $٤٥'' ٢٦' ٥٠١°$ تقع فى الربع الرابع.

$\therefore$ الزاوية التى قياسها $-٣,٧^{د}$ تقع فى الربع الرابع.

٣ $\because$ $\frac{٥}{٤}\pi$ تكافئ $\frac{٥}{٤} \times ١٨٠° = ٢٢٥°$ ، $\because$ الزاوية التى قياسها $٢٢٥°$ تقع فى الربع الثالث.

$\therefore$ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

ملاحظة

يمكن تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة المعلوم قياسها الدائرى بدلالة π دون التحويل إلى القياس الستينى بملاحظة الشكل المقابل :

الربع الثانى	الربع الأول
$\frac{\pi}{٢} < \theta^{د} < \pi$	صفر $< \theta^{د} < \frac{\pi}{٢}$
$\pi < \theta^{د} < \frac{٣}{٢}\pi$	$\frac{٣}{٢}\pi < \theta^{د} < ٢\pi$
الربع الثالث	الربع الرابع

فمثلًا باستخدام الشكل المقابل يمكن مباشرة أن نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ فى المثال السابق

حيث إن $\pi < \frac{٥}{٤}\pi < \frac{٣}{٢}\pi$

$\therefore$ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

حاول بنفسك

أوجد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الآتية :

١ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٣}\pi$

٢ الزاوية التى قياسها $-٣,٠\ \pi$

٣ الزاوية التى قياسها $٥,٧^{د}$

٤ الزاوية التى قياسها $-٤,٦^{د}$

مثال ٤

أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها ١٧ً ٢٦َ ١٥٢° مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر.

الحل

$\because$ $\theta^{د} = س° \times \frac{\pi}{١٨٠°} = ١٧ً\ ٢٦َ\ ١٥٢° \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٢,٦٦٠٥^{د}$

$\therefore$ ل $= \theta^{د} \times$ نق $= ٢,٦٦٠٥ \times ١٠,٥ \simeq ٢٨$ سم

مثال ٥

أوجد كلاً من القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ١٢,٦ سم من دائرة طول نصف قطرها ٧,٢ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢,٦}{٧,٢} = ١,٧٥^{د}$ ، $س° = ١,٧٥^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٣ً\ ١٦َ\ ١٠٠°$

مثال ٦

أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية قياسها ٣٠° يقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل

$\because$ قياس الزاوية المحيطية = ٣٠°

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المناظرة لها = ٦٠°

$\therefore$ $\theta^{د} = ٦٠° \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore$ نق $= \frac{ل}{\theta^{د}} = ٥ \div \frac{\pi}{٣} = \frac{١٥}{\pi}$ سم

$\therefore$ محيط الدائرة $= ٢\pi$ نق $= ٢\pi \times \frac{١٥}{\pi} = ٣٠$ سم

مثال ٧

زاويتان مجموع قياسيهما الدائرى $٣\frac{١}{٧}^{د}$ والفرق بين قياسيهما الستينى ٣٠°

أوجد قياس كل منهما بالقياس الدائرى والقياس الستينى.

الحل

$\because$ $٣\frac{١}{٧}^{د} = \frac{٢٢}{٧} \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ١٨٠°$

وبفرض أن الزاويتين هما أ ، ب حيث : ق(∠أ) > ق(∠ب)

$\therefore$ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠° ، ق (∠ أ) − ق (∠ ب) = ٣٠°

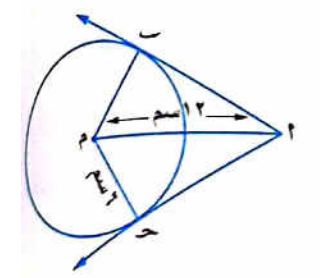
وبالجمع : $\therefore$ ٢ ق (∠ أ) = ٢١٠°

$\therefore$ ق (∠ أ) = ١٠٥° ومنها : ق (∠ ب) = ٧٥°

$\therefore$ ق (∠ أ) بالتقدير الدائرى = ١٠٥° × $\frac{\pi}{180°}$ ≃ ١,٨٣ ء

، ق (∠ ب) بالتقدير الدائرى = ٧٥° × $\frac{\pi}{180°}$ ≃ ١,٣١ ء

مثال ٨



فى الشكل المقابل :

أب ، أحـ مماسان للدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم

فإذا كان : أ م = ١٢ سم

فأوجد طول القوس ب حـ الأكبر لأقرب عدد صحيح.

الحل

$\because$ أحـ مماس للدائرة م $\therefore$ م حـ ⊥ أحـ

فى Δ أ م حـ : $\because$ ق (∠ أ حـ م) = ٩٠° ، م حـ = $\frac{1}{2}$ أ م

$\therefore$ ق (∠ حـ أ م) = ٣٠° $\therefore$ ق (∠ أ م حـ) = ٦٠°

، $\because$ م أ ينصف ∠ ب م حـ $\therefore$ ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

$\therefore$ ق (∠ ب م حـ) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

، $\because$ θء = س° × $\frac{\pi}{180°}$ $\therefore$ θء = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{180°}$ = $\frac{4}{3}$ π

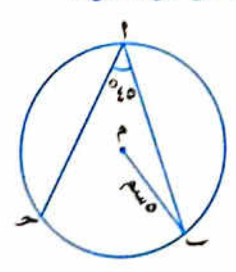
، $\because$ ل = θء × نق $\therefore$ طول ب حـ الأكبر = $\frac{4}{3}$ π × ٦ = ٨ π ≃ ٢٥ سم

حاول بنفسك



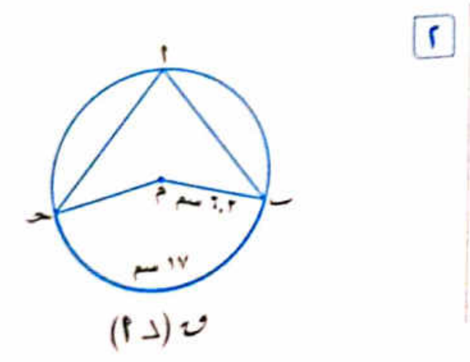
أوجد المطلوب أسفل كل شكل :

١



طول ب حـ

٢



ق (∠ أ)



على القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية



📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥ \pi}{٩}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) 📖 الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التى قياسها $\frac{٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) الزاوية التى قياسها $\left(-\frac{\pi}{٤}\right)$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٥) 📖 الزاوية التى قياسها $\frac{-٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٦) إذا كان القياس الستينى لزاوية $١٢ ٤٣^{\circ} ١٢'$ فإن قياسها الدائرى يساوى ....

(أ) $٠,٢٤^{د}$ (ب) $٠,٢٤ \pi$ (جـ) $٠,٢٨^{د}$ (د) $٠,٢٨ \pi$

(٧) الزاوية التى قياسها الدائرى $\frac{٨ \pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٨٠°

(٨) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) ٢π (ب) π (جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ (د) ٣π

(٩) 📖 إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى $١٨٠^{\circ} \times (ن - ٢)$ حيث ن عدد الأضلاع

فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧ \pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٥}$ (د) $\frac{٢ \pi}{٣}$

(١٠) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .... سم

(أ) ٥π (ب) ٤π (جـ) ٣π (د) ٢π

(١١) طول القوس الذى يقابل زاوية محيطية قياسها $\frac{١}{٢}$ ٦٧° فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم يساوى .... سم

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ١٠٨٠ (د) ١٢ π

(١٢) القوس الذى طوله ٥ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(١٣) القوس الذى طوله ٢ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم يقابل زاوية مركزية قياسها = ...

(أ) ٢ π (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(١٤) قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس الذى طوله يساوى طول قطر الدائرة مقربًا لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ١١٣° (ب) ١١٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(١٥) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

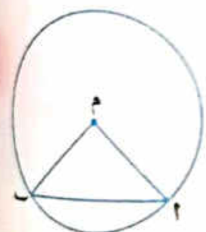
(١٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{١}{١٠}$ π فإن طول قوسه = ... سم

(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

(١٧) أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، ق(∠ أ) = ٦٠° فإن : ق(∠ جـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٨) فى الشكل المقابل :



لإيجاد طول $\overset{\frown}{أ ب}$ يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) Δ أ م ب متساوى الأضلاع محيطه ٣٠ سم فقط.

(ب) محيط الدائرة = ١٠ π سم فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(١٩) القياس الدائرى للزاوية الخارجة عن الشكل السباعى المنتظم يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٧}$ π (ب) $\frac{٢}{٧}$ π (جـ) $\frac{٣}{٧}$ π (د) $\frac{٤}{٧}$ π

(٢٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسين للدائرة م وكان

ق (د أ) = $\frac{٥}{١٢}$ π وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{بجـ}$ = ...

(أ) ٢-	(ب) $\frac{٢٨}{\pi}$	(جـ) ٢٨	(د) ٢٠ π

(٢١) الزاوية التى قياسها ٣٠° + ١٨٠° (٢ ن + ١) حيث ن ∈ ص تكافئ زاوية قياسها الدائرى هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$	(ب) π	(جـ) $\frac{٧}{٦}$ π	(د) $\frac{٥}{٣}$ π

(٢٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{٣}{٨}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٣٠°	(ب) ٣٠َ ٦٧°	(جـ) ١٣٥°	(د) ٤٣° تقريبًا.

(٢٣) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال يكون قياس أى زاوية مركزية فيها بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ طول قوسها. (ب) $\frac{١}{٢}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.

(٢٤) القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية مركزية تقابل قوسًا طوله ٣ سم فى دائرة مساحة سطحها ١٦ π سم^{٢} = ...

(أ) (١^{د} ، ١٨٠°) (ب) (١,٥^{د} ، ٨٦°)

(جـ) (١,٧٥^{د} ، ٩٠°) (د) (٠,٧٥^{د} ، ٥٨َ ٤٢°)

(٢٥) الزاوية التى قياسها ١^{د} تسمى زاوية ....

(أ) ربعية.	(ب) منفرجة.	(جـ) مركزية.	(د) نصف قطريه.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد بدلالة π القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى :

(١) ١٣٥°	(٢) ٩٠°	(٣) 📖 ٣٠٠°	(٤) -٢٣٥°
(٥) -٢١٠°	(٦) ٣٠َ ١١٢°	(٧) 📖 ٣٩٠°	(٨) 📖 ٧٨٠°

٢ أوجد القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

(١) ٥٨°	(٢) 📖 ٥٦,٦°	(٣) ١٥َ ٣٧°
(٤) ٩ً ٣٨َ ١١٥°	(٥) ٥٤ً ٢٥٧°	(٦) 📖 ٤٨ً ٥٠َ ١٦٠°

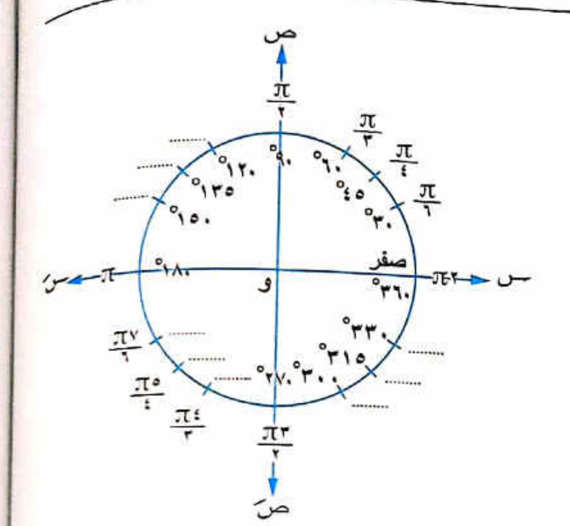
٣ أوجد القياس الستينى (بالدرجات والدقائق والثوانى) لكل من الزوايا التى قياساتها الدائرية كالآتى :

(١) $\frac{11}{15}\pi$　　(٢) ٠,٧٢ π　　(٣) ٠,٤٩ ء

(٤) -١,٦٧ ء　　(٥) ٢,٢٧ ء　　(٦) $-٣\frac{1}{2}$ ء

٤ الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة بعضها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كُتب بالدرجات (داخل الدائرة).

اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.



٥ أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله (ل) فى دائرة طول نصف قطرها (نق) فى كل من الحالات الآتية :

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم　　(٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم

(٣) ل = ٢ π سم ، نق = ٦ سم　　(٤) ل = ١٥,٧٢ سم ، نق = ٩,١٧ سم

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

(١) $\theta = \frac{9}{8}\pi$ ، ل = ٢٢,٥ سم　　(٢) θ = ٠,٧٦٧ ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم

(٣) θ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم　　(٤) θ = ٧٨° ٣٦َ ٢٦ً ، ل = ٤٣,٩٢ سم

٧ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ ء　　(٢) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ ء

(٣) نق = ٧,٥ سم ، θ = ٦٧° ٤٠َ　　(٤) نق = ١٥ سم ، θ = ١٠٤° ٥٨َ ٦ً

٨ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥° «٤٨ سم»

٩ أوجد القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ أمثال طول نصف قطر دائرتها.
«٣ ء ، ١٧١° ٥٣َ ١٤ً»

١٠ إذا كان قياس زاوية مركزية فى دائرة يساوى ١٠٥° وتحصر قوسًا طوله $\frac{٧}{٣}$ π سم أوجد طول قطر الدائرة.

«٨ سم»

١١ مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$

أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة.

« $\frac{٥}{١٢}$ π ، ٧٥° »

١٢ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\left(\frac{١١}{٦}\right)^{ء}$ وقياس زاوية أخرى منه $\left(٢\frac{٤}{٩}\right)^{ء}$ وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥°

أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$

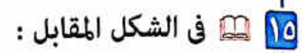
«٧٠° ، $\left(\frac{١١}{٩}\right)^{ء}$»

١٣ زاويتان مجموع قياسيهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٥}$ أوجد قياسيهما بالتقدير الستينى والدائرى.

«٥٣° ، ١٧° ، $\frac{٥٣}{١٨٠}$ π ، $\frac{١٧}{١٨٠}$ π»

١٤ زاويتان متكاملتان الفرق بين قياسيهما $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسى الزاويتين بالتقديرين الستينى والدائرى.

«١٢٠° ، ٦٠° ، $\frac{٢}{٣}$ π ، $\frac{١}{٣}$ π»

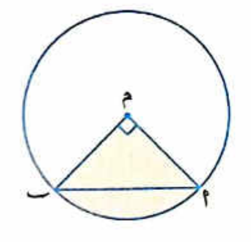


١٥ في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية

فى م تساوى ٣٢ سم٢

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

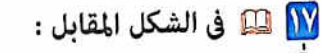


«٢٨,٥٧ سم»

١٦ $\overline{\text{س ص}}$ قطر فى الدائرة م طوله ١٨ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث ق (∠ س ص ع) = ٦٠°

أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{س ع}}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

«٣,١٤ سم»



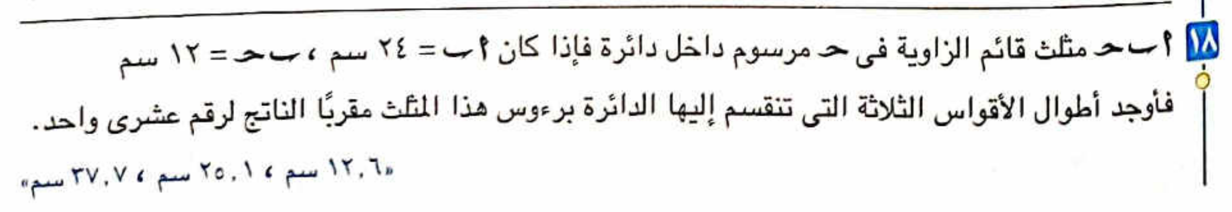
١٧ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ح}}$ مماسان للدائرة م

، ق (∠ ح أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{ب ح}}$

«٢٩ سم»



١٨ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ح مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = ٢٤ سم ، ب ح = ١٢ سم

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

«١٢,٦ سم ، ٢٥,١ سم ، ٣٧,٧ سم»

١٩ دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم تمر برءوس مثلث أ ب جـ فإذا كان :

ق(∠ب أ جـ) = ٦٠° ، ق(∠أ ب جـ) = ٥٤°

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث.

«١٥,٧ سم ، ١٤,١ سم ، ١٧,٣ سم»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا قطع القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٧٢° فى دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم وثنى ليكون دائرة فإن طول نصف قطر الدائرة الناتجة يساوى .... سم

(أ) ١,٤ (ب) ٢,٨ (جـ) ٥,٦ (د) ٧

(٢) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٠ سم

فإذا كان طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ∈]٥ ، ٦[

فإن قيمة س يمكن أن تكون ....

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٨° (د) ٣٤°

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه يساوى ....ء

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٥) إذا كان طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٠° فى دائرة يساوى طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٨٠° فى دائرة أخرى فإن النسبة بين طولى نصفى قطرى الدائرتين هى ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(٦) أسطوانة تدور ٤٥ دورة فى الدقيقة حول محورها فإن قياس الزاوية التى تدورها نقطة على سطحها الجانبى فى الثانية الواحدة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢π

(٧) (قياس الدائرة)^{د} > ن حيث ن عدد صحيح موجب فإن أكبر قيمة لـ ن هى ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٨) المسافة التى يقطعها رأس عقرب الدقائق الذى طوله ٨ سم من الساعة السادسة صباحًا حتى الساعة الثالثة والربع عصرًا تساوى .... سم

(أ) ٥٩٢ π (ب) ١٤٨ π (جـ) $\frac{٣٧}{٢}$ π (د) $\frac{٣٧}{٤}$ π

(٩) فى الشكل المقابل :

إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاث لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة فى الاتجاه الموضح بالسهم فإن قياس الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح ....

(أ) $\frac{-\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) ٢ π

(١٠) فى الشكل المقابل :

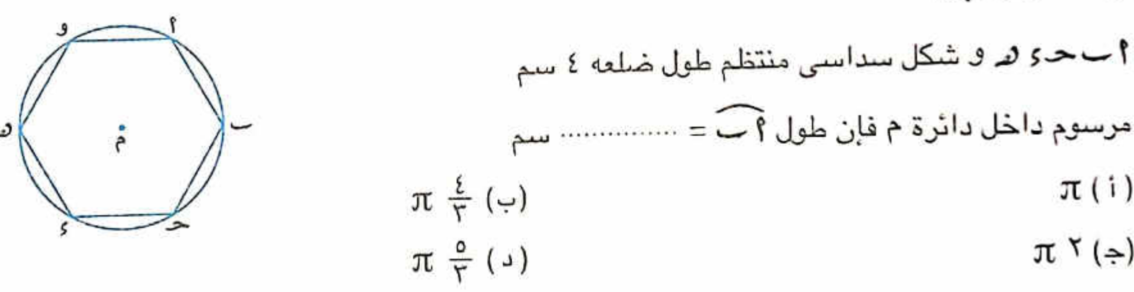
دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٢١ سم ، ٧ سم على الترتيب

إذا دارت الدائرة ن دورة كاملة من نقطة أ إلى نقطة ب

فإن : ق (∠ أ م ب) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٥}$ (د) π

(١١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم

مرسوم داخل دائرة م فإن طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = ... سم

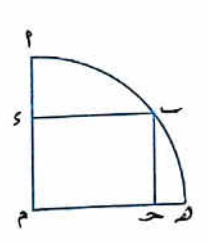
(أ) π (ب) $\frac{٤}{٣}$ π

(جـ) ٢ π (د) $\frac{٥}{٣}$ π

٢ مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ فى الوضع القياسى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

«ص = $\sqrt{٣}$ س»

٣ فى الشكل المقابل :



ربع دائرة ، رسم بداخله المستطيل ب حـ م ء

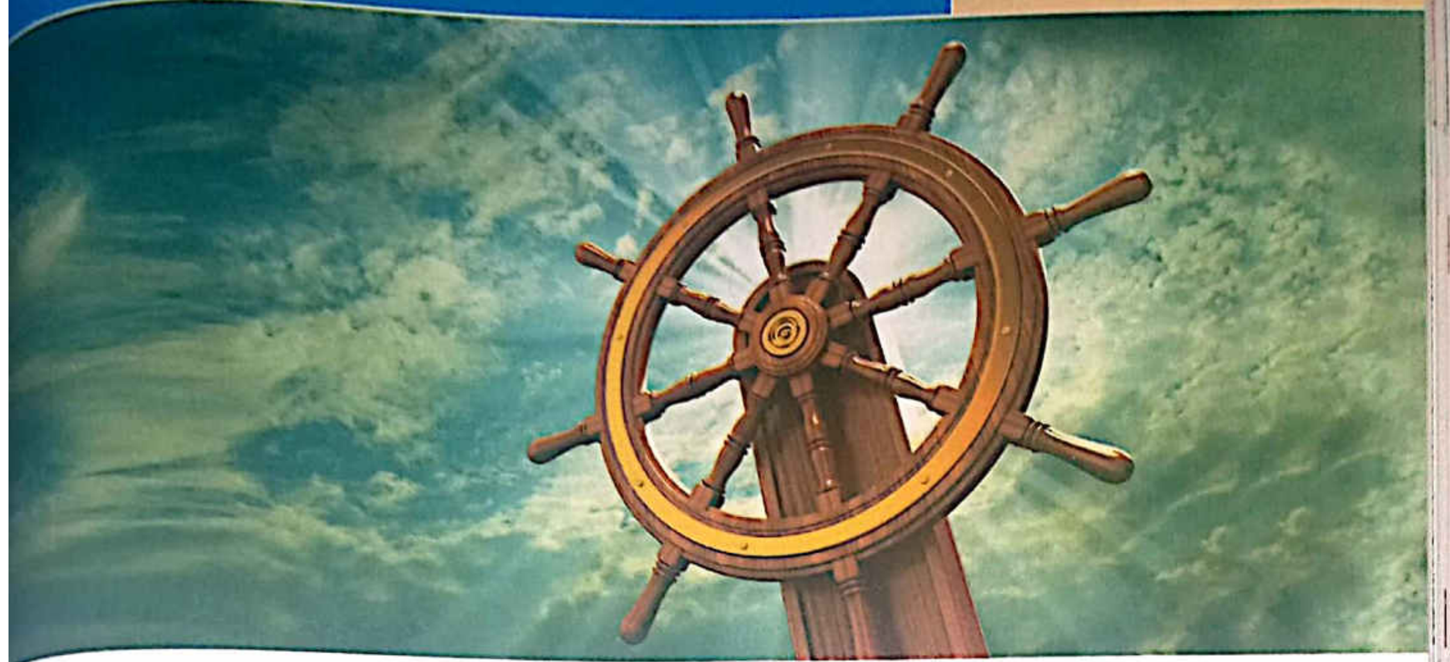
بحيث حـ ء = ١٠ سم

أوجد : طول القوس $\overset{\frown}{أ ب هـ}$

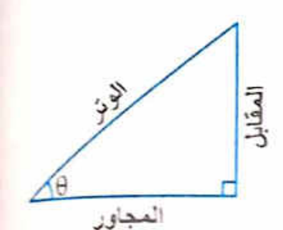
«٥ π سم»



الـدوال المثلثيـة



* درسنا فيما سبق النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة وعلمنا أنه :

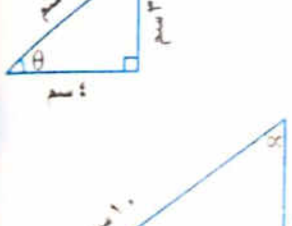


• فى أى مثلث قائم الزاوية يكون :

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \text{جتا } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

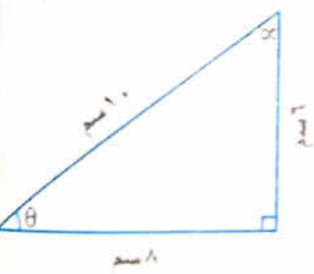
$$, \quad \text{ظا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

• ففى الشكل المقابل :



جا $\theta = \frac{٣}{٥}$	جتا $\theta = \frac{٤}{٥}$	ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$
جا $\propto = \frac{٤}{٥}$	جتا $\propto = \frac{٣}{٥}$	ظا $\propto = \frac{٤}{٣}$

• وإذا رسمنا مثلثًا آخر مشابهًا للمثلث السابق نجد أن :



جا $\theta = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$	جتا $\theta = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$	ظا $\theta = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$
جا $\propto = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$	جتا $\propto = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$	ظا $\propto = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

مما سبق نستنتج أن :

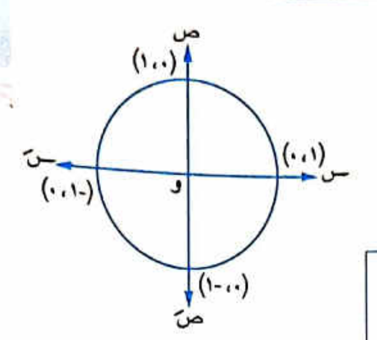
١ جا θ ، جتا θ ، ظا θ فى المثلثين متساويين.

أى أن النسبة المثلثية للزاوية ثابتة لا تتوقف على مساحة المثلث.

٢ جا θ ≠ جا ∝ ، جتا θ ≠ جتا ∝ ، ظا θ ≠ ظا ∝ فى أى من المثلثين.

أى أن النسبة المثلثية تتغير بتغير قياس الزاوية وهذا ما يُعرف بـ «الدوال المثلثية».

دائرة الوحدة



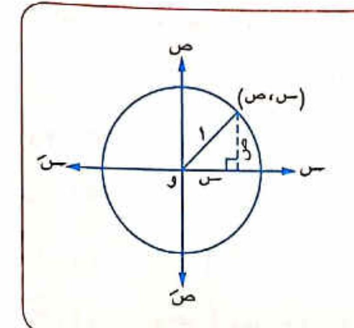
فى النظام الإحداثى المتعامد الدائرة التى مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها وحدة الأطوال تُسمى **دائرة الوحدة.**

ولاحظ من الشكل المقابل أن :

- دائرة الوحدة تقطع محور السينات فى نقطتين هما : (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)
- دائرة الوحدة تقطع محور الصادات فى نقطتين هما : (٠ ، ١) ، (٠ ، −١)

ملاحظة

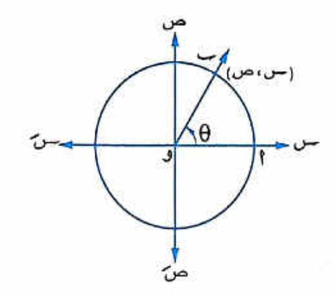
إذا كانت النقطة (س ، ص) ∈ دائرة الوحدة فإن :



س^{٢} + ص^{٢} = ١ من نظرية فيثاغورث

، س ∈ [−١ ، ١] ، ص ∈ [−١ ، ١]

الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها



إذا رسمنا الزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى وقطع ضلعها النهائى و ب⃖ دائرة الوحدة فى النقطة

ب (س ، ص) ، وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :



أولاً الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

١ جيب تمام الزاوية = الإحداثى السينى لنقطة ب   **أى أن**   حتا θ = س

٢ جيب الزاوية = الإحداثى الصادى لنقطة ب   **أى أن**   حا θ = ص

٣ ظل الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى الصادى لنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى لنقطة ب}}$ **أى أن**   ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{حا}\ \theta}{\text{حتا}\ \theta}$ حيث س ≠ ٠ .

لاحظ أنه

يمكن كتابة النقطة ب (س ، ص) على الصورة (حتا θ ، حا θ)

ثانيًا / مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

[١] قاطع الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث س ≠ ٠

[٢] قاطع تمام الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

[٣] ظل تمام الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

مثال ١

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة أ فى كل مما يأتى :

[١] أ $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

[٢] أ (−١ ، ٠)

[٣] أ $\left(\frac{-١}{٢} ، \text{ص}\right)$ حيث ص > ٠

[٤] أ (−س ، س) حيث س > ٠

الحل

[١] $\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٤}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{٤}{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٣}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٥}{٤}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

[٢] $\text{جتا}\,\theta = -١$ ، $\text{جا}\,\theta = ٠$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٠}{-١} = ٠$

، $\text{قا}\,\theta = -١$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{٠}$ (غير معرف) ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

[٣] ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $\left(\frac{-١}{٢}\right)^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $\text{ص}^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\text{ص} = \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ∵ ص > ٠ ∴ $\text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ أ $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{-١}{٢} = -\sqrt{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = -٢$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

[٤] ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $(-\text{س})^٢ + \text{س}^٢ = ١$ ∴ $٢\,\text{س}^٢ = ١$ ∴ $\text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{س} = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ∵ س > ٠ ∴ $\text{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ أ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١$

، $\text{قا}\,\theta = -\sqrt{٢}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \sqrt{٢}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = -١$

حاول بنفسك

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى ، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب إذا كان :

[١] ب $\left(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ [٢] ب (٠ ، س) ، س < ٠ .   [٣] ب (- ص ، - ص) ، ص > ٠ .

ملاحظة

الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية.

أى أنه لجميع قيم ن ∈ ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) يكون :

- جتا (θ + ٢ ن π) = جتا θ = س ، قا (θ + ٢ ن π) = قا θ = $\frac{1}{س}$ حيث س ≠ ٠ .
- جا (θ + ٢ ن π) = جا θ = ص ، قتا (θ + ٢ ن π) = قتا θ = $\frac{1}{ص}$ حيث ص ≠ ٠ .
- ظا (θ + ٢ ن π) = ظا θ = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، ظتا (θ + ٢ ن π) = ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ حيث ص ≠ ٠ .

فمثلًا • جتا ٤٢٠° = جتا (٦٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠° • قا ٨٤٠° = قا (١٢٠° + ٢ × ٣٦٠°) = قا ١٢٠°

• ظا (-١٥٠٠°) = ظا (٣٠٠° - ٥ × ٣٦٠°) = ظا ٣٠٠°

إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت : ∠ أ و ب الموجهة فى وضعها القياسى ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص)

وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :

∠ أ و ب تقع فى أحد الأرباع كما يلى

الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[	θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[	θ ∈]π ، $\frac{3\pi}{2}$[	θ ∈]$\frac{3\pi}{2}$ ، ٢π[
س > ٠ ، ص > ٠ .	س < ٠ ، ص > ٠ .	س < ٠ ، ص < ٠ .	س > ٠ ، ص < ٠ .
جميع الدوال المثلثية موجبة.	جا θ ، قتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.	ظا θ ، ظتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.	جتا θ ، قا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.

• ونلخص ما سبق فى الجدول والشكل الآتيين :

الربع	الفترة التى تنتمى إليها θ	إشارة حا ، قا	إشارة حا ، قتا	إشارة طا ، ظتا
الأول	$]\cdot ، \frac{\pi}{٢}[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$	−	+	−
الثالث	$]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$	+	−	−

جميع الدوال موجبة
حا ، قتا موجبتان
طا ، ظتا موجبتان
حتا ، قا موجبتان
س
س َ
ص
ص َ

فمثلًا • طا ٣٢٠° تكون سالبة لأن :

الزاوية التى قياسها ٣٢٠° تقع فى الربع الرابع ← ٢٧٠° < ٣٢٠° < ٣٦٠°

• حا ١٦٠° تكون موجبة لأن :

الزاوية التى قياسها ١٦٠° تقع فى الربع الثانى ← ٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠°

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

مثال ٢

ابحث إشارة كل من النسب المثلثية الآتية :

١ حا ٩٧٠° ٢ حتا $\frac{٧\pi}{٣}$ ٣ طا (−٢٠٠°) ٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$

الحل

١ حا ٩٧٠° = حا (٢٥٠° + ٢ × ٣٦٠°) = حا ٢٥٠° ، ∵ ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° أى تقع فى الربع الثالث.

∴ حا ٢٥٠° سالبة. ∴ حا ٩٧٠° سالبة.

٢ حتا $\frac{٧}{٣}\pi$ = حتا $(\frac{٧}{٣} \times ١٨٠°)$ = حتا ٤٢٠° = حتا (٦٠° + ٣٦٠°) = حتا ٦٠°

، ∵ ٠° < ٦٠° < ٩٠° أى تقع فى الربع الأول.

∴ حتا ٦٠° موجبة. ∴ حتا $\frac{٧}{٣}\pi$ موجبة.

٣ طا (−٢٠٠°) = طا (−٢٠٠° + ٣٦٠°) = طا ١٦٠° ، ∵ ٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠° أى تقع فى الربع الثانى.

∴ طا ١٦٠° سالبة. ∴ طا (−٢٠٠°) سالبة.

٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ = قتا $(-\frac{٨}{٥} \times ١٨٠°)$ = قتا (−٢٨٨°) = قتا (−٢٨٨° + ٣٦٠°) = قتا ٧٢°

، ∵ ٠° < ٧٢° < ٩٠° أى تقع فى الربع الأول.

∴ قتا ٧٢° موجبة. ∴ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ موجبة.

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من النسب المثلثية الآتية : [١] جا ٦٢٠° [٢] قا (-٣٠°) [٣] ظا $\frac{١١}{٣}\pi$

مثال ٣

إذا كانت ب (س ، $\frac{١}{٢}$) نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$ **فأوجد قيمة كل من :** جا θ ، ظا θ

الحل

∵ $٩٠° < \theta < ١٨٠°$ ∴ ب تقع فى الربع الثانى.

، ∵ لأى نقطة (س ، ص) على دائرة الوحدة يكون $س^٢ + ص^٢ = ١$

∴ $س^٢ + \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $س = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ النقطة ب (س ، $\frac{١}{٢}$) فى الربع الثانى. ∴ س سالبة.

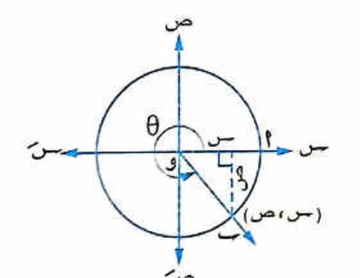
∴ $س = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $ب = \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ جا $\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا $\theta = \frac{ص}{س} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال ٤

إذا كانت : $\theta \in \left]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi\right[$ وكانت : جتا $\theta = \frac{٥}{١٣}$ **فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ**

الحل



نفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن نقطة ب هى (س ، ص)

∴ س = جتا $\theta = \frac{٥}{١٣}$ ، ص = جا θ حيث جا $\theta < ٠$

، ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $\left(\frac{٥}{١٣}\right)^٢ +$ جا$^٢ \theta = ١$

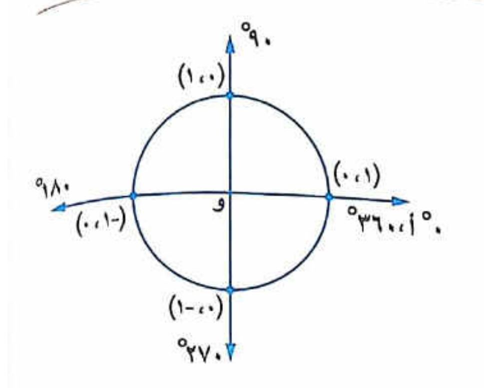
∴ جا$^٢ \theta = ١ - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ جا $\theta = -\frac{١٢}{١٣}$ ∴ $ب = \left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

ويكون : ظا $\theta = -\frac{١٢}{٥}$ ، قا $\theta = \frac{١٣}{٥}$ ، قتا $\theta = -\frac{١٣}{١٢}$ ، ظتا $\theta = -\frac{٥}{١٢}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ وكانت : جتا $\theta = \frac{-٤}{٥}$ **فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ**

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



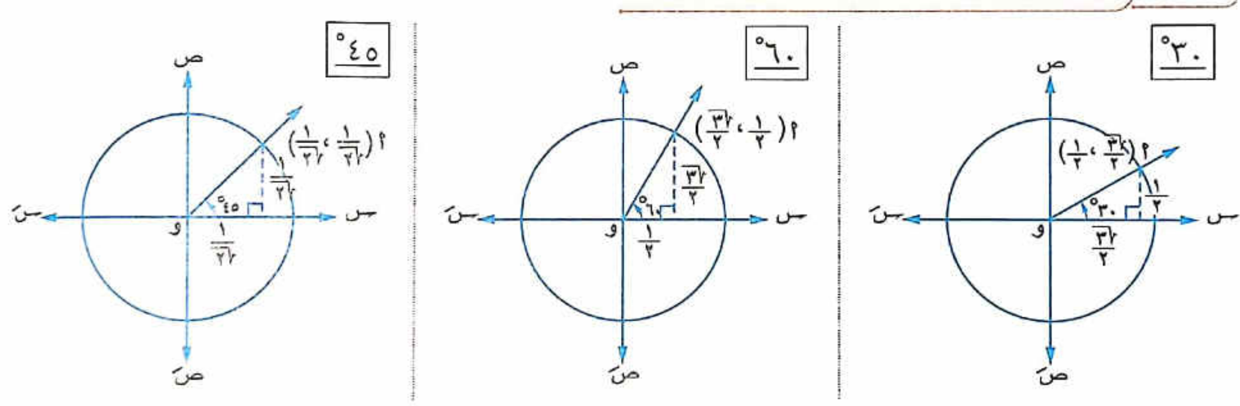
أولًا / الزوايا الربعية (٠° أو ٣٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠°)

الشكل المقابل يوضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا الربعية مع دائرة الوحدة ومنه يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا

كما هو موضح بالجدول التالى :

θ بالقياس الستينى	θ بالقياس الدائرى	حا θ	حتا θ	ظا θ	قتا θ	قا θ	ظتا θ
٠° أ، ٣٦٠°	٠ أ، ٢ π	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
١٨٠°	π	٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف
٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف	٠

ثانيًا / الزوايا التى قياساتها (٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°)



الأشكال السابقة توضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا التى قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة ومنها يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا كما هو موضح بالجدول التالى :

θ بالقياس الستينى	θ بالقياس الدائرى	حا θ	حتا θ	ظا θ	قتا θ	قا θ	ظتا θ
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$
٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١	$\sqrt{٢}$	$\sqrt{٢}$	١

مثال ٥

أوجد قيمة :

٤ حا ٣٠° حا ٩٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + ٥ ظا ٤٥° + ١٠ حتا^{٢} ٤٥° حا ٢٧٠° − ظا ٣٠° حا ١٨٠°

الحل

المقدار = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١ − ١ × ٢ + ٥ × ١ + ١٠ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × (−١) − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × صفر

= ٢ − ٢ + ٥ − ٥ − صفر = صفر

مثال ٦

أثبت أن : حا^{٢} ٦٠° + حا^{٢} ٤٥° + حا^{٢} ٣٠° = حتا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ حا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ حتا π + حتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ حا $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = حتا^{٢} ٣٠° حا ٩٠° − $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢} ٦٠° حتا ١٨٠° + حتا^{٢} ٦٠° حا ٢٧٠°

= $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ١ − $\frac{١}{٣}$ × $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ × (−١) + $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ × (−١)

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٧

أوجد قيمة س التي تحقق : س حا $\frac{\pi}{٦}$ حتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = حتا^{٢} ٣٠° حا $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ س حا ٣٠° حتا^{٢} ٤٥° = حتا^{٢} ٣٠° حا ٩٠°

∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ١

∴ $\frac{١}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣

مثال ٨

إذا كانت : ٠° < س < ٩٠° فأوجد قيمة س التى تحقق :

جا س قا² ٤٥° = ظا² ٦٠° − ٢ جتا ٣٦٠°

الحل

∵ جا س قا² ٤٥° = ظا² ٦٠° − ٢ جتا ٣٦٠°

∴ جا س × $(\sqrt{٢})^٢$ = $(\sqrt{٣})^٢$ − ٢ × ١

∴ ٢ × جا س = ٣ − ٢ = ١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠°

حاول بنفسك

١ أوجد قيمة : جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

٢ إذا كانت : ٠° ≤ س ≤ ٩٠°

فأوجد قيمة س التى تحقق أن : جتا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°



تمارين 9 على الـدوال المثلثيـة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$　(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(٢) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ ومرسومة فى وضع قياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{-3}{5} ، \frac{4}{5}\right)$ فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{5}{4}$　(ب) $\frac{-5}{3}$　(جـ) $\frac{-4}{3}$　(د) −٠,٧٥

(٣) إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى $\left(\frac{-5}{13} ، \frac{12}{13}\right)$

فإن : جتا θ − جا θ = ...

(أ) $\frac{17}{13}$　(ب) $\frac{7}{13}$　(جـ) $-\frac{7}{13}$　(د) $\frac{-17}{13}$

(٤) زاوية موجهة فى وضعها القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٣ ، ٤)

فإن ضلعها الابتدائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) (٣ ، ٠)　(ب) (١ ، ٠)　(جـ) (٠,٦ ، ٠,٨)　(د) $\left(\frac{4}{3} ، \frac{5}{3}\right)$

(٥) إذا كان : ظا θ = $\frac{1}{2}$ حيث θ زاوية حادة فى وضعها القياسى فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) (٢ ، ١)　(ب) (١ ، ٢)

(جـ) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} ، \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$　(د) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} ، \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(٦) إذا كان : جا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة　فإن : θ = ...

(أ) °٣٠　(ب) °٦٠　(جـ) °٤٥　(د) °٩٠

(٧) إذا كان : جا θ = −١ ، جتا θ = ٠　فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$　(ب) π　(جـ) $\frac{3\pi}{2}$　(د) 2π

(٨) إذا كانت : ظتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٩) إذا كان : ظا θ = ١ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(١٠) إذا كان : جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١١\pi}{٦}$

(١١) إذا كانت : جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(١٢) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

فإن قياس هذه الزاوية = ...°

(أ) ١٥٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢١٠

(١٣) إذا كان : جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٤) إذا كانت : جتا θ > ٠ ، جا θ < ٠ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٥) إذا كان : جا $\theta = \frac{-١}{٢}$ ، قا $\theta = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٦) إذا كان : جا $\theta = \frac{-١}{٢}$ ، جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن الزاوية التى قياسها θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٧) إذا كانت θ قياس زاوية تقع فى الربع الثالث فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) جا θ جتا θ < ٠ (ب) قا θ قتا θ < ٠

(جـ) ظا θ ظتا θ < ٠ (د) جا θ ظا θ < ٠

(١٨) ٢ جا ٤٥° = ...

(أ) جا ٩٠° (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٢

(١٩) $ظا^٢$ ٣٠° − $قا^٢$ ٦٠° + $قتا^٢$ ٤٥° = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(٢٠) جا $\left(-\frac{١٢}{٥}\pi\right)$ = ...

(أ) جا $\frac{١٢}{٥}\pi$ (ب) جا ٧٢° (جـ) جا ٢٨٨° (د) جا $\frac{١}{٥}\pi$

(٢١) جا ٠° + جتا ٠° + ظا ٠° = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٢) جتا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ − جا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ = ...

(أ) جتا^٢ π (ب) جا^٢ $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) جتا π (د) جتا $\frac{\pi}{٢}$

(٢٣) جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٢٤) جا ٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠° + جا ٢٧٠° = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢٥) $ظا^٢$ ٣٠° + ٢ $جا^٢$ ٤٥° + $جتا^٢$ ٩٠° = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢

(٢٦) ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° ظتا ٤٥° = ...

(أ) جتا ٦٠° (ب) ٢ جتا ٣٠° (جـ) ٢ جا $\frac{\pi}{٦}$ (د) ظا π

(٢٧) جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظتا ٤٥° = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ (د) ١

(٢٨) $\frac{ظا^٢ ٦٠° - ظا^٢ ٤٥°}{قا^٢ ٣٠° - قتا^٢ ٤٥°}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٣

(٢٩) إذا كان : أ ب حـ ء مربع فإن : $جا^٢$ (∠ أ حـ ء) + $جا^٢$ (∠ أ ب ء) + ظا (∠ أ ء ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١ + $\sqrt{٢}$

(٣٠) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° فإن : جا ب + $جتا^٢$ حـ = ...

(أ) ١ + $\sqrt{٣}$ (ب) ١ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ $\frac{٢}{٣}$ (د) ١ $\frac{١}{٤}$

(٣١) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ)

فإن : قا أ + قتا حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٢) إذا كانت : $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{3}{5}$ فإن : $\text{قتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $-\frac{3}{2}$ (د) $-\frac{2}{3}$

(٣٣) إذا كان : $\text{جا}\,\theta = \frac{-24}{25}$ ، $\theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$ فإن : $\frac{\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} =$ ....

(أ) $\frac{17}{24}$ (ب) $\frac{-17}{24}$ (جـ) $\frac{24}{17}$ (د) $\frac{-24}{17}$

(٣٤) إذا كانت : $س \in [0° ، 90°]$ وكان $\text{جتا}\,س = \frac{\text{جا}\,60°}{\text{جا}\,90°} - \frac{\text{جا}\,0°}{\text{جا}\,45°}$ فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٠° (د) ٩٠°

(٣٥) إذا كانت : $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{12}{13}$ فإن : $\sqrt{\text{قتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{5}{13}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{15}{26}$

(٣٦) إذا كان الضلع النهائى لزاوية فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى نقطة أ فى الربع الرابع حيث الإحداثى السينى للنقطة أ يساوى $\frac{5}{13}$ فإن : أ = ...

(أ) $\left(\frac{5}{13} ، \frac{-12}{13}\right)$ (ب) $\left(\frac{5}{13} ، \frac{1}{13}\right)$ (جـ) $\left(\frac{5}{13} ، \frac{12}{13}\right)$ (د) $\left(\frac{5}{13} ، \frac{-8}{13}\right)$

(٣٧) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{1}{2} ، ص\right)$ حيث ص > ٠ فإن : $\text{جا}\,\theta =$ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣٨) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى (−س ، س) حيث س < ٠ فإن جيب هذه الزاوية = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(٣٩) الضلع النهائى للزاوية التى قياسها ٣٠° فى وضعها القياسى يقطع الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٦ سم فى النقطة ....

(أ) $(3 ، 6)$ (ب) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ (جـ) $(3 ، 3\sqrt{3})$ (د) $(3\sqrt{3} ، 3)$

(٤٠) جيب الزاوية الموجهة θ التى فى الوضع القياسى يقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة (١ ، ٠) يساوى جيب تمام الزاوية الموجهة α فى الوضع القياسى والتى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) $\left(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (ب) $(-1 ، 0)$

(جـ) $(0 ، -1)$ (د) $\left(س ، -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(٤١) جيب الزاوية الربعية ....

(أ) يساوى صفر.
(ب) $\in$]-١ ، ١[
(جـ) $\in$ {٠ ، ١ ، -١}
(د) أكبر من أو يساوى صفر.

(٤٢) النسب المثلثية الآتية كلها لنفس الزاوية التى قياسها θ وتقع فى الربع الثالث ما عدا ....

(أ) جا θ = $\frac{-٣}{\sqrt{١٠}}$
(ب) قا θ = $-\sqrt{١٠}$
(جـ) ظتا θ = $\frac{١}{٣}$
(د) قتا θ = ٣

(٤٣) إذا كان : جا س + جتا ص = ٢ ، س ، ص $\in$ [٠ ، ٣٦٠°[فإن : س + ص = ...

(أ) ٢
(ب) ١
(جـ) ٩٠°
(د) ١٨٠°

(٤٤) إذا كان : θ = $\frac{\pi}{٤}$ (٨ ن + ٢) ، ن $\in$ ص فإن : جتا θ = ...

(أ) ١
(ب) -١
(جـ) صفر
(د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٤٥) إذا كان المستقيم الذى معادلته : ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ١ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$
(ب) $\frac{٣}{٥}$
(جـ) $\frac{٤}{٥}$
(د) $\frac{٤}{٣}$

(٤٦) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٦ سم ،
وكان : ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{٥}{٢}$ فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٥
(ب) ١٠
(جـ) ٣,٦
(د) ١٥

(٤٧) إذا كان هـ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى لها ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) حيث س < صفر ، ظا هـ = $-\frac{٣}{٤}$ فإن : س + ص = ...

(أ) $-\frac{١}{٥}$
(ب) $\frac{١}{٥}$
(جـ) صفر
(د) ١

(٤٨) إشارة الدالة د : د (س) = قا س تكون ....

(أ) موجبة فى]٠° ، ٩٠°[، موجبة فى]٢٧٠° ، ٣٦٠°[
(ب) سالبة فى]٠° ، ٩٠°[، سالبة فى]٢٧٠° ، ٣٦٠°[
(جـ) سالبة فى]٠° ، ٩٠°[، موجبة فى]٢٧٠° ، ٣٦٠°[
(د) موجبة فى]٠° ، ٩٠°[، سالبة فى]٢٧٠° ، ٣٦٠°[

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ابحث إشارات النسب المثلثية الآتية :

(١) حتا ٣٥٠° (٢) طا ١٠٠° (٣) قا ٢٦٥° (٤) حا $\frac{5\pi}{4}$

(٥) قتا $\frac{3\pi}{7}$ (٦) طتا $\frac{3\pi}{4}$ (٧) طا ٤١٠° (٨) قتا ١٢٠٠°

(٩) حتا (−١٦٥°) (١٠) طتا $\frac{32\pi}{3}$ (١١) طتا $\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ (١٢) قا $\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

٢ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة :

(١) $\left(\frac{2}{3} ، \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ (٢) $\left(-\frac{3}{5} ، -\frac{4}{5}\right)$ (٣) (٠ ، −١)

٣ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ في كل من الحالات الآتية :

(١) ب(٠,٦ ، ص) ، $ص > 0$

(٢) ب(س ، −٠,٦) ، $س > 0$

(٣) ب$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، ص\right)$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(٤) ب$\left(س ، \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ، $س < 0$

(٥) ب(−١ ، ص)

(٦) ب(−س ، س) ، $س > 0$

(٧) ب(−س ، −س) ، $س > 0$

(٨) ب(٩ أ ، ١٢ أ) حيث $180^\circ < \theta < 270^\circ$

(٩) ب$\left(\frac{3}{2}أ ، -2أ\right)$ حيث $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

٤ أوجد قيمة كل من :

(١) طا ٠° + طا ٤٥° + طا ١٨٠°

(٢) حا ١٨٠° حتا ٤٥° − حتا ١٨٠° حا ٤٥°

(٣) قا $\frac{\pi}{6}$ طا $\frac{\pi}{3}$ − طتا $\frac{\pi}{3}$ حتا $\frac{\pi}{6}$

(٤) $\frac{\text{٤ حا}^2\text{ ٣٠° − ٣ طا ٤٥° حتا ٠°}}{\text{٢ حتا ٦٠° + ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥°}}$

(٥) ٣ حا ٣٠° حا² ٦٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + حا ٢٧٠° حتا² ٤٥°

٥ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) ٢ حا² ٩٠° = −٢ حتا ١٨٠°

(٢) ٣ حتا ٣٠° طا ٦٠° − ٢ قا ٤٥° قتا ٤٥° = $\frac{1}{2}$

(٣) ٣ طتا² ٤٥° − ٢ حا ٦٠° حتا ٣٠° = $\frac{3}{2}$ حا ٩٠°

(٤) قا ٣٠° طا ٦٠° + قتا² ٦٠° − طا² ٤٥° = $\frac{7}{3}$

(٥) 📖 $حا ٦٠° حتا ٣٠° - حتا ٦٠° حا ٣٠° = حا^{٢} \frac{\pi}{٤}$

(٦) $٣ طا^{٢} ٣٠° + \frac{٤}{٣} حتا^{٢} ٣٠° - \frac{١}{٤} ظتا^{٢} ٤٥° قتا^{٢} ٣٠° = ١$

(٧) $٢ حتا^{٢} \frac{\pi}{٣} + ٣ حا^{٢} \frac{\pi}{٤} + ٤ طا^{٢} \frac{\pi}{٣} - ٤ حا \frac{\pi}{٢} = ١٠$

(٨) $\frac{طا ٦٠° - طا ٣٠°}{١ + طا ٦٠° طا ٣٠°} = ظتا ٦٠°$

(٩) $\frac{حا ٣٠° حتا ٤٥° + حا ٤٥° حتا ٣٠°}{حا ٤٥° حتا ٦٠° + حتا ٤٥° حا ٦٠°} = حا ٩٠°$

٦ أوجد قيمة س إذا كان :

(١) $س حا^{٢} \frac{\pi}{٤} حتا \pi = طا^{٢} \frac{\pi}{٣} حا \frac{٣\pi}{٢}$ «٦»

(٢) $س حا \frac{\pi}{٤} حتا \frac{\pi}{٤} ظتا \frac{\pi}{٦} = طا^{٢} \frac{\pi}{٤} - حتا^{٢} \frac{\pi}{٣}$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

٧ إذا كانت $س \in [٠° ، ٩٠°]$ فأوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

(١) $حتا س = \frac{حا ٦٠°}{حا ٩٠°} - \frac{حا ٠°}{حا ٤٥°}$ «٣٠°»

(٢) $حا س = حا ٣٠° حتا ٦٠° + حتا ٣٠° حا ٦٠°$ «٩٠°»

٨ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية أ و ب التى قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، $حتا \theta = ٠,٦$

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، $حا \theta = \frac{١٢}{١٣}$

(٣) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، $طا \theta = -\frac{٣}{٤}$

(٤) $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ ، $قتا \theta = -\frac{٢٥}{٧}$

(٥) $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، $قا \theta = ٢$

٩ إذا كان الضلع النهائى للزاوية θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٢أ ، ٣أ) حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة : $قا^{٢} \theta - طا^{٢} \theta$ «$\frac{١}{\sqrt{١٣}}$ ، ١»

١٠ إذا كانت : $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، $حا \theta = \frac{-٢٤}{٢٥}$ فأوجد :

(١) $\frac{ظتا \theta - قتا \theta}{طا \theta - قا \theta}$

(٢) $حتا \theta - قتا \theta طا \theta$ «$\frac{-٣}{٢٨}$ ، $\frac{-٥٧٦}{١٧٥}$»



اكتشف الخطأ

١١ طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ جا ٤٥°

إجابة كريم

٢ جا ٤٥° = جا ٢ × ٤٥° = جا ٩٠° = ١

إجابة أحمد

$٢ \text{ جا } ٤٥° = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى دائرة الوحدة التى مركزها و إذا كان طول $\overset{\frown}{ب ح} = \frac{١}{٣}\pi$ فإن : قا (د ب و ح) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) ٢

(٢) إذا كان أ هى أكبر قياس لزاوية حادة فى مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ من السنتيمترات

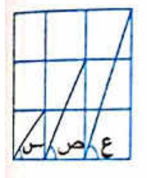
فإن : ظا أ = ...

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٥}$

(٣) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث أ ب ح قائم الزاوية هى س − ٧ ، س ، س + ١ وكان $\overline{ب ح}$ أصغر ضلع فإن : قا أ = ...

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{١٢}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{١٢}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

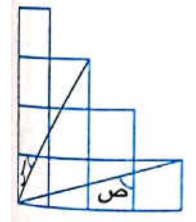
(٤) فى الشكل المقابل :



إذا كانت جميع المربعات متطابقة فإن : ظا س + ظا ص + ظا ع = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{١١}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) $\sqrt{٥} + ٣$

(٥) فى الشكل المقابل :

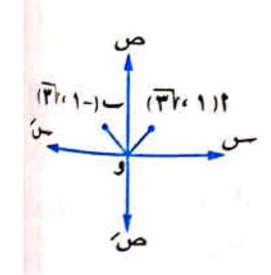


إذا كانت جميع المربعات متطابقة

فإن : ظا س + ظا ص = ...

(أ) $\frac{١١}{١٢}$ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١٤}{٣}$

(٦) فى الشكل المقابل :



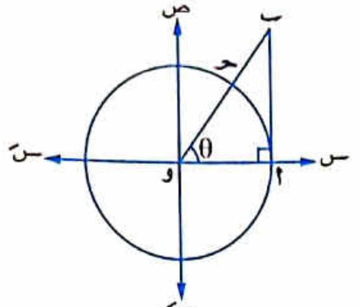
إذا كان : أ (١ ، $\sqrt{٣}$) ، ب (−١ ، $\sqrt{٣}$)

فإن : ظا (د أ و ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٧) في الشكل المقابل :



دائرة وحدة مركزها و ، $\overline{أب}$ قطعة مماسة فإن :

أولًا : و ب = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ

(جـ) قا θ (د) قتا θ

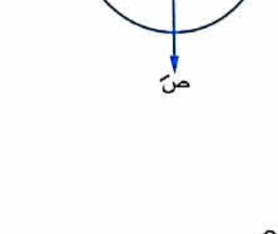
ثانيًا : ب حـ = ...

(أ) طا θ (ب) (قا θ) − ١ (جـ) (قتا θ) − ١ (د) حتا θ

ثالثًا : مساحة المثلث أ ب و = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ حتا θ (ب) $\frac{١}{٢}$ طا θ (جـ) $\frac{١}{٢}$ حا θ (د) $\frac{١}{٢}$ حا θ حتا θ

(٨) في الشكل المقابل :

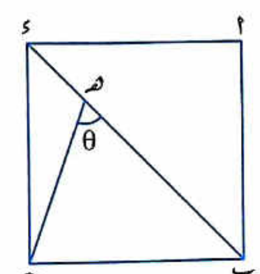


طتا θ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٧}{٨}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٨}{٧}$

(٩) في الشكل المقابل :



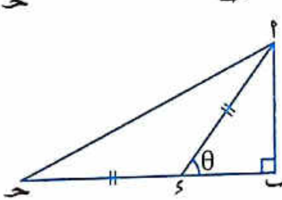
إذا كان : أ ب حـ ء مربعًا وكان $\frac{ءهـ}{هـ ب} = \frac{٢}{٥}$

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢}$

(١٠) في الشكل المقابل :

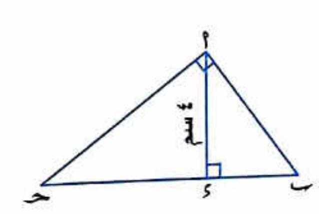


إذا كانت : ء ∈ $\overline{ب حـ}$ وكان : أ ء = ء حـ ، طا θ = $\frac{٤}{٣}$

فإن : طتا $\frac{θ}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١١) في الشكل المقابل :

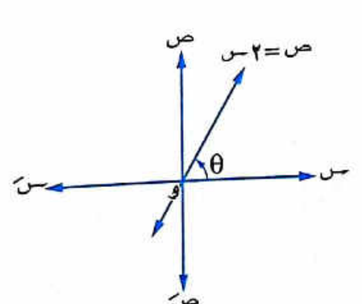


إذا كان : طا ب + طا حـ = $\frac{٥}{٢}$

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت θ هي قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم

ص = ٢ س والاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{١}{٣}$



الزوايا المنتسبة



تعريف الزاويتين المنتسبتين

هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيحًا من القوائم.

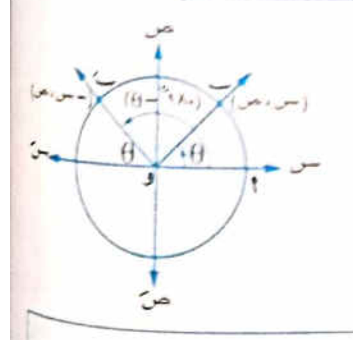
فمثلًا الزاويتان اللتان قياساهما ٣٠° ، ٢١٠° زاويتان منتسبتان.

لأن ٢١٠° − ٣٠° = ١٨٠° أى قائمتان.

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) وكان ق (∠ أ و ب) = θ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن :

١ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (١٨٠° − θ)



إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور الصادات

هى النقطة بَ (− س ، ص)

فإن ق (∠ أ و بَ) الموجهة = (١٨٠° − θ)

ونستنتج أن :

جا (١٨٠° − θ) = جا θ ، قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ

جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ ، قا (١٨٠° − θ) = − قا θ

ظا (١٨٠° − θ) = − ظا θ ، ظتا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ

فمثلًا

• حا ١٥٠° = حا (١٨٠° − ٣٠°) = حا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ • حتا ١٢٠° = حتا (١٨٠° − ٦٠°) = − حتا ٦٠° = − $\frac{1}{2}$

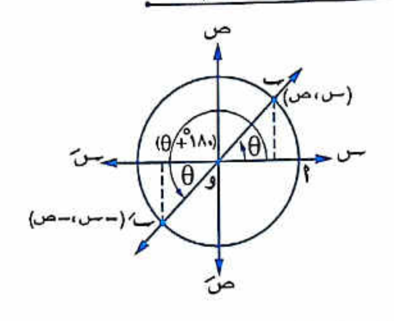
• طا ١٣٥° = طا (١٨٠° − ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١

٢ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (١٨٠° + θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس في نقطة الأصل و

هي النقطة بَ (− س ، − ص)

فإن ق (د أ و بَ) الموجهة = (١٨٠° + θ)



ونستنتج أن :

حا (١٨٠° + θ) = − حا θ ،	قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ
حتا (١٨٠° + θ) = − حتا θ ،	قا (١٨٠° + θ) = − قا θ
طا (١٨٠° + θ) = طا θ ،	طتا (١٨٠° + θ) = طتا θ

فمثلًا

• حا ٢٢٥° = حا (١٨٠° + ٤٥°) = − حا ٤٥° = − $\frac{1}{\sqrt{2}}$

• قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = − $\frac{2}{\sqrt{3}}$

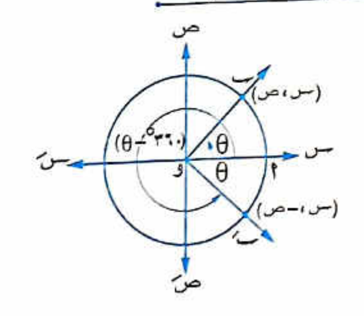
• طا ٢٤٠° = طا (١٨٠° + ٦٠°) = طا ٦٠° = $\sqrt{3}$

٣ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٣٦٠° − θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات

هي النقطة بَ (س ، − ص)

فإن ق (د أ و بَ) الموجهة = (٣٦٠° − θ)



ونستنتج أن :

حا (٣٦٠° − θ) = − حا θ ،	قتا (٣٦٠° − θ) = − قتا θ
حتا (٣٦٠° − θ) = حتا θ ،	قا (٣٦٠° − θ) = قا θ
طا (٣٦٠° − θ) = − طا θ ،	طتا (٣٦٠° − θ) = − طتا θ

فمثلًا

- $\text{جا } ٣٠٠° = \text{جا } (٣٦٠° - ٦٠°) = -\text{جا } ٦٠° = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$
- $\text{ظا } ٣١٥° = \text{ظا } (٣٦٠° - ٤٥°) = -\text{ظا } ٤٥° = -١$
- $\text{قا } ٣٣٠° = \text{قا } (٣٦٠° - ٣٠°) = \text{قا } ٣٠° = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ملاحظة

الزاوية التى قياسها $(-\theta)$ تكافئ الزاوية التى قياسها $(٣٦٠° - \theta)$

ومن ذلك يمكن استنتاج :

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(-\theta)$ كما يلى :

$\text{جا } (-\theta) = -\text{جا } \theta$ ، $\text{قتا } (-\theta) = -\text{قتا } \theta$

$\text{جتا } (-\theta) = \text{جتا } \theta$ ، $\text{قا } (-\theta) = \text{قا } \theta$

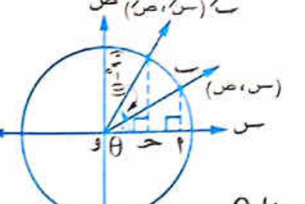
$\text{ظا } (-\theta) = -\text{ظا } \theta$ ، $\text{ظتا } (-\theta) = -\text{ظتا } \theta$

فمثلًا

- $\text{جا } (-٤٥°) = -\text{جا } ٤٥° = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- $\text{جتا } (-٦٠°) = \text{جتا } ٦٠° = \frac{١}{٢}$
- $\text{ظتا } (-٣٠°) = -\text{ظتا } ٣٠° = -\sqrt{٣}$

٤ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، $(٩٠° - \theta)$

فى الشكل المقابل :



الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها $(٩٠° - \theta)$ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن : Δ حـ بَ و $\equiv \Delta$ ا و ب

$\therefore$ حـ بَ = ا و ومنها صَ = س **أى أن** $\text{جا } (٩٠° - \theta) = \text{جتا } \theta$

، حـ و = ا ب ومنها سَ = ص **أى أن** $\text{جتا } (٩٠° - \theta) = \text{جا } \theta$

، $\because \text{ظا } (٩٠° - \theta) = \frac{صَ}{سَ} = \frac{س}{ص}$ $\therefore \text{ظا } (٩٠° - \theta) = \text{ظتا } \theta$

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، $(٩٠° - \theta)$

ونلخص ما سبق كما يلى :

$\text{جا } (٩٠° - \theta) = \text{جتا } \theta$ ، $\text{قتا } (٩٠° - \theta) = \text{قا } \theta$

$\text{جتا } (٩٠° - \theta) = \text{جا } \theta$ ، $\text{قا } (٩٠° - \theta) = \text{قتا } \theta$

$\text{ظا } (٩٠° - \theta) = \text{ظتا } \theta$ ، $\text{ظتا } (٩٠° - \theta) = \text{ظا } \theta$

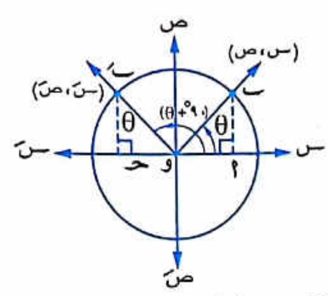
فمثلاً

- $جا ٧٠° = جا (٩٠° - ٢٠°) = جتا ٢٠°$
- $\frac{جا ٤٠°}{جتا ٥٠°} = \frac{جا (٩٠° - ٥٠°)}{جتا ٥٠°} = \frac{جتا ٥٠°}{جتا ٥٠°} = ١$
- $ظا ١٠° - ظتا ٨٠° = ظا (٩٠° - ٨٠°) - ظتا ٨٠° = ظتا ٨٠° - ظتا ٨٠° = ٠$.

٥ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)

في الشكل المقابل :

الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها (٩٠° + θ) في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة بَ (سَ ، صَ)



من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و ومنها صَ = س **أي أن** $جا (٩٠° + θ) = جتا θ$

، و حـ = أ ب ومنها سَ = - ص **أي أن** $جتا (٩٠° + θ) = - جا θ$

، ∵ $ظا (٩٠° + θ) = \frac{صَ}{سَ} = \frac{س}{- ص}$ ∴ $ظا (٩٠° + θ) = - ظتا θ$

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)

ونلخص ما سبق كما يلي :

$جا (٩٠° + θ) = جتا θ$	،	$قتا (٩٠° + θ) = قا θ$
$جتا (٩٠° + θ) = - جا θ$	،	$قا (٩٠° + θ) = - قتا θ$
$ظا (٩٠° + θ) = - ظتا θ$	،	$ظتا (٩٠° + θ) = - ظا θ$

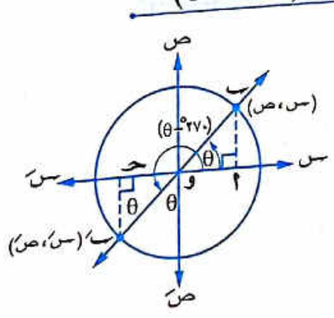
فمثلاً

- $جا ١٢٠° = جا (٩٠° + ٣٠°) = جتا ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- $جتا ١٥٠° = جتا (٩٠° + ٦٠°) = - جا ٦٠° = - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- $ظتا ١٣٥° = ظتا (٩٠° + ٤٥°) = - ظا ٤٥° = -١$

٦ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° - θ)

في الشكل المقابل :

الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها (٢٧٠° - θ) في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة بَ (سَ ، صَ)



من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و ومنها صَ = − س أي أن حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ

، حـ و = أ ب ومنها سَ = − ص أي أن حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ

، ∵ طا (٢٧٠° − θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$ = $\frac{-\text{س}}{-\text{ص}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ طا (٢٧٠° − θ) = طتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° − θ)

ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ	قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ
حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ	قا (٢٧٠° − θ) = − قتا θ
طا (٢٧٠° − θ) = طتا θ	طتا (٢٧٠° − θ) = طا θ

فمثلاً

- حا ٢٢٥° = حا (٢٧٠° − ٤٥°) = − حتا ٤٥° = − $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- طا ٢٤٠° = طا (٢٧٠° − ٣٠°) = طتا ٣٠° = $\sqrt{3}$
- قتا ٢١٠° = قتا (٢٧٠° − ٦٠°) = − قا ٦٠° = −٢

٧ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

فى الشكل المقابل :

الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٢٧٠° + θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :



Δ حـ بَ و ≡ Δ أ و ب

∴ حـ بَ = أ و ∴ صَ = − س أي أن حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ

، حـ و = أ ب ∴ سَ = ص أي أن حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ

، ∵ طا (٢٧٠° + θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$ = $\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ طا (٢٧٠° + θ) = − طتا θ

وكذلك يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

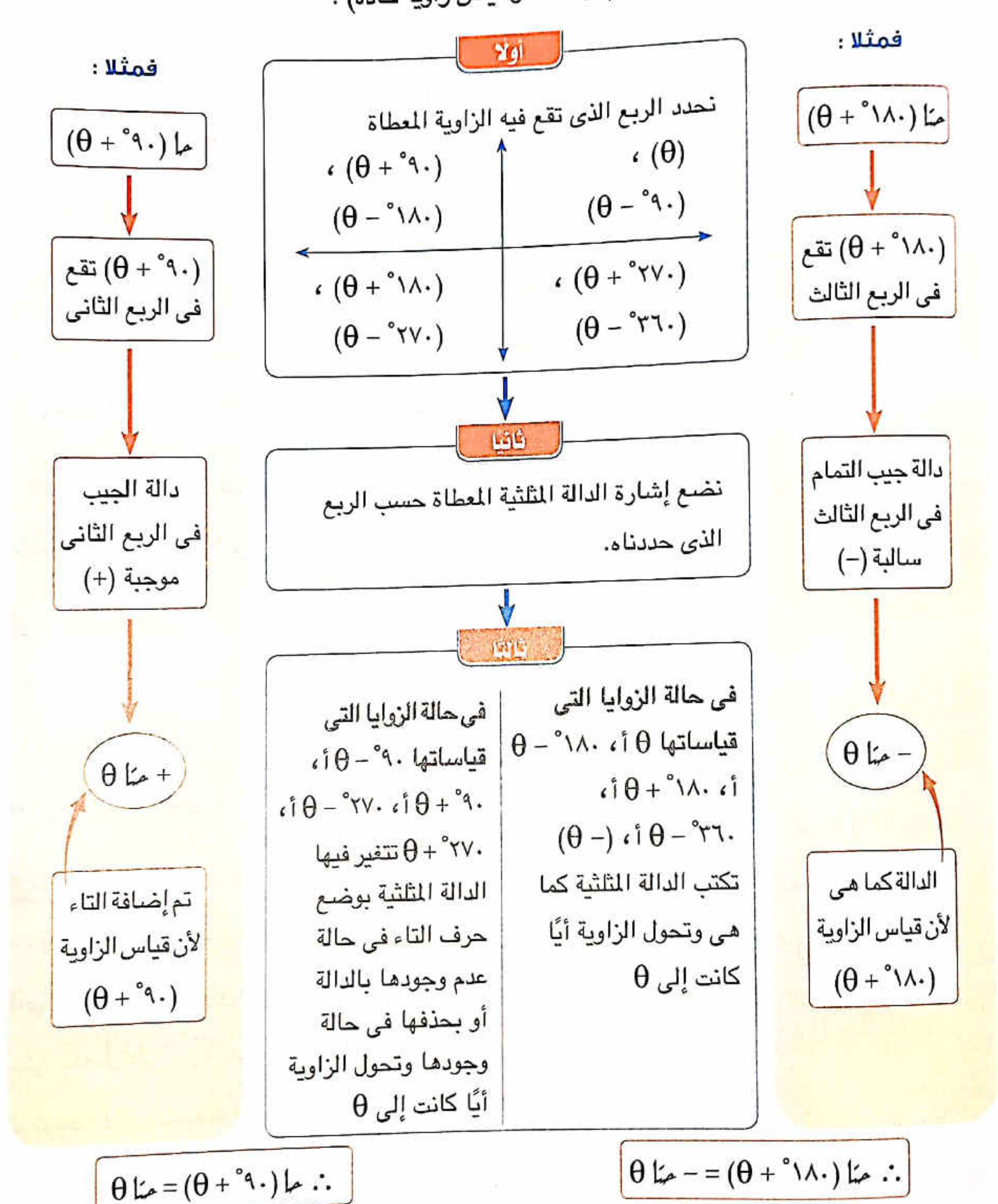
ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ	قتا (٢٧٠° + θ) = − قا θ
حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ	قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ
طا (٢٧٠° + θ) = − طتا θ	طتا (٢٧٠° + θ) = − طا θ

فمثلا

- جا ٣٠٠° = جا (٢٧٠° + ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- قا ٣٣٠° = قا (٢٧٠° + ٦٠°) = قتا ٦٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
- ظا ٣١٥° = ظا (٢٧٠° + ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١

يمكن تلخيص كل ما سبق بالمخطط التالى (حيث θ هو قياس زاوية حادة) :



إيجاد دالة مثلثية لزاوية معلوم قياسها وليكن (α)

أولاً / إذا كانت $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ (أى $\alpha \in [0 ، 2\pi[$)

1. نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية ثم نحدد إشارة الدالة المثلثية.
2. نحول الدالة المثلثية للزاوية α إلى نفس الدالة المثلثية للزاوية $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ وذلك بأن :

نضع α على الصورة $(180^\circ - \theta)$ إذا كانت α فى الربع الثانى.

نضع α على الصورة $(180^\circ + \theta)$ إذا كانت α فى الربع الثالث.

نضع α على الصورة $(360^\circ - \theta)$ إذا كانت α فى الربع الرابع.

ثانيًا / إذا كانت $\alpha > 360^\circ$ (أى $\alpha > 2\pi$)

1. نضع α على الصورة $(2\pi ن + \theta)$ حيث $\theta \in [0 ، 2\pi[$

، ن عدد صحيح موجب فتكون الدالة المثلثية للزاوية α هى نفسها الدالة المثلثية للزاوية θ

2. نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى أولاً.

ثالثًا / إذا كانت α سالبة (أى $\alpha < 0$)

نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى

نطبق قاعدة الدالة المثلثية للزاوية السالبة وهى :

جا $(-\theta)$ = − جا θ ، جتا $(-\theta)$ = جتا θ ، ظا $(-\theta)$ = − ظا θ وهكذا ....

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى (أولاً) أو (ثانيًا)

الطريقة الثانية

نضيف إلى α أى عدد صحيح من الدورات الكاملة الموجبة

(أى نضيف إلى α الزاوية 360° ن أو 2π ن حيث ن $\in$ $ص_+$)

حتى نحصل على زاوية موجبة $\theta \in [0 ، 2\pi[$

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ فتكون هى نفس الدالة المثلثية للزاوية السالبة α

مثال ١

أوجد قيمة كل من :

[١] حا ٢٤٠° [٢] حتا $\frac{5\pi}{3}$ [٣] حتا ٥٧٠° [٤] طا (−١٥٠°)

الحل

[١] حا ٢٤٠° = حا (١٨٠° + ٦٠°) = − حا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[٢] حتا $\frac{5\pi}{3}$ = حتا $\frac{5 \times 180^\circ}{3}$ = حتا ٣٠٠° = حتا (٣٦٠° − ٦٠°) = حتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$

أ، حتا $\frac{5\pi}{3}$ = حتا $\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ = حتا $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}$

[٣] حتا ٥٧٠° = حتا (٣٦٠° + ٢١٠°) = حتا ٢١٠° = حتا (١٨٠° + ٣٠°) = − حتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[٤] طا (−١٥٠°) = − طا ١٥٠° = − طا (١٨٠° − ٣٠°) = − (− طا ٣٠°) = طا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال ٢

أوجد قيمة كل مما يأتى بطريقتين مختلفتين :

[١] حا ١٢٠° [٢] ظتا ١٣٥° [٣] حتا (−٢٤٠°) [٤] قا $\frac{15\pi}{4}$

الحل

[١] حا ١٢٠° = حا (١٨٠° − ٦٠°) = حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ، حا ١٢٠° = حا (٩٠° + ٣٠°) = حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[٢] ظتا ١٣٥° = ظتا (١٨٠° − ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١

أ، ظتا ١٣٥° = ظتا (٩٠° + ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١

[٣] حتا (−٢٤٠°) = حتا ٢٤٠° = حتا (١٨٠° + ٦٠°)

= − حتا ٦٠° = $-\frac{1}{2}$

أ، حتا (− ٢٤٠°) = حتا ٢٤٠° = حتا (٢٧٠° − ٣٠°)

= − حا ٣٠° = $-\frac{1}{2}$

[٤] ∵ قا $\frac{15\pi}{4}$ = قا $\frac{15 \times 180^\circ}{4}$ = قا ٦٧٥° = قا (٣٦٠° + ٣١٥°) = قا ٣١٥°

∴ قا $\frac{15\pi}{4}$ = قا ٣١٥° = قا (٣٦٠° − ٤٥°)

= قا ٤٥° = $\sqrt{2}$

أ، قا $\frac{15\pi}{4}$ = قا ٣١٥° = قا (٢٧٠° + ٤٥°)

= قتا ٤٥° = $\sqrt{2}$

مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتى :

$$\text{جتا}(-150^\circ)\ \text{جا}\ 600^\circ + \text{جتا}\ \frac{2\pi}{3}\ \text{جا}\ 330^\circ - \text{قا}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\ \text{ظا}\ 900^\circ$$

الحل

$\because$ $\text{جتا}(-150^\circ) = \text{جتا}\ 150^\circ = \text{جتا}(180^\circ - 30^\circ) = -\text{جتا}\ 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

، $\text{جا}\ 600^\circ = \text{جا}(360^\circ + 240^\circ) = \text{جا}\ 240^\circ = \text{جا}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{جا}\ 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

، $\text{جتا}\ \frac{2\pi}{3} = \text{جتا}\ 120^\circ = \text{جتا}(180^\circ - 60^\circ) = -\text{جتا}\ 60^\circ = -\frac{1}{2}$

، $\text{جا}\ 330^\circ = \text{جا}(360^\circ - 30^\circ) = -\text{جا}\ 30^\circ = -\frac{1}{2}$

، $\text{قا}\left(\frac{-5\pi}{4}\right) = \text{قا}\ \frac{5\pi}{4} = \text{قا}\ 225^\circ = \text{قا}(180^\circ + 45^\circ) = -\text{قا}\ 45^\circ = -\sqrt{2}$

، $\text{ظا}\ 900^\circ = \text{ظا}(720^\circ + 180^\circ) = \text{ظا}\ 180^\circ = \text{صفر}$

$\therefore$ المقدار $= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(-\sqrt{2}\right)(\text{صفر}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \text{صفر} = 1$

حاول بنفسك

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

١ أوجد قيمة : $\text{جتا}\ 210^\circ\ \text{جا}\ 510^\circ - \text{جا}\ 330^\circ\ \text{جتا}(-330^\circ)$

٢ أثبت أن : $\text{جا}\ 600^\circ\ \text{جتا}(-390^\circ) + \text{جا}\ 150^\circ\ \text{جتا}(-240^\circ) = -1$

مثال ٤

إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها θ فى الوضع القياسى ، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة $\left(\frac{5}{13}، \frac{12}{13}\right)$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية:

١ $\text{جا}(90^\circ - \theta)$

٢ $\text{جتا}(180^\circ + \theta)$

٣ $\text{قا}(90^\circ + \theta)$

٤ $\text{قتا}(270^\circ - \theta)$

٥ $\text{ظا}(360^\circ - \theta)$

٦ $\text{ظتا}(-\theta)$

الحل

$\because$ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$

$\therefore$ النقطة $\left(\frac{5}{13}، \frac{12}{13}\right) \in$ دائرة الوحدة.

١ $\text{جا}(90^\circ - \theta) = \text{جتا}\ \theta = \frac{5}{13}$

٢ $\text{جتا}(180^\circ + \theta) = -\text{جتا}\ \theta = \frac{-5}{13}$

٣ $\text{قا}(90^\circ + \theta) = -\text{قتا}\ \theta = -\frac{13}{12}$

٤ $\text{قتا}(270^\circ - \theta) = -\text{قا}\ \theta = -\frac{13}{5}$

٥ $\text{ظا}(360^\circ - \theta) = -\text{ظا}\ \theta = -\frac{12}{5}$

٦ $\text{ظتا}(-\theta) = -\text{ظتا}\ \theta = -\frac{5}{12}$

مثال ٥

إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة فى وضع قياسى وتعين على دائرة الوحدة النقطة ب $\left(\frac{٣}{٥}\text{ ، ص}\right)$ فأوجد قيمة :

[١] ظا $(٩٠° - \theta)$ + قا $(٩٠° - \theta)$

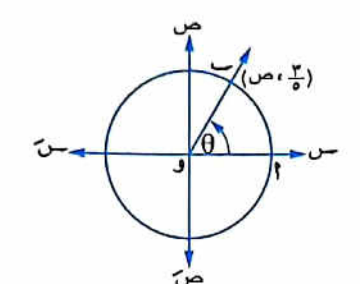
[٢] ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ − ظا $(٩٠° + \theta)$ − جا $(١٨٠° + \theta)$

الحل

∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ لأى نقطة على دائرة الوحدة.

∴ $\frac{٩}{٢٥} + ص^٢ = ١$ ∴ $ص^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$

∴ ص $= \frac{٤}{٥}$ حيث ص > ٠ . ∴ ب $= \left(\frac{٣}{٥} \text{ ، } \frac{٤}{٥}\right)$



[١] ظا $(٩٠° - \theta)$ + قا $(٩٠° - \theta)$ = ظتا θ + قتا θ $= \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٤} = ٢$

[٢] ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ − ظا $(٩٠° + \theta)$ − جا $(١٨٠° + \theta)$

= − ظا θ − (− ظتا θ) − (− جا θ) = − ظا θ + ظتا θ + جا θ $= -\frac{٤}{٣} + \frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} = \frac{١٣}{٦٠}$

مثال ٦

إذا كانت : جتا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$ فأوجد قيمة كل من :

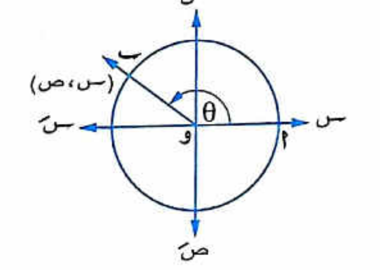
[١] جا $(١٨٠° - \theta)$ [٢] قا $(٣٦٠° - \theta)$ [٣] جتا $(-\theta)$ [٤] ظا $(\theta - ١٨٠°)$

الحل

بفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

(كما فى الشكل المقابل) وأن ب (س ، ص)

∴ س = جتا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، ص = جا θ حيث ص > ٠ .



، ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $\frac{١٦}{٢٥} + ص^٢ = ١$ ∴ $ص^٢ = \frac{٩}{٢٥}$

∴ ص $= \frac{٣}{٥}$ ∴ ب $= \left(-\frac{٤}{٥} \text{ ، } \frac{٣}{٥}\right)$

[١] جا $(١٨٠° - \theta)$ = جا $\theta = \frac{٣}{٥}$

[٢] قا $(٣٦٠° - \theta)$ = قا $\theta = -\frac{٥}{٤}$

[٣] جتا $(-\theta)$ = جتا θ = س $= -\frac{٤}{٥}$

[٤] ظا $(\theta - ١٨٠°)$ = ظا $(\theta - ١٨٠° + ٣٦٠°)$ = ظا $(١٨٠° + \theta)$ = ظا $\theta = -\frac{٣}{٤}$

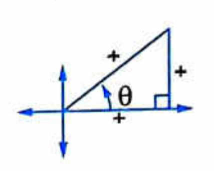
حاول بنفسك

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة فى وضعها القياسى والتى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\text{س ، }\frac{١٢}{١٣}\right)$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

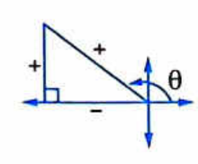
فأوجد قيمة : ١٣ جتا $(٣٦٠° - \theta)$ + ظا ٢٢٥° + قا^٢ ٣٠٠° + ١٢ ظا $(٢٧٠° - \theta)$

ملاحظة

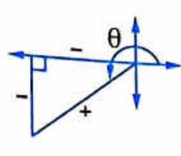
يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاوية مباشرة إذا رسمت الزاوية فى وضعها القياسى ورسم المثلث القائم الخاص بها بالاستعانة بقيمة الدالة المثلثية المعطاة مع مراعاة الإشارات حسب الربع الذى تقع فيه الزاوية كما يلى :



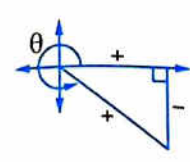
فى الربع الأول



فى الربع الثانى



فى الربع الثالث



فى الربع الرابع

مثال ٧

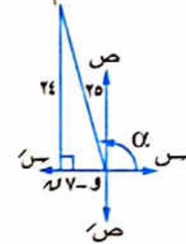
إذا كانت : جتا α = $-\frac{٧}{٢٥}$ حيث α أصغر زاوية موجبة ، ظا β = $\frac{٣}{٤}$ حيث β أكبر زاوية موجبة بحيث $٠° \leq \beta \leq ٣٦٠°$

فأوجد قيمة : جتا $(١٨٠° + \alpha)$ جا $(\beta - ٩٠°)$ + جا $(٣٦٠° - \alpha)$ جا $(١٨٠° - \beta)$

الحل

∵ جتا α < ٠ ∴ α تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، ∵ α أصغر زاوية موجبة. ∴ α تقع فى الربع الثانى.

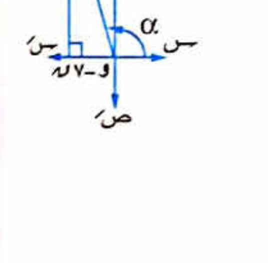


، ∵ جتا α = $-\frac{٧}{٢٥}$

∵ $(م ن)^٢ = (٢٥)^٢ - (٧)^٢ = ٥٧٦$ ∴ م ن = ٢٤ وحدة طول.

، ∵ ظا β > ٠ ∴ β تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ β أكبر زاوية موجبة. ∴ β تقع فى الربع الثالث.



، ∵ ظا β = $\frac{٣}{٤}$

∴ $(و ق)^٢ = (٣)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$ ∴ و ق = ٥ وحدة طول.

∴ المقدار = جتا $(١٨٠° + \alpha)$ جا $(\beta - ٩٠°)$ + جا $(٣٦٠° - \alpha)$ جا $(١٨٠° - \beta)$

= − جتا α جا $(٢٧٠° + \beta)$ + (− جا α) جا β

= − جتا α (− جتا β) − جا α جا β = جتا α جتا β − جا α جا β

$= -\frac{٧}{٢٥} \times \left(-\frac{٤}{٥}\right) - \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{-٣}{٥} = \frac{٢٨}{١٢٥} + \frac{٧٢}{١٢٥} = \frac{١٠٠}{١٢٥} = \frac{٤}{٥}$

ملاحظة

إذا كان : حا α = حتا β أ، طا α = طتا β أ، قتا α = قا β

فإن : $\alpha + \beta = 90^\circ$ حيث α ، β قياسا زاويتين حادتين موجبتين.

فمثلاً إذا كان : طا 23° = طتا α فإن : $23^\circ + \alpha = 90^\circ$ **أى** $\alpha = 67^\circ$

مثال ٨

إذا كان : حا $(3\theta + 28^\circ)$ = حتا $(2\theta - 13^\circ)$ أوجد قيمة واحدة لـ θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل

$\because$ حا $(3\theta + 28^\circ)$ = حتا $(2\theta - 13^\circ)$ $\quad \therefore 3\theta + 28^\circ + 2\theta - 13^\circ = 90^\circ$

$\therefore 5\theta + 15^\circ = 90^\circ \quad \therefore 5\theta = 75^\circ \quad \therefore \theta = 15^\circ$

لاحظ أنه

توجد قيم أخرى لـ θ تنحصر بين 0° ، 90° مثل $\theta = 49^\circ$ أ، $\theta = 87^\circ$

ولإيجاد هذه القيم لابد من حل المثال باستخدام القانون العام كتعميم للملاحظة السابقة.

استنتاج القانون العام

1. إذا كان : حا α = حتا β فإن : حا α = حا $(90^\circ - \beta)$

$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta$ ، أ $\quad \therefore \alpha + 90^\circ - \beta = 180^\circ$

$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ \quad \quad \therefore \alpha - \beta = 90^\circ$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (360°) على الزاوية 90°

تنبيه هام جدًا

عند الحل لا بد أن نبدأ بزاوية دالة الجيب α

2. وبنفس الطريقة يمكن استنتاج نفس القوانين إذا كان : قتا α = قا β

3. إذا كان : طا α = طتا β فإن :

طا α = طا $(90^\circ - \beta)$ ، أ $\quad$ طا α = طا $(270^\circ - \beta)$

$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta \quad \quad \therefore \alpha = 270^\circ - \beta$

$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ \quad \quad \therefore \alpha + \beta = 270^\circ$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (360°) على الزاويتين 90° ، 270°

وبالتالى يمكن كتابة القانون العام لأى زاويتين α ، β كما يلى :

القانون العام لحل المعادلات على الصور حا α = حتا β أو قتا α = قا β أو ظا α = ظتا β

١ إذا كان : حا α = حتا β

فإن : $\alpha \pm \beta = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن **أى أن** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

أى أن قياس زاوية الجيب ± قياس زاوية جيب التمام = ٩٠° + ٣٦٠° ن

٢ إذا كان : قتا α = قا β

فإن : $\alpha \pm \beta = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن **أى أن** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq$ ن π ، $\beta \neq (٢$ ن $+ ١)\frac{\pi}{٢}$

٣ إذا كان : ظا α = ظتا β

فإن : $\alpha + \beta = ٩٠° + ١٨٠°$ ن **أى أن** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq (٢$ ن $+ ١)\frac{\pi}{٢}$ ، $\beta \neq$ ن π

مثال ٩

أوجد الحل العام للمعادلة : حتا ٢ θ = حا ٤ θ ثم أوجد : قيم θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

الحل

$\because$ حتا ٢ θ = حا ٤ θ

$\therefore \alpha = ٤\theta$ ، $\beta = ٢\theta$

$\therefore$ إما ٦ $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

أو ٢ $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

$\therefore$ حا ٤ θ = حتا ٢ θ

$\therefore ٤\theta \pm ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

$\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن

$\therefore \theta = \frac{\pi}{٤} + \pi$ ن

$\therefore$ الحل العام هو $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن ، أ $\frac{\pi}{٤} + \pi$ ن حيث ن $\in$ ص

- عند ن = ٠ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{٤} \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$
- عند ن = ١ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} = \frac{٥}{١٢}\pi \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi = \frac{٥}{٤}\pi \notin]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$
- عند ن = ٢ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{٢\pi}{٣} = \frac{٣}{٤}\pi \notin]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore$ قيم θ هى : $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{١٢}$ **أى** ١٥° ، ٤٥° ، ٧٥°

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : حا ٣ θ = حتا θ

ثم أوجد : جميع قيم θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[التى تحقق المعادلة.

مثال ١٠

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] ٢ حا θ − ١ = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

[٢] ٢ حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

[٣] ٤ حتا² θ − ٣ = ٠ حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

الحل

[١] ∵ ٢ حا θ − ١ = ٠

∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى °٣٠

∴ θ = °٣٠ أ، θ = °١٨٠ − °٣٠ = °١٥٠ (مرفوض لأن θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[)

∴ مجموعة الحل = {°٣٠}

[٢] ∵ ٢ حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ + $\sqrt{٣}$ = ٠

∴ ٢ حا θ = −$\sqrt{٣}$

∴ حا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى °٦٠

∴ θ = °١٨٠ + °٦٠ = °٢٤٠ أ، θ = °٣٦٠ − °٦٠ = °٣٠٠

∴ مجموعة الحل = {°٢٤٠ ، °٣٠٠}

[٣] ∵ ٤ حتا² θ − ٣ = ٠

∴ ٤ حتا² θ = ٣

∴ حتا² θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ حتا θ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ إما حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

∴ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قياسها °٣٠

∴ θ = °٣٠ أ، θ = °٣٦٠ − °٣٠ = °٣٣٠

أ، حتا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ θ = °١٨٠ − °٣٠ = °١٥٠ أ، θ = °١٨٠ + °٣٠ = °٢١٠

∴ مجموعة الحل = {°٣٠ ، °١٥٠ ، °٢١٠ ، °٣٣٠}



من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طا ٤٢° = ...

(أ) ظتا ٤٢° (ب) طا ٤٨° (جـ) ظتا ٤٨° (د) قتا ٤٨°

(٢) ظتا (٩٠° + θ) = ...

(أ) طا (٩٠° − θ) (ب) − طا θ (جـ) طا (٩٠° + θ) (د) طا (٢٧٠° + θ)

(٣) $\frac{\text{قا } ١٠٥°}{\text{قتا } ١٥°}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حا } ١٠٥°}{\text{حتا } ١٥°}$ (ب) طا ١٣٥° (جـ) ظتا ١٥° (د) حتا ٩٠°

(٤) طا (١٨٠° − θ) = ...

(أ) طا θ (ب) − طا θ (جـ) ظتا θ (د) − ظتا θ

(٥) قا (٩٠° + θ) = ...

(أ) قتا (١٨٠° − θ) (ب) قتا (١٨٠° + θ)

(جـ) قتا (٢٧٠° − θ) (د) قتا (٢٧٠° + θ)

(٦) حتا (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ (جـ) − حا θ (د) − حتا θ

(٧) إذا كان : حا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : حتا (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(٨) حتا (٩٠° − θ) × قتا θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ظتا θ

(٩) $\frac{\text{حا } ٥٠}{\text{حتا } ٤٠}$ + $\frac{\text{حا } ٧٠}{\text{حا } ١١٠}$ = ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٠) أبسط صورة للمقدار : طا (٩٠ − θ) + طا (٩٠ + θ) هى ....

(أ) ٢ ظتا θ (ب) ٢ طا θ (جـ) صفر (د) طا θ + ظتا θ

(١١) طا (٤٥° + س) = ...

(أ) طا س (ب) − طا س (جـ) طا (٤٥° − س) (د) ظتا (٤٥° − س)

(١٢) $\frac{\text{جا }(٣٠° + س)}{\text{جتا }(٦٠° − س)}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) طا س

(١٣) $\frac{\text{طا }(٤٥° + س)}{\text{ظتا }(٤٥° − س)}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا (٩٠° + س) (د) ظتا (٩٠° + س)

(١٤) جا (٩٠° − θ) قا (٣٦٠° − θ) − جتا (٢٧٠° + θ) قتا (١٨٠° + θ) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(١٥) إذا كان : أ + ب = ٩٠° ، طا أ = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

(١٦) إذا كان : س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{جا س − جا ص}}{\text{جتا س − جتا ص}}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٧) جتا θ + جتا (١٨٠° − θ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ جتا θ (د) جتا θ

(١٨) جا θ + جتا (٢٧٠° + θ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ جا θ (د) جا θ جتا θ

(١٩) أبسط صورة للمقدار : جا (١٨٠° − θ) + جتا (−٦٠°) + جتا (٩٠° + θ) + جا (− ١٥٠°) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ جا θ

(٢٠) إذا كانت : جتا θ = − جا ٢ θ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٣٠°

(٢١) إذا كان : $\sqrt{٣}$ قتا θ = −٢ حيث θ أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٢٤٠°

(٢٢) إذا كان : حتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(٢٣) إذا كان : حتا $(٢٧٠° - \theta) = \frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٤) إذا كانت : حتا $(٩٠° + \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٥) إذا كان : ظا θ = ظا $(٩٠° - \theta)$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن : θ = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(٢٦) إذا كان : حتا $(٩٩٠° - \theta) = \frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٧) إذا كانت : ٢ حتا $\theta + \sqrt{٣} = ٠$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ فإن : θ = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٠٠°

(٢٨) إذا كان : ٥ جاس = ٣ فإن : قا $(٢٧٠° + س)$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $-\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٢٩) إذا كان : جا $\theta = \frac{-١}{٢}$ ، ظا $\theta < ٠$ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٣٠) إذا كان : ظا $\theta = \frac{-٥}{١٢}$ ، حتا $\theta < ٠$ فإن : قتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

(٣١) إذا كان : ٢ جا $(٩٠° - \theta) = ١$ حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

(٣٢) إذا كان : ٥ حتا $(٩٠° - \theta) = ٤$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$ فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٣٣) إذا كان : حا θ = −٠,٨ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠° فإن : ٣ طتا (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −٤ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : ٢٤ طا θ + ٧ = ٠ ، ٩٠° < θ < ٢٧٠° فإن : قتا (١٠٨٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٧}$ (ب) $\frac{-٢٤}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٢٤}$ (د) $\frac{-٢٥}{٢٤}$

(٣٥) إذا كان : ١٣ حا (٩٠° − θ) = ٥ فإن : حتا θ = ...

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-١٢}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٣}$ (د) $\frac{-٥}{١٣}$

(٣٦) إذا كانت : طتا (٩٠° + θ) + ١ = ٠ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن : حتا ٤ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٣٧) إذا كان : حتا (٩٠° + θ) + حا (٩٠° − ٢ θ) = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : حا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٣٨) إذا كان : طتا (٩٠° + θ) + طا (٩٠° − ٢ θ) = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

فإن : طا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\sqrt{٣}$

(٣٩) إذا كان : طا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن : حتا (٣٦٠° − ب) − حتا (٩٠° − ب) = ...

(أ) $\frac{-٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٤٠) إذا كان : ١٣ حا θ − ٥ = ٠ حيث θ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

فإن : قيمة حا (٢٧٠° − θ) × قتا (٩٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{-١٢}{٥}$ (ب) $\frac{١٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{-٥}{١٢}$

(٤١) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى

النقطة ($\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) حيث ص ∈ ح$_+$ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٤٢) إذا كان : $(س ، \frac{1}{2})$ نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ فإن : جا $(90^\circ - \theta)$ طا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{-1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) -3

(٤٣) إذا كان θ هى قياس الزاوية فى وضعها القياسى وكان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى $(س ، -س)$ حيث $س < 0$ فإن : θ = ...

(أ) 45° (ب) 135° (جـ) 225° (د) 315°

(٤٤) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{-3}{5} ، \frac{4}{5})$ فإن : قتا $(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ = ...

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{-5}{3}$ (جـ) $\frac{5}{4}$ (د) $\frac{-5}{4}$

(٤٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة $(90^\circ - \theta)$ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{-4}{5} ، \frac{3}{5})$ فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{-4}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (جـ) $\frac{-3}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

(٤٦) إذا كان : جا α = جتا β فإن : قتا $(\alpha + \beta)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) غير معرفة.

(٤٧) إذا كان : جا α = جتا β فإن : ظتا $(\alpha + \beta)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) غير معرف.

(٤٨) إذا كان : جا θ = جتا ٢ θ ، $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ فإن : جا ٣ θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٤٩) 📖 إذا كان : جا ٢ θ = جتا ٤ θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا $(90^\circ - 3\theta)$ = ...

(أ) -١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{3}$

(٥٠) إذا كان : ظا θ = ظتا ٢ θ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن : جا θ + جتا ٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) $\frac{1}{4}$

(٥١) إذا كان : جا $(\theta + 13^\circ)$ = جتا $(\theta + 17^\circ)$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا θ = ...

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٥٢) إذا كان : $\text{جتا} \frac{٢٠^\circ + \theta}{٢} = \text{جا} \frac{٤٠^\circ + \theta}{٢}$: $٠ < \theta < ٩٠^\circ$ فإن : θ = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٥٣) الحل العام للمعادلة $\text{طا } ٢\theta = \text{طتا } \theta$ هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٢} + \pi \text{ن}$ (ب) $\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٣} \text{ن}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦} + ٢\pi \text{ن}$ (د) $\frac{\pi}{٦} + \pi \text{ن}$

(٥٤) لكل ن ∈ ص يكون الحل العام للمعادلة : $\text{طا } ٢\theta = \text{طتا } ٤\theta$ هو ....

(أ) $١٥^\circ + ٣٦٠^\circ \text{ن}$ (ب) $٩٠^\circ + ١٨٠^\circ \text{ن}$

(جـ) $١٥^\circ + ٣٠^\circ \text{ن}$ (د) $١٥^\circ + ١٨٠^\circ \text{ن}$

(٥٥) لكل ن ∈ ص الحل العام للمعادلة : $\text{قتا } \theta = \text{قا } (٣٠^\circ + \theta)$ هو ....

(أ) $٦٠^\circ + ١٨٠^\circ \text{ن}$ (ب) $٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ \text{ن}$

(جـ) $٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ \text{ن}$ (د) $٣٠^\circ + ١٨٠^\circ \text{ن}$

(٥٦) إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا وكان : $\text{جا } أ = \frac{٣}{٥}$ فإن : جا حـ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(٥٧) إذا كان : س ص ع ل شكل رباعي دائري ، $\text{جتا س} = \frac{١}{٢}$ فإن : $\text{جا } (٢٧٠^\circ - \text{ع})$ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٥٨) في مثلث قائم الزاوية إحدى زواياه س° وكان : $\text{جا س} = \frac{٤}{٥}$ فإن : $\text{جتا } (٩٠ - \text{س}^\circ)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٥٩) إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية في أ ، $\text{جا } أ = \frac{٤}{٥}$ فإن : جا (٢ أ + ب + حـ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٦٠) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان : $\text{جتا } أ = \frac{١}{٢}$ فإن : قيمة جا (أ + ب + ٢ حـ) = ...

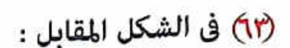
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) صفر

(٦١) س ص ع مثلث حاد الزوايا فيه : $\text{طا ع} = \sqrt{٣}$ فإن : جا (س + ص + ٢ ع) = ...

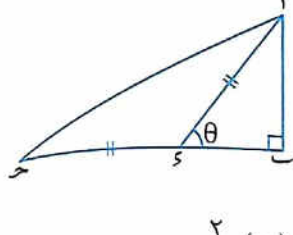
(أ) $-\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

(٦٢) إذا كان ؋ب ح مثلثًا حاد الزوايا فإن : حا ؋ + حا (ب + ح) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$



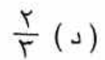
(٦٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ ، ؋ء = ءح ، حا θ = $\frac{٤}{٥}$

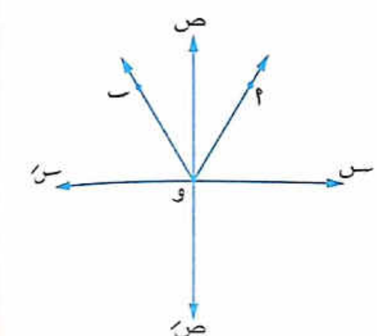
فإن : طا $\left(٢٧٠° - \frac{θ}{٢}\right)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{٣}$





(٦٤) في الشكل المقابل :

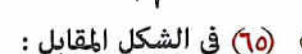


إذا كان : ؋ = $(٢ ، ٢\sqrt{٣})$ ، ب = $(-٢ ، ٢\sqrt{٣})$

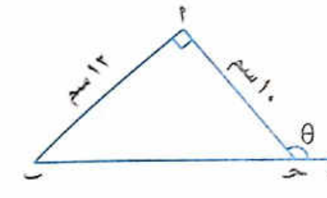
فإن : طا (١٨٠° − ق (∠ ؋ و ب)) = ...

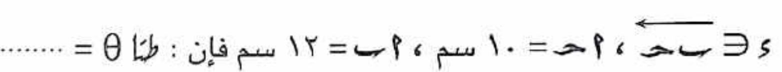
(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$



(٦٥) في الشكل المقابل :

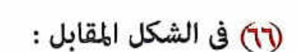




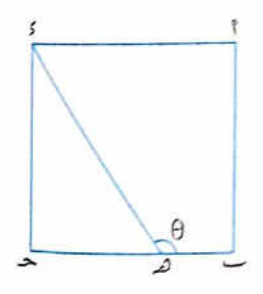
ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، ؋ح = ١٠ سم ، ؋ب = ١٢ سم فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) $-\frac{٦}{٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $-\frac{٥}{٦}$



(٦٦) في الشكل المقابل :

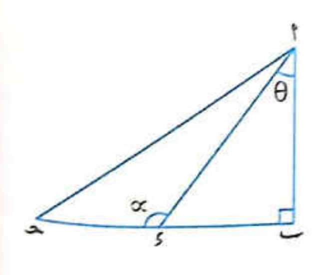


؋ب حء مربع فيه : حهـ = ٢ ب هـ فإن : طا θ = ...

(أ) $-\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦٧) في الشكل المقابل :



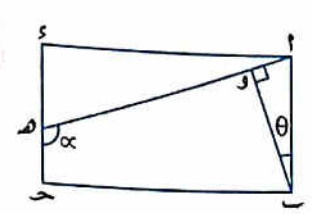
Δ ؋ب ح قائم الزاوية في ب

، طا θ = $\frac{٣}{٤}$

فإن : حا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$

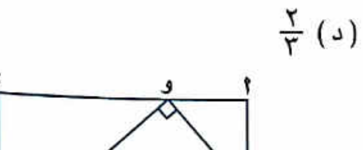
(٦٨) في الشكل المقابل :



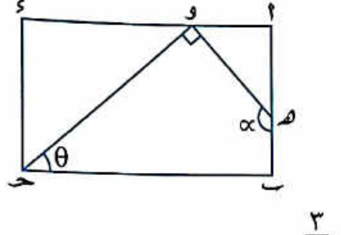
أ ب حـ ء مستطيل ، طا θ = $\frac{١}{٣}$

، $\overline{\text{ب و}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ فإن : طتا α = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$



(٦٩) في الشكل المقابل :

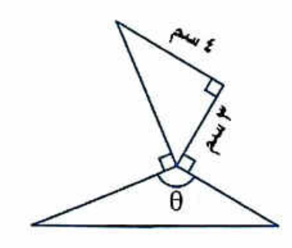


أ ب حـ ء مستطيل فيه : جتا θ = $\frac{٣}{٤}$

، $\overline{\text{هـ و}} \perp \overline{\text{و حـ}}$ فإن : جتا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٧٠) في الشكل المقابل :

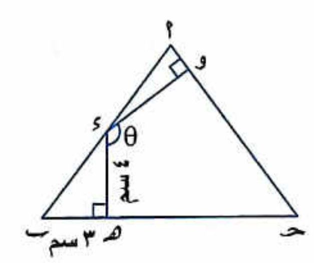


جتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$

(جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(٧١) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

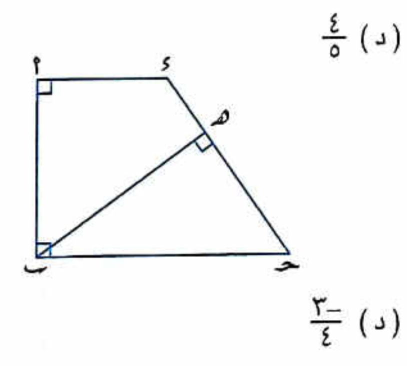
، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ هـ ء و) = θ

، ء هـ = ٤ سم ، ب هـ = ٣ سم

فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٧٢) في الشكل المقابل :

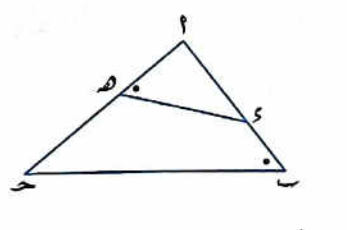


إذا كان : ٣ ب هـ = ٤ حـ هـ

فإن : طا (∠ أ ء حـ) = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(٧٣) في الشكل المقابل :



ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ ب)

فإن : جتا حـ + جتا (∠ ب ء هـ) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) π (د) صفر

ثانيًا الأسئلة المقالية

1 أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حا ١٥٠° (٢) قا ٢١٠° (٣) طا ٢٤٠° (٤) حتا (−١٥٠°)

(٥) طا ٢٢٥° (٦) قتا $\frac{١١ \pi}{٦}$ (٧) ظتا ٧٨٠° (٨) حتا (−٩٠٠°)

(٩) حا $\left(\frac{-٤ \pi}{٣}\right)$ (١٠) قا $\left(\frac{-٢ \pi}{٣}\right)$ (١١) قا (−٤٨٠°) (١٢) حا $\left(\frac{-٧ \pi}{٤}\right)$

---

2 أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ١٢٠° + طا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + حتا ٤٢٠° «−١»

(٢) حا ٣٩٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠° حا ١٢٠° «١»

(٣) حا ١٥٠° حتا (−٣٠٠°) + حتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠° «$-\frac{١}{٤}$»

(٤) طا $\frac{٢ \pi}{٣}$ قا $\frac{١١ \pi}{٣}$ + ظتا $\frac{١١ \pi}{٦}$ قتا $\frac{١٩ \pi}{٦}$ + طا $\frac{٢٥ \pi}{٦}$ قتا $\left(\frac{-١٩ \pi}{٣}\right)$ «$-\frac{٢}{٣}$»

---

3 أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) حتا (−٣٠٠°) حا ٤٢٠° − حتا ٧٥٠° حتا ٦٦٠° = صفر

(٢) حا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + حا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°) = −١

(٣) حا ٤٨٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠٠° حا (−١٢٠°) = صفر

(٤) حا ١٥٠° طا ٢٢٥° + حتا ٣١٥° قا (−١٢٠°) + حا (−١٣٥°) قتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

---

4 إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فأوجد :

(١) حا (١٨٠° + θ) (٢) حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ (٣) طا (٣٦٠° − θ)

(٤) قتا $\left(\frac{٣ \pi}{٢} - θ\right)$ (٥) قا (π + θ) (٦) حا (π − θ)

---

5 إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها θ فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يمر بالنقطة $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

(١) حا (٢٧٠° + θ) (٢) قا (٢٧٠° + θ) (٣) قتا $\left(\frac{\pi}{٢} + θ\right)$

(٤) طا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ (٥) ظتا (θ − ١٨٠°) (٦) قتا (− θ)

٦ إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة فى الوضع القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب $(س ، \frac{٣}{٥})$ فأوجد قيمة : جا (٩٠° – θ) + طا (٩٠° – θ) جتا (٩٠° + θ) «صفر»

٧ إذا كان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° فأوجد قيمة :

(١) جتا (١٨٠° – θ) | (٢) طا (١٨٠° + θ) | (٣) قتا (– θ)

(٤) ظتا (٣٦٠° – θ) | (٥) جا (٩٠° – θ) | (٦) جا (٢٧٠° – θ)

٨ إذا كان : جتا θ = –$\frac{٣}{٥}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠° فأوجد قيمة كل من :

(١) قتا (١٨٠° + θ) | (٢) قا (– θ) | (٣) طا (٣٦٠° – θ)

(٤) ظتا (θ – ٩٠°) | (٥) قا (٩٠° + θ) | (٦) طا (٢٧٠° – θ)

٩ أوجد إحدى قيم θ حيث ٠° ≤ θ < ٩٠° التى تحقق كلًا مما يأتى :

(١) جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ – ٥°) «١٦°»

(٢) قا (θ + ٢٥°) = قتا (θ + ١٥°) «٢٥°»

(٣) طا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°) «١٠°»

(٤) جتا $\left(\frac{θ + ٢٠°}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{θ + ٤٠°}{٢}\right)$ «٦٠°»

(٥) طا (θ + ١٨° ٢٤َ) = ظتا (θ + ١٠َ ٥٢°) «٩° ٤٣َ»

١٠ أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

(١) جا ٢ θ = جتا θ | (٢) جتا ٥ θ = جا θ

١١ أوجد قيم θ فى كل من الحالات الآتية حيث θ ∈]٠ ، $\frac{π}{٢}$[:

(١) قتا (θ + ١٥°) = قا ٤٢° | (٢) جا (θ + ٣٠°) = جتا θ

(٣) جا θ – جتا θ = ٠ | (٤) قتا $\left(θ - \frac{π}{٦}\right)$ = قا θ

(٥) طا (θ + ٢٧°) = ظتا ٢ θ | (٦) طا (θ + ١٠°) = ظتا (٤ θ – ١٠°)

(٧) قا (٢ θ + ٣٥°) = قتا (٣ θ – ١٠°) | (٨) قا θ = قتا (٣ θ – ٩٠°)

(٩) جا (٤ θ + ٤٨°) = جتا (θ – ٣٣°) | (١٠) قتا ٨ θ = قا ٢ θ

١٢ أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

(١) طا θ − ١ = ٠

(٢) ٢ جتا θ − ١ = ٠

(٣) ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ١

(٤) ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \sqrt{٣}$

١٣ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية علمًا بأن $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$:

(١) ٢ جتا θ + ١ = ٠

(٢) قتا $\theta - \sqrt{٢}$ = ٠

(٣) ٢ جا $\theta - \sqrt{٣}$ = ٠

(٤) جتا θ + ١ = ٠

(٥) ٢ جا $\theta + \sqrt{٣}$ = ٠

(٦) طا θ + ١ = ٠

(٧) $\sqrt{٣}$ قتا θ = −٢

(٨) جا^{٢} $\theta = \frac{١}{٤}$

١٤ إذا كان : جتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \frac{١}{٢}$

فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ «٣٠٠°»

١٥ إذا كان : جا (٢ θ + ١٥°) = جتا (θ + ٣٠°) حيث ٠° < θ < ٩٠°

أوجد قيمة : قتا^{٢} ٢ θ + ظتا^{٢} ٣ θ + قا^{٢} ٤ θ «٩»

١٦ إذا كان : $\frac{\text{جا}(٣\theta - ٢٥°)}{\text{جتا}(٢\theta - ٣٥°)} = ١$ فأوجد قيمة : θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

ثم أوجد قيمة : $\frac{\text{جا } ١٨°}{\text{جتا } ٧٢°}$ + جا (١٨٠° − θ) «٣٠° ، $١\frac{١}{٢}$»

١٧ إذا كان : $\frac{\text{طا }\theta}{\text{ظتا } ٢\theta} = ١$ حيث ٠° < θ < ٩٠° فأوجد قيمة : θ

ثم أوجد قيمة : جا (١٨٠° − ٣ θ) جتا (٣٦٠° − ٢ θ) + طا ٢ θ ظتا (θ − ١٨٠°) «٣٠° ، $٢\frac{١}{٢}$»

١٨ إذا كان : طا (θ − ١٥°) = ظتا (٢ θ + ١٥°) حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

فأوجد قيمة θ ثم أثبت أن : $\frac{١ + \text{جا}(٢٧٠° + ٢\theta)}{١ + \text{جا}(٩٠° + ٢\theta)} = \frac{١}{٣}$ «٣٠°»

١٩ إذا كان : جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°

فأوجد قيمة المقدار : جا (١٨٠° − θ) + طا (٩٠° − θ) − طا (٢٧٠° − θ) «$\frac{-٤}{٥}$»

٢٠ إذا كان : ١٣ جتا θ = ١٢ حيث ٩٠° < θ < ٣٦٠°

أوجد قيمة : ١٣ جا (١٨٠° − θ) − ١٠ جا^{٢} ٤٥° طا^{٢} ٦٠° + ٥٠ جا ١٥٠° «٥»

٢١ إذا كان : ١٥ طا θ + ٨ = ٠ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ

ثم أوجد قيمة كل من : ٢ جا θ جتا θ ، قتا (١٠٨٠° + θ) «$\frac{-٢٤٠}{٢٨٩}$ ، $\frac{-١٧}{١٥}$»

٢٢ إذا كان : جا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد قيمة θ ثم :

(١) أوجد قيمة : $\frac{١ - ٢ \text{ ظتا } (٢٧٠° - θ)}{١ + \text{ جتا}^٢ (٢٧٠° + θ)}$

(٢) أثبت أن : جتا ٢ θ = $\frac{١ - \text{ ظا}^٢ (٢٧٠° - θ)}{\text{ قتا}^٢ (٩٠° + θ)}$ «٤٥° ، $\frac{-٢}{٣}$»

٢٣ إذا كانت ب (-٥ ك ، -١٢ ك) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة ، ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

أوجد قيمة : قتا (٩٠° - θ) جا (٩٠° + θ) + ١٢ ظا (٢٧٠° + θ) «-٤»

٢٤ إذا كان : ١٣ جا θ - ٥ = ٠ حيث θ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

أوجد قيمة كل من : قتا (٢٧٠° + θ) ، جتا (θ - ٢٧٠°) ، ظا (٢٧٠° + θ)

ثم أثبت أن : جا (٢٧٠° - θ) × قا (٢٧٠° + θ) × ظتا (٢٧٠° + θ) = جا ٩٠°

٢٥ إذا كانت : جتا^٢ ∝ = $\frac{٩}{٢٥}$ حيث ٩٠° < ∝ < ١٨٠° أوجد قيمة : ٢٥ جا ∝ - ٤ ظتا ∝ «٢٣»

٢٦ إذا كان : ظا ∝ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ∝ أصغر زاوية موجبة ، ظا β = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ١٨٠° < β < ٢٧٠°

أوجد الدوال المثلثية لكل من الزاويتين ∝ ، β ثم أوجد قيمة : جا ∝ جتا β - جتا ∝ جا β «$\frac{-١٦}{٦٥}$»

٢٧ إذا كان : جا ∝ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ∝ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[، ١٣ جتا β - ٥ = ٠ حيث β ∈]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

أوجد قيمة : جتا ∝ جتا β + جا ∝ جا β «$\frac{-٥٦}{٦٥}$»

٢٨ إذا كان : ٢٥ جا ∝ + ٢٤ = ٠ حيث ١٨٠° < ∝ < ٢٧٠° ، ٥ ظا β + ١٢ = ٠

حيث β أكبر زاوية موجبة ، β ∈]٠° ، ٣٦٠°[أوجد قيمة :

(١) جا (١٨٠° + ∝) + جتا (١٨٠° - β)

(٢) قتا (١٨٠° + ∝) ظتا (٩٠° - β) - قا (٣٦٠° + ∝) ظا (٣٦٠° - β)

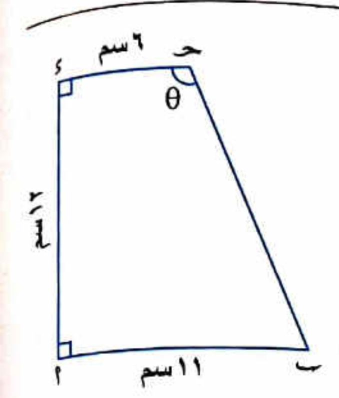
(٣) قتا (٩٠° + ∝) ظتا (٢٧٠° + β) ظا (٢٧٠° - ∝) قتا (٢٧٠° + β) «$\frac{١٨٧}{٣٢٥}$ ، $\frac{٨٥}{١٤}$ ، ٦$\frac{١}{٢}$»

٢٩ إذا كان الضلع النهائى للزاوية التى قياسها $(٩٠° - \theta)$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{٥}{١٣} ، ص\right)$

فأوجد الدوال المثلثية للزاوية θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

---

٣٠ فى الشكل المقابل :



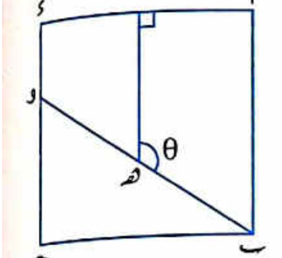
أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٩٠°

، حـ ء = ٦ سم ، ء أ = ١٢ سم ، أ ب = ١١ سم

أوجد : جا θ «$\frac{١٢}{١٣}$»

---

٣١ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع فيه : ٢ ء و = و حـ

أوجد : ظا θ «$\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$»

اكتشف الخطأ

٣٢ فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة : جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسِّر ذلك.

إجابة كريم

جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ = جا $\left(٢\pi + \theta - \frac{\pi}{٢}\right)$

= جا $\left(\theta + \frac{٣\pi}{٢}\right)$

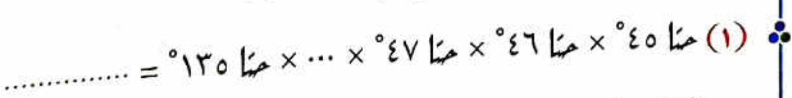
= − جتا θ

إجابة زياد

جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ = جا $\left[-\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right]$

= − جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

= − (− جتا θ) = جتا θ



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ١٣٥° = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) جا ٧٥° × جتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ...

(أ) $١ + \sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣} - ١$ (جـ) ٢ (د) ١

(٣) إذا كانت النقاط أ ، ب ، حـ على شبكة تربيعية حيث أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ١) ، حـ (٠ ، −٢)

فإن : جا (∠ ب أ حـ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{\sqrt{١٧}}$ (د) $\frac{-٤}{\sqrt{١٧}}$

(٤) $\frac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times \cdots \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } ١° \times \text{قتا } ٢° \times \cdots \times \text{قتا } ٨٨° \times \text{قتا } ٨٩°}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩٠

(٥) $\frac{\text{جا } (٦٠\pi + \theta) + \text{جتا } (٩٠\pi + \theta)}{\text{جتا } \left(\frac{٥\pi}{٢} + \theta\right) - \text{جا } \left(\frac{٩\pi}{٢} + \theta\right)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٦) إذا كان : ٧ س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{جا } ٣\text{س}}{\text{جتا } ٤\text{س}} + \frac{\text{ظا } ٢\text{س}}{\text{ظتا } ٥\text{س}}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٧) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن :

أولًا : ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) جا (س − ص) (د) جتا (س − ص)

ثانيًا : جا (٣ س + ٢ ص) + جا (٩ س + ٨ ص) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) جتا س (د) جتا ص

(٨) إذا كان : د (س) = جا ٢ س

فإن : د (هـ) + د $\left(هـ + \frac{\pi}{٢}\right)$ + د $(هـ + \pi)$ + د $\left(هـ + \frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ...

+ د $(هـ + ٩٩\pi)$ + د $\left(هـ + \frac{١٩٩}{٢}\pi\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

(٩) إذا كانت : جتا² θ = ١ فإن : θ = ... حيث ن ∈ ص

(أ) ن π (ب) $\frac{ن}{٢}\pi$ (جـ) ٢ ن π (د) (٢ ن + ١) π

(١٠) عدد حلول المعادلة : ظا س = $-\sqrt{٣}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ١٥ π هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

(١١) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م

فإن : ظا θ = ...

(أ) ظا α (ب) ظتا α (جـ) جتا α (د) جا α

(١٢) فى الشكل المقابل :

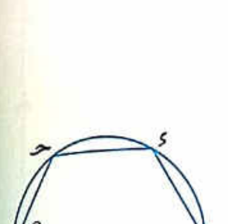
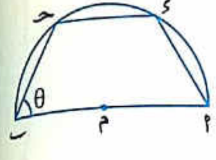
إذا كان : أ (٠ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٤)

فإن : حتا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(١٣) فى الشكل المقابل :

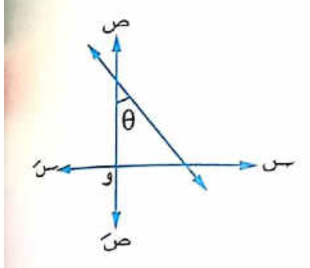



إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطرًا فى نصف دائرة م ، ١٣ جا θ = ١٢

فإن : حتا (∠ أ ء حـ) = ...

(أ) $\frac{-١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٣}$ (د) $\frac{١٢}{١٣}$

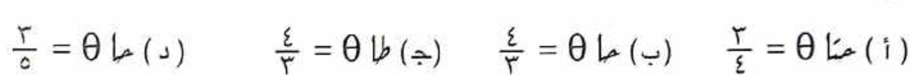
(١٤) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥

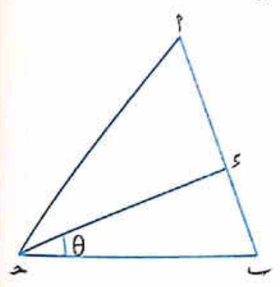
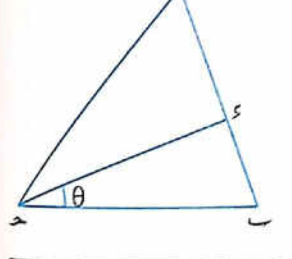
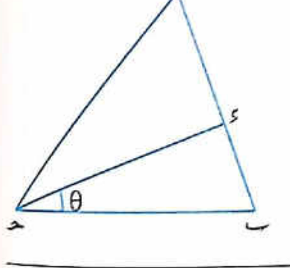
، θ زاوية حادة تتكون من تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات

فإن : ....



(أ) حتا θ = $\frac{٣}{٤}$ (ب) جا θ = $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ (د) جا θ = $\frac{٣}{٥}$

(١٥) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث ٢ أ ء = ٣ ب ء

فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

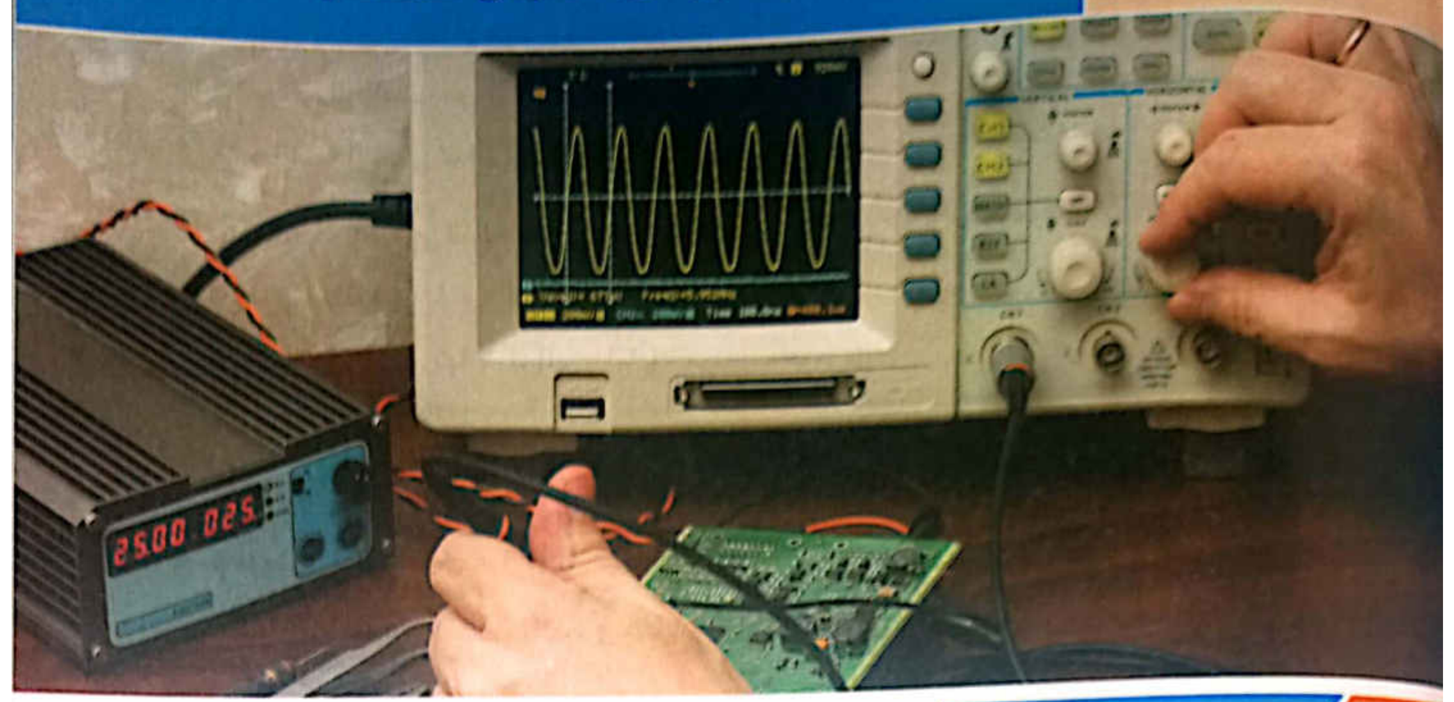
٢ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ٢٠° + حتا ٤٠° + حتا ٦٠° + ... + حتا ١٦٠° + حتا ١٨٠° «-١»

(٢) جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... + جا ٣٥٨° + جا ٣٥٩° «صفر»



التمثيل البيانى للدوال المثلثية

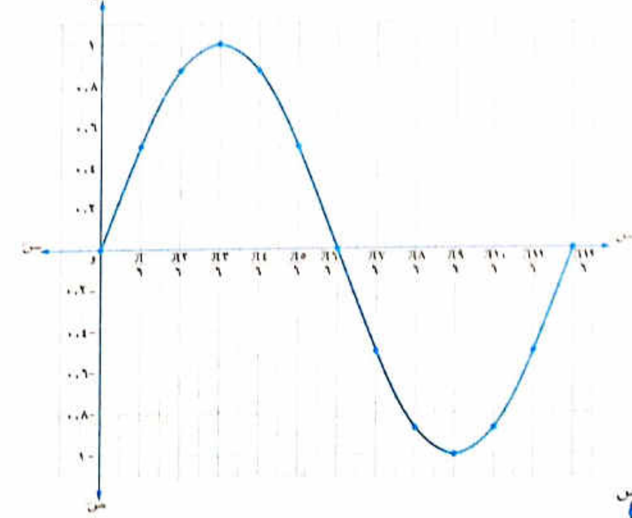


أولاً دالة الجيب د : د (θ) = جا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جا θ بيانيًا نكوّن جدولاً من بعض قيم θ الخاصة حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] وقيم جا θ المناظرة لها.

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
جا θ	٠	٠.٥	٠.٨٧	١	٠.٨٧	٠.٥	٠	-٠.٥	-٠.٨٧	-١	-٠.٨٧	-٠.٥	٠

نعيّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة [٠ ، ٢ π]

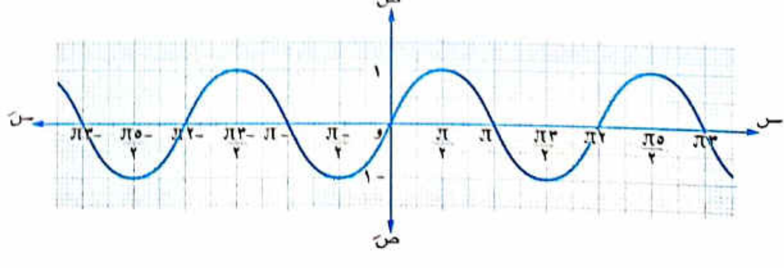


ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات [٠ ، ٢ π] ، [٢ π ، ٤ π] ، [٤ π ، ٦ π] ، ...

وكذلك فى الفترات [-٢ π ، ٠] ، [-٤ π ، -٢ π] ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة الجيب د : د (θ) = جا θ

[١] مجال دالة الجيب هو]- ∞ ، ∞[

[٢] • القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

• القيمة الصغرى للدالة تساوى -١ وتحدث عندما $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

[٣] مدى الدالة = [-١ ، ١]

[٤] الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°)

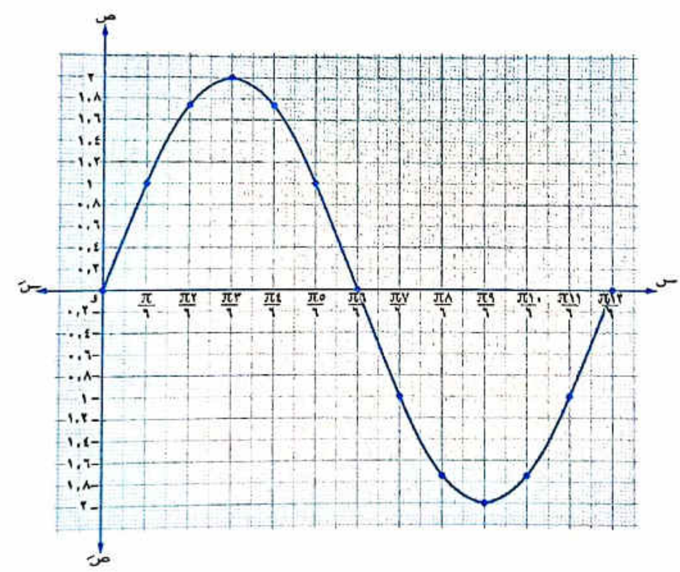
مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٢ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومداها واذكر دورتها.

الحل

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
ص	٠	١	١,٧	٢	١,٧	١	٠	-١	-١,٧	-٢	-١,٧	-١	٠



• القيمة العظمى للدالة = ٢ ، القيمة الصغرى للدالة = -٢

• مدى الدالة = [-٢ ، ٢] • دورة الدالة = ٢ π (أى ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] ومن الرسم أوجد :

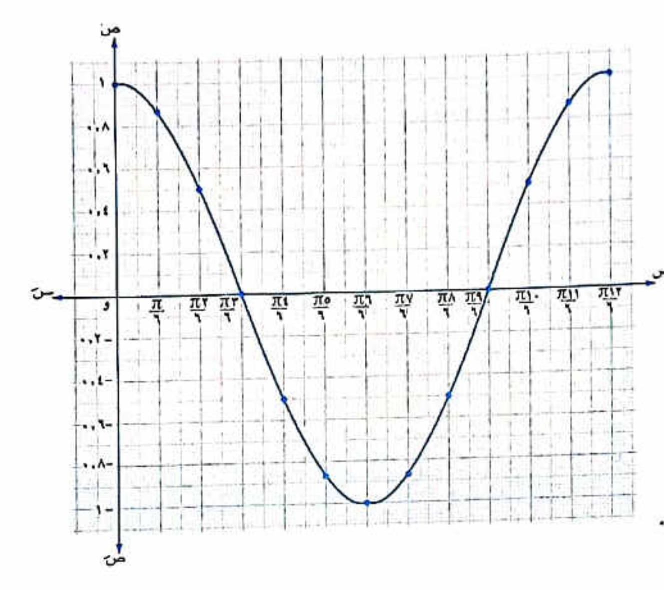
[١] القيم العظمى والصغرى للدالة. [٢] مدى الدالة. [٣] دورة الدالة.

ثانيًا دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جتا θ بيانيًا نكوّن جدولًا من بعض قيم θ الخاصة حيث θ ∋ [٠ ، ٢ π] وقيم جتا θ المناظرة لها

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
جتا θ	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	−٠,٥	−٠,٨٧	−١	−٠,٨٧	−٠,٥	٠	٠,٥	٠,٨٧	١

نعيّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة [٠ ، ٢ π]



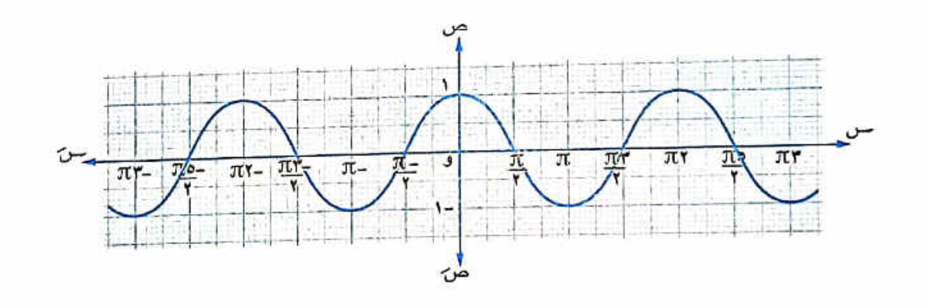
ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات

[٠ ، ٢ π] ، [٢ π ، ٤ π] ، [٤ π ، ٦ π] ، ...

وكذلك فى الفترات [−٢ π ، ٠] ، [−٤ π ، −٢ π] ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ

1. مجال دالة جيب التمام هو]−∞ ، ∞[
2. • القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما θ = ٢ ν π حيث ν ∋ ص
   • القيمة الصغرى للدالة تساوى −١ وتحدث عندما θ = π + ٢ ν π حيث ν ∋ ص
3. مدى الدالة = [−١ ، ١]
4. الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°)

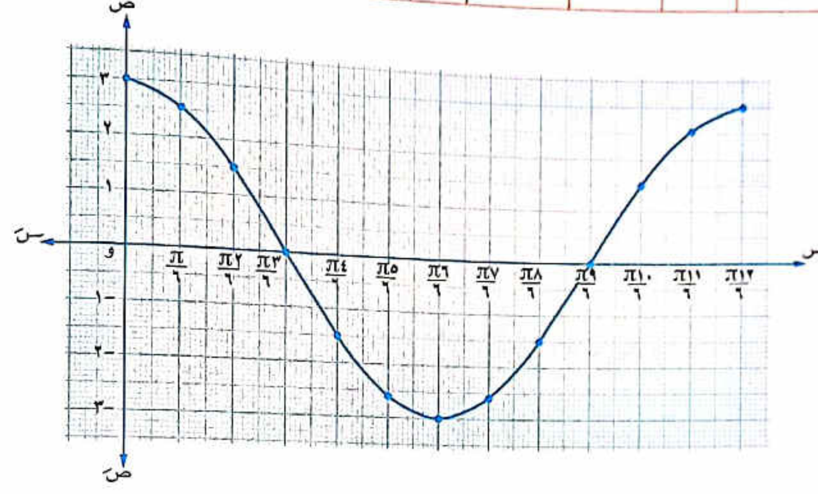
مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها.

الحل

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
ص	٣	٢,٦	١,٥	٠	١,٥-	٢,٦-	٣-	٢,٦-	١,٥-	٠	١,٥	٢,٦	٣



- القيمة العظمى للدالة = ٣ ، القيمة الصغرى للدالة = ٣-
- مدى الدالة = [٣- ، ٣]
- دورة الدالة = ٢ π (أى ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : د (θ) = ٢ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم استنتج :

١ القيم العظمى والصغرى للدالة. ٢ مدى الدالة. ٣ دورة الدالة.

ملاحظة

كل من الدالتين : ص = أ جا ب θ ، ص = أ جتا ب θ دالة دورية دورتها $\frac{٢\pi}{|ب|}$ ومداها [-أ ، أ] حيث أ موجبة.

فمثلاً الدالة د : د (س) = ٣ جا ٥ س مداها [٣- ، ٣] ودورتها $\frac{٢\pi}{٥}$

إذا كان مدى الدالة د : د (س) = أ جا ٥ س هو [٣- ، ٣] فإن : أ = ± ٣

مثال ٣

استخدام التكنولوجيا

باستخدام أحد برامج الكمبيوتر الرسومية مثل بيانيًا الدالة ص = ٥ جا ٣ θ ومن الرسم أوجد :

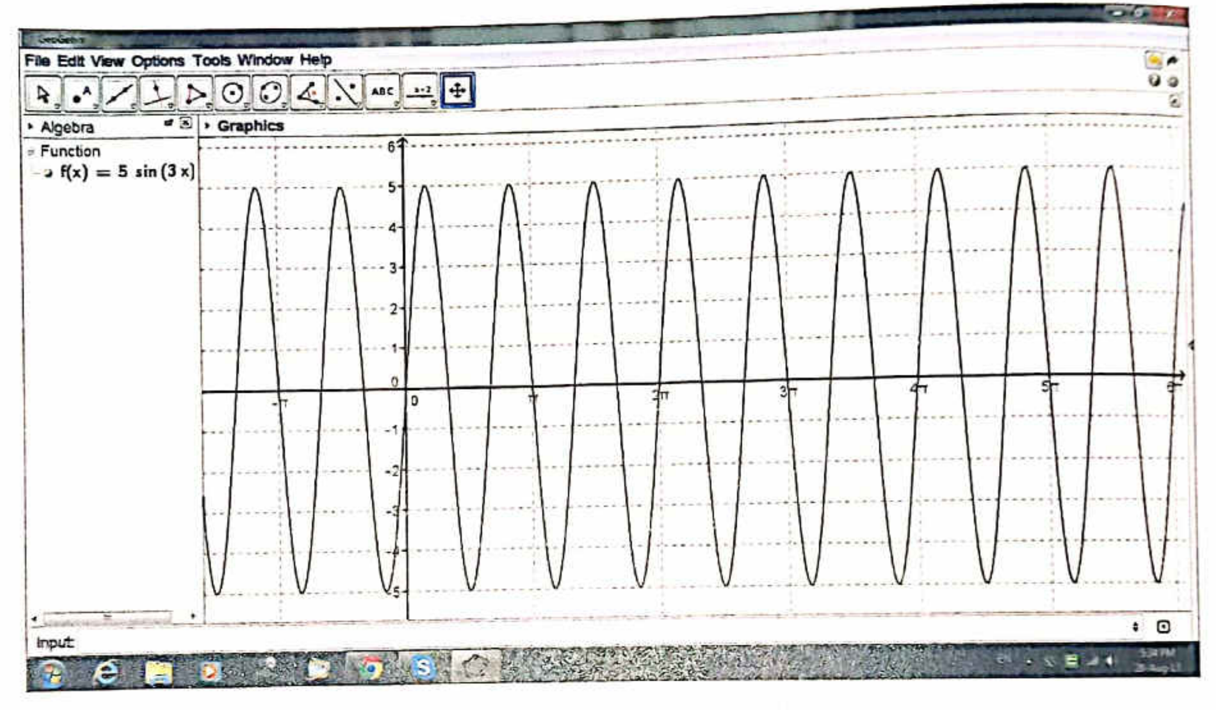
- مدى الدالة.
- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.
- دورة الدالة.

الحل

سوف نستخدم برنامج GeoGebra الذى تستطيع تنزيله مجانًا من الموقع www.geogebra.org

١ اكتب فى شريط الإدخال (input) صيغة الدالة كالآتى : $Y = 5 \sin (3x)$

٢ اضغط زر الإدخال (Enter) فى جهازك وسوف يظهر لك الشكل البيانى للدالة كما فى الشكل التالى :



- مدى الدالة = [−٥ ، ٥]
- القيمة العظمى = ٥ ، القيمة الصغرى = −٥
- دورة الدالة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = \frac{٢\pi}{٣}$ أى °١٢٠

ملاحظة :

يمكن رسم الدالة ص = ٥ جا ٣ θ (بالمثال السابق) حيث : °٠ $\leq \theta \leq$ °١٢٠ بدون استخدام جهاز الكمبيوتر كما يلى :

$\because$ °٠ $\leq \theta \leq$ °١٢٠ $\therefore$ °٠ $\leq$ ٣ $\theta \leq$ °٣٦٠

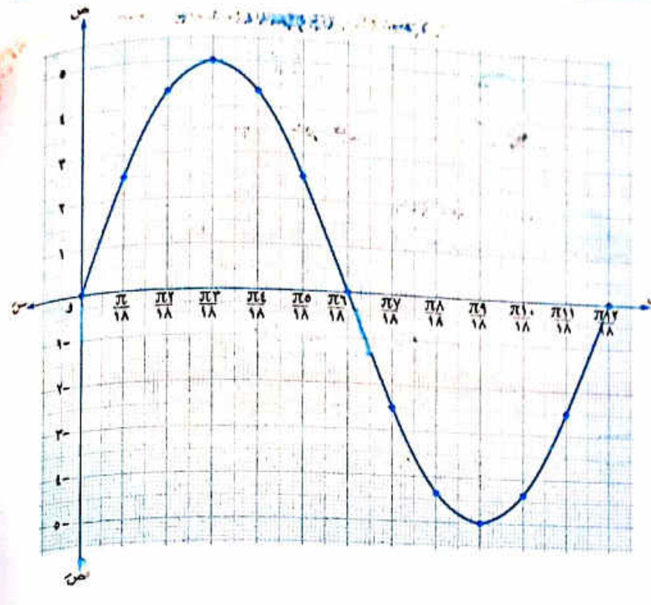
بإعطاء ٣ θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة : °٠ ، °٣٠ ، °٦٠ ، °٩٠ ، °١٢٠ ، ... ، °٣٦٠

نحصل على قيم θ بالقسمة على ٣ وهى : °٠ ، °١٠ ، °٢٠ ، °٣٠ ، °٤٠ ، ... ، °١٢٠

وهى تكافئ : ٠ ، $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{٢\pi}{١٨}$ ، $\frac{٣\pi}{١٨}$ ، ... ، $\frac{١٢\pi}{١٨}$

ثم نكوّن الجدول الآتى :

θ	٠	$\frac{\pi}{١٨}$	$\frac{٢\pi}{١٨}$	$\frac{٣\pi}{١٨}$	$\frac{٤\pi}{١٨}$	$\frac{٥\pi}{١٨}$	$\frac{٦\pi}{١٨}$	$\frac{٧\pi}{١٨}$	$\frac{٨\pi}{١٨}$	$\frac{٩\pi}{١٨}$	$\frac{١٠\pi}{١٨}$	$\frac{١١\pi}{١٨}$	$\frac{١٢\pi}{١٨}$
ص = ٥ جا ٣ θ	٠	٢,٥	٤,٣	٥	٤,٣	٢,٥	٠	-٢,٥	-٤,٣	-٥	-٤,٣	-٢,٥	٠



وهذا الشكل يمثل دورة واحدة للدالة ص = ٥ جا ٣ θ والتى يمكن تكرارها للحصول على الشكل الذى ظهر لنا عند تمثيلها باستخدام الكمبيوتر.

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة د : د (θ) = جا θ هو ....

(أ) {١ ، −١} (ب) [−١ ، ١] (جـ)]−١ ، ١[(د)]−∞ ، ∞[

(٢) إذا كانت : د (θ) = جتا ٥ θ فإن مدى الدالة هو ....

(أ) {−٥ ، ٥} (ب) [−١ ، ١] (جـ)]−٥ ، ٥[(د) [−٥ ، ٥]

(٣) مدى الدالة د : د (θ) = ٤ جا ٢ θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) [−٤ ، ٤] (ب)]−٤ ، ٤[(جـ) [−٢ ، ٢] (د)]−٢ ، ٢[

(٤) إذا كان : د (θ) = جا θ ، θ ∈]٠ ، π[فإن : مدى الدالة د هو ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]٠ ، ١] (جـ) [−١ ، ٠] (د) ع

(٥) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جتا س}}{٥}$ حيث س ∈ ع هو ....

(أ) [−$\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$] (ب) [−١ ، ١] (جـ) [−٥ ، ٥] (د) [٠ ، $\frac{٢}{٥}$]

(٦) إذا كان مدى الدالة د حيث : د (θ) = ٢ أ جا θ هو الفترة [−٦ ، ٦] فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) أ ، ب معًا.

(٧) القيمة الصغرى للدالة ع : ع (θ) = ٥ جتا ٧ θ هى ....

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −٥ (د) −٧

(٨) القيمة الصغرى للدالة د : د (θ) = ١ + جا ٣ θ هى ....

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −٤

(٩) القيمة الصغرى للدالة د : د (س) = ٢ جتا س − ١ هى ....

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −١

(١٠) القيمة العظمى للدالة ع : ع (θ) = ٤ جا θ هى ....

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

(١١) الدالة د : د (س) = ٣ + جا (س) تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{7\pi}{6}$

(١٢) إذا كان : د (θ) = ٤ جا ٣ θ فإن مجموع القيمة العظمى والصغرى للدالة د (θ) = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) صفر

(١٣) الدالة د : د (θ) = ٢ جا ٤ θ دالة دورية ودورتها تساوى ....

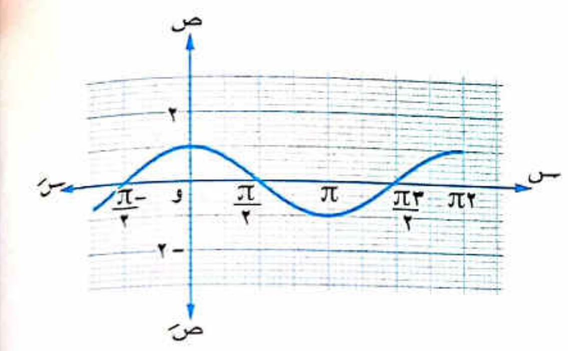
(أ) ٢ π (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(١٤) إذا كانت د دالة دورية ودورتها تساوى $\frac{\pi}{2}$ فإن : د (س) يمكن أن تكون ....

(أ) ٤ جا س (ب) جا ٤ س (جـ) $\frac{1}{4}$ جا س (د) جا $\frac{1}{4}$ س

(١٥) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة مثلثية :

ص = د (س) فإن قاعدة الدالة هى ....



(أ) ص = جا θ

(ب) ص = جتا θ

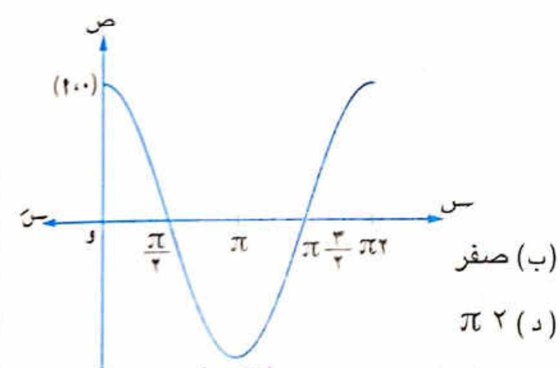
(جـ) ص = ٢ جتا θ

(د) ص = ٢ جا θ

(١٦) إذا كان الشكل المقابل يوضح منحنى

الدالة د : د (س) = أ جتا س

فإن : أ + ب = ...



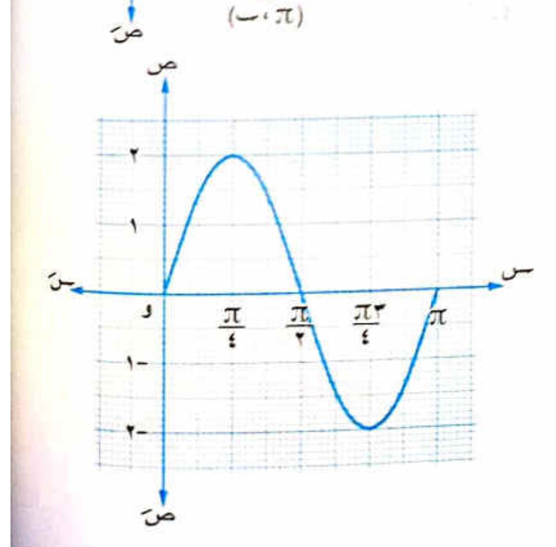
(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) π (د) ٢ π

(١٧) الشكل المقابل يمثل دورة واحدة لمنحنى دالة مثلثية :

ص = د (س) فإن قاعدة الدالة

هى ....

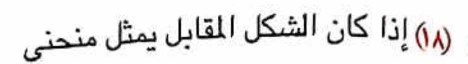


(أ) ص = ٢ جا س

(ب) ص = جا ٢ س

(جـ) ص = ٢ جا ٢ س

(د) ص = جا س



(١٨) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = ٢ جا $\frac{١}{٣}$ س

فإن إحداثى نقطة حـ ....

(أ) $\left(\frac{٣}{٢}\pi ، -١\right)$ (ب) (٩ π ، -٢)

(جـ) $\left(\frac{٢}{٩}\pi ، -٢\right)$ (د) $\left(\frac{٩}{٢}\pi ، -٢\right)$

(١٩) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = $\frac{١}{٢}$ جا θ (٢) ص = $\frac{١}{٣}$ جا ٢ θ (٣) ص = ٢ جا ٣ θ

---

٢ ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

(١) ص = ٤ جتا θ حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ π]

(٢) ص = ٤ جا θ حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ π]

(٣) ص = ٢ جتا θ حيث $\theta \in$ [-٢ π ، ٢ π]

(٤) ص = ٣ جا θ حيث $\theta \in$ [-٢ π ، ٢ π]

---

٣ ارسم الشكل البيانى لكل من الدالتين الآتيتين ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

(١) ص = جتا ٣ θ حيث $٠^\circ \leq \theta \leq ١٢٠^\circ$

(٢) ص = ٥ جا ٢ θ حيث $٠^\circ \leq \theta \leq ١٨٠^\circ$

---

٤ مثل كلًا من الدالتين ص = ٤ جتا θ ، ص = ٣ جا θ باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد :

(١) مدى الدالة. (٢) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\frac{٢ - \text{جا س}}{٣} = \text{م}$ فإن : ....

(أ) $\frac{١}{٣} \leq \text{م} \leq ١$ (ب) $\frac{٢}{٣} \leq \text{م} \leq ٣$ (جـ) $١ \leq \text{م} \leq ٣$ (د) $٢ \leq \text{م} \leq ٤$

(٢) الدالة ص = جا $\left(\frac{\pi}{٤} + \text{س}\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) صفر

(٣) الدالة د : د(س) = جا(ب س) دالة دورية ودورتها $\frac{٢\pi}{٣}$ فإن : ب = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٦

(٤) إذا كانت النقطتان (س$_١$ ، جتا س$_١$) ، (س$_٢$ ، جتا س$_٢$) تقعان على منحنى الدالة د : د(س) = جتا س فإن أكبر قيمة للمقدار (جتا س$_١$ − جتا س$_٢$) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١٨٠°

(٥) إذا كانت الدالة د : د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ دالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{٢}$ ومداها [−١ ، ١] فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

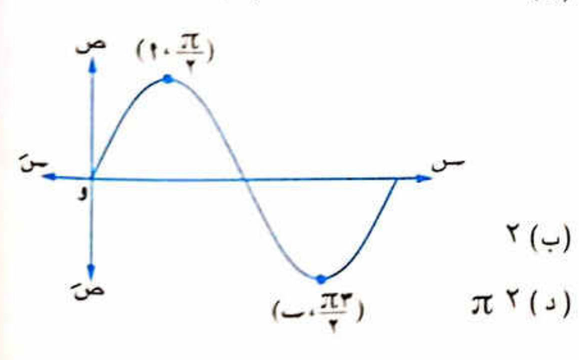
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٦) إذا كانت : د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ ، ب > ٠ دالة دورية ودورتها π ومداها [−٣ ، ٣] فإن : أ + ب = ...



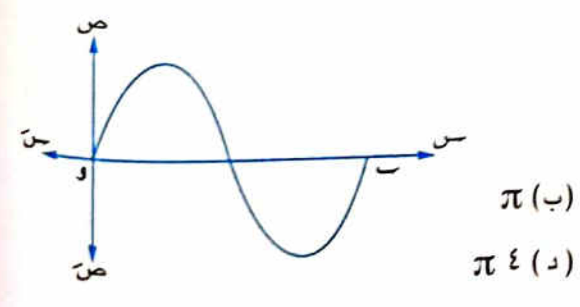
(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

(٧) إذا كان الشكل المقابل يوضح منحنى ص = جا س فإن : |أ| + |ب| = ...



(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) π (د) ٢π

(٨) إذا كان الشكل المقابل يوضح منحنى ص = ٣ جا $\frac{١}{٢}$س فإن الإحداثي السيني لنقطة ب يساوي ....



(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) ٢π (د) ٤π

(٩) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ص = جا س

فإن : ب − أ = ...

(أ) π (ب) ٢ π

(جـ) ٣ π (د) ٤ π

(١٠) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(١١) إذا كان عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات حيث د (س) = جا أ س يساوى ٩ مرات فى الفترة [٠ ، ٢ π] فإن : أ = ...

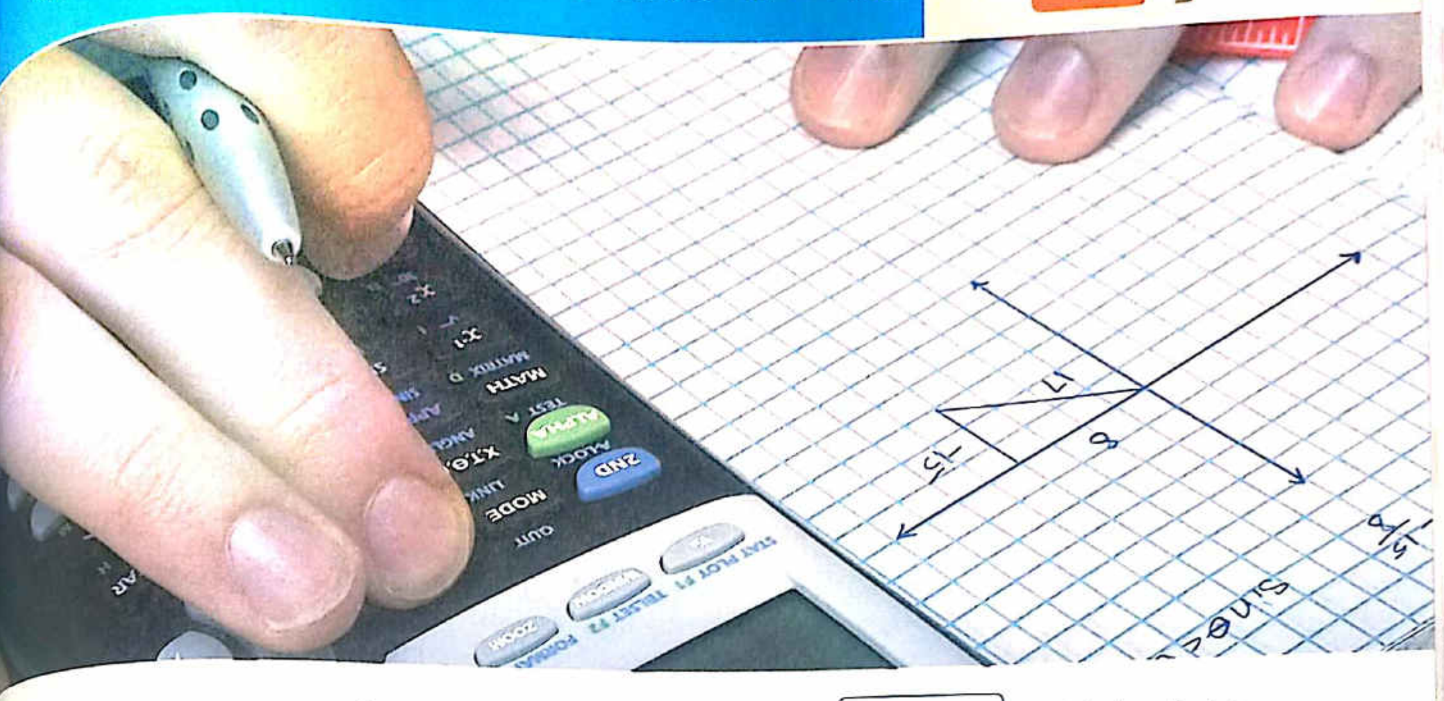
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٤

(١٢) عدد المرات التى تصل فيها الدالة د : د (س) = جا ٢ س + ١ إلى قيمتها العظمى فى الفترة [٠ ، ٢ π[يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية



* نعلم أنه : إذا كانت $\boxed{ص = حا\ \theta}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص إذا علمنا قيمة θ

فمثلاً إذا كانت $\theta = ٣٠°$ فإن : ص = حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

* هناك صورة أخرى تستخدم فى إيجاد قيمة θ إذا علمت قيمة ص وهى : $\boxed{\theta = حا^{-١}\ ص}$

فمثلاً إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ فإن : $\theta = حا^{-١} \left(\frac{١}{٢}\right) = ٣٠°$

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التى تحقق كلًّا مما يأتى :

١ حا θ = ٠,٦٤٣٨   ٢ حتا θ = ٠,٤٥١٧

الحل

١ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :



فيظهر على الشاشة العدد ”40° 4' 32.75

$\therefore \theta \simeq ٤٠°\ ٤'\ ٣٣''$

لاحظ

إننا استخدمنا الآلة الحاسبة لأن قيم الدالة المثلثية ليست من الدوال الخاصة أو المنتسبة إليها.

٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :



فيظهر على الشاشة ”49.9 '8 °63 $\therefore \theta \simeq ٦٣°\ ٨'\ ٥٠''$

ملاحظة

الدوال : θ = جا$^{-1}$ س ، θ = جتا$^{-1}$ س ، θ = ظا$^{-1}$ س تعرف بأنها الدوال العكسية للدوال المثلثية الأساسية وهذه الدوال تنتج قيمة وحيدة للمتغير θ لكل قيمة للمتغير س وتعين قيمة θ داخل نطاق محدد حسب خواص كل دالة

ولذلك فإن الآلة الحاسبة تأخذ فترات معينة تنتمى إليها θ بحيث يكون للدوال المثلثية دوالاً عكسية وهى كالتالى :

- جا$^{-1}$ أ $\in \left[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right]$ حيث أ $\in$ [-١ ، ١]
- جتا$^{-1}$ أ $\in$ [٠ ، π] حيث أ $\in$ [-١ ، ١]
- ظا$^{-1}$ أ $\in \left]\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right[$ حيث أ $\in$ ح

فمثلاً جا$^{-1}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ = -٣٠° أى $\frac{-\pi}{6}$ (قيمة وحيدة $\in \left[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right]$)

، جتا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ = ٦٠° أى $\frac{\pi}{3}$ (قيمة وحيدة $\in$ [٠ ، π])

وبالتالى فإنه عند حساب θ حيث θ = جا$^{-1}$ أ أو θ = جتا$^{-1}$ أ ، θ = ظا$^{-1}$ أ

نستخدم الآلة مباشرة ويكون الحل قيمة وحيدة

أما عند حساب θ حيث ٠ < θ < ٣٦٠° ، جا θ = أ أو ، جتا θ = أ أو ، ظا θ = أ

نتبع الخطوات كما بالمثال التالى.

مثال ٢

إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد θ التى تحقق كلاً مما يأتى :

[١] جتا θ = ٠,٨١٧٧ [٢] ظا θ = -٨,٦٤٢١

الحل

[١] ∵ جتا θ = ٠,٨١٧٧ > ٠ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى جيب تمامها ٠,٨١٧٧ وذلك بكتابة جتا$^{-1}$ ٠,٨١٧٧ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT COS 0 . 8 1 7 7 = °'''

∴ جتا$^{-1}$ ٠,٨١٧٧ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً

∴ الربع الأول : θ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً ، الربع الرابع : θ ≃ ٣٦٠° - (٣٥° ٨َ ٤١ً) = ٣٢٤° ٥١َ ١٩ً

2 ∵ ظتا θ = -٨,٦٤٢١ < ٠ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى ظل تمامها | -٨,٦٤٢١ |

وذلك بكتابة ظتا$^{-1}$ ٨,٦٤٢١ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT $\tan^{-1}$ tan 8 . 6 4 2 1 x^{-1} = 0'''

∴ ظتا$^{-1}$ ٨,٦٤٢١ ≈ ٦° ٣٦َ ٢ً

∴ الربع الثانى : θ ≈ ١٨٠° − (٦° ٣٦َ ٢ً) = ١٧٣° ٢٣َ ٥٨ً

، الربع الرابع : θ ≈ ٣٦٠° − (٦° ٣٦َ ٢ً) = ٣٥٣° ٢٣َ ٥٨ً

حاول بنفسك

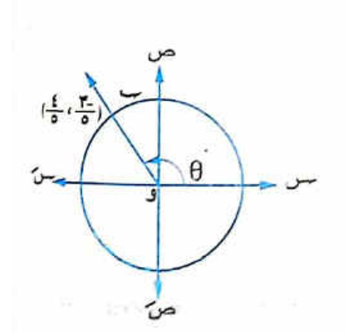
أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° التى تحقق أن :

1 جا θ = ٠,٨ 2 ظا θ = ٠,٤٦٩٥ 3 قتا θ = -٢,٩١١٥

مثال ٣

إذا قطع الضلع النهائى لزاوية موجبة قياسها θ فى وضعها القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فأوجد : θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

الحل



∵ النقطة ب $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ تقع فى الربع الثانى.

∴ الزاوية الموجهة التى قياسها θ تقع فى الربع الثانى.

، ∵ جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$

∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد جا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$



∴ جا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$ ≈ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ θ = ١٨٠° − (٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ١٢٦° ٥٢َ ١٢ً

مثـال ٤

سلم طوله ٨ أمتار يستند على جدار رأسى وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٦ أمتار.
أوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأرض.

الحـل

السلم يصنع مع الحائط الرأسى والأرض الأفقية مثلثًا قائم الزاوية وليكن

Δ ا ب حـ القائم الزاوية فى حـ

$\therefore$ جا $\theta = \frac{ا حـ}{ا ب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

حيث : $°٠ < \theta < °٩٠$ $\therefore \theta =$ جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$



$\therefore \theta = ٢٥ \; ٣٥ \; °٤٨$ $\therefore \theta^{د} = ٢٥ \; ٣٥ \; °٤٨ \times \frac{\pi}{°١٨٠} \approx ٠,٨٤٨^{د}$

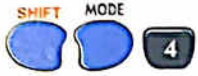
$\therefore$ قياس زاوية ميل السلم على الأرض $\approx ٠,٨٤٨^{د}$

ملاحظة

فى المثال السابق :

$\theta =$ جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$ يمكن إيجاد θ بالراديان مباشرةً باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

١ اضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين لتحويل الآلة من النظام الستينى (Deg) إلى النظام الدائرى (Rad)



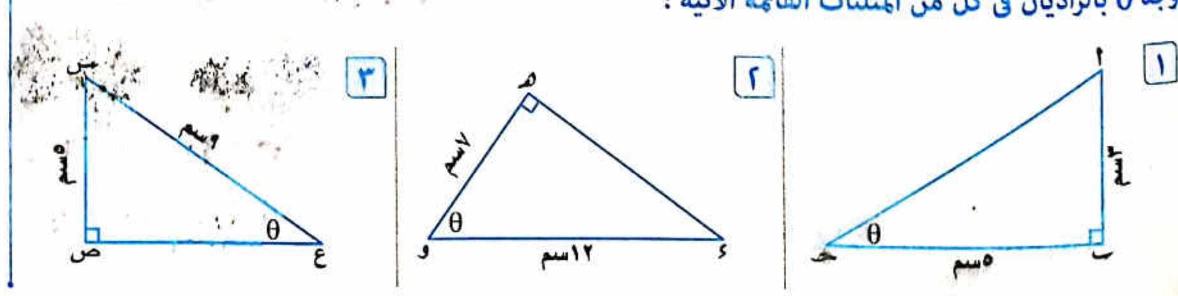
٢ أوجد θ بالراديان مباشرةً بالضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين



$\therefore \theta^{د} \approx ٠,٨٤٨$

حاول بنفسك

أوجد θ بالراديان فى كل من المثلثات القائمة الآتية :

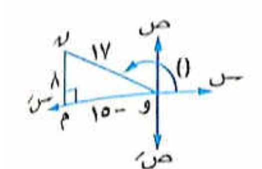


مثال ٥

إذا كان : جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد θ لأقرب ثانية ثم أوجد باقى الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

الحل



∵ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ ∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{٨}{١٧}$ ≃ ٢١ ٤ َ ٢٨ ً

، ∵ ٩٠° < θ < ١٨٠° ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = ١٨٠° − ٢١ ٤ َ ٢٨ ً = ٣٩ ٥٥ َ ١٥١ ً

∵ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ ∴ نعتبر أن م ى = ٨ وحدة طول ، و ى = ١٧ وحدة طول

فيكون (باستخدام نظرية فيثاغورس) و م = ١٥ وحدة طول وله إشارة سالبة

∴ جتا θ = $\frac{\text{و م}}{\text{و ى}}$ = $\frac{-١٥}{١٧}$ ، طا θ = $\frac{\text{م ى}}{\text{و م}}$ = $\frac{٨}{-١٥}$ = $-\frac{٨}{١٥}$

، قتا θ = $\frac{\text{و ى}}{\text{م ى}}$ = $\frac{١٧}{٨}$ ، قا θ = $\frac{\text{و ى}}{\text{و م}}$ = $\frac{١٧}{-١٥}$ = $-\frac{١٧}{١٥}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{و م}}{\text{م ى}}$ = $\frac{-١٥}{٨}$

حاول بنفسك

إذا كان : جا θ = $-\frac{١}{٣}$ ، ٢٧٠° ≤ θ ≤ ٣٦٠°

١ أوجد : θ لأقرب ثانية.

٢ أوجد قيمة كل من : جتا θ ، طا θ ، قا θ

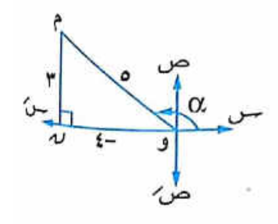
مثال ٦

إذا كان : جا α = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < α < ١٨٠° ، طا β = $-\frac{١٢}{٥}$ حيث β ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π [

، جا θ = جا (١٨٠° − α) جتا (β − ١٨٠°) جتا α

أوجد : θ لأقرب دقيقة حيث ٠° < θ < ٩٠°

الحل



∵ (و ى)^{٢} = (٥)^{٢} − (٣)^{٢} = ١٦

∴ و ى = ٤ وحدة طول وإشارته سالبة.

، ∵ (و ن)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٦٩ ∴ و ن = ١٣ وحدة طول.

$\therefore$ حا θ = حا $(180^\circ - \alpha)$ حتا $(\beta - 180^\circ)$ حتا α

= حا α حتا $(180^\circ + \beta)$ حتا α

= حا α × (− حتا β) × حتا α = $\frac{3}{5} \times \frac{-5}{13} \times \frac{-4}{5} = \frac{12}{65}$

، $\because$ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ $\qquad$ $\therefore$ θ تقع فى الربع الأول.

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : $\theta = 10^\circ\ 38'$

ص، س، و، ٥، ك، β، ص َ، ١٣، −١٢، س َ، ق

مثال ٧

إذا كان : ٥ حا $(180^\circ - \alpha) = 3$ حيث $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

، ٥ طتا $(90^\circ + \beta) - 12 = 0$ حيث $90^\circ < \beta < 180^\circ$

أوجد قيمة θ حيث : حتا θ = حتا $(90^\circ + \alpha)$ طا $(270^\circ + \beta)$ طا $(270^\circ - \alpha)$ حيث $\theta \in]0 , 2\pi[$

الحل

$\because$ ٥ حا $(180^\circ - \alpha) = 3$ $\qquad$ $\therefore$ ٥ حا $\alpha = 3$

$\therefore$ حا $\alpha = \frac{3}{5}$ حيث α تقع فى الربع الأول.

ص، ٥، ٣، α، س، س َ، و، ٤، ص َ

كذلك $\because$ ٥ طتا $(90^\circ + \beta) = 12$

$\therefore$ ٥ (− طا β) = ١٢

$\therefore$ طا $\beta = \frac{-12}{5}$ حيث β تقع فى الربع الثانى.

١٢، ١٣، ص، β، س َ، −٥، و، س، ص َ

حتا θ = حتا $(90^\circ + \alpha)$ طا $(270^\circ + \beta)$ طا $(270^\circ - \alpha)$

= (− حا α) × (− طتا β) × طتا α = $\frac{3}{5} \times \frac{-5}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{-1}{3}$

، $\because$ حتا $\theta < 0$

$\therefore$ $\theta \in$ الربع الثانى. $\qquad$ أو ، $\theta \in$ الربع الثالث.

، $\because$ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{1}{3}$ هى $70^\circ\ 32'$

$\therefore$ $\theta = 180^\circ - 70^\circ\ 32' = 109^\circ\ 28'$ $\qquad$ أو ، $\theta = 180^\circ + 70^\circ\ 32' = 250^\circ\ 32'$

على إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي ● تذكر ● فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : θ = حا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(٢) إذا كان : قا θ = −٢ ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٣٠٠° (جـ) ٣٣٠° (د) ١٥٠°

(٣) إذا كان : ظا θ = − $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢١٠°

(٤) إذا كان : ظا θ = ٢,١ وكانت ٩٠° ≤ θ ≤ ٣٦٠° فإن : θ ≃ ....

(أ) ٦٤,٥° (ب) ١١٥,٥° (جـ) ٢٤٤,٥° (د) ٢٩٥,٥°

(٥) إذا كان : ظا θ = ١,٨ وكانت ٩٠° ≤ θ ≤ ٣٦٠° فإن : θ ≃ ....

(أ) ٦٠° ٥٧َ (ب) ١١٩° ٣َ (جـ) ٢٤٠° ٥٧َ (د) ٢٩٩° ٣َ

(٦) إذا كان : ٥ ظتا (٩٠° + θ) = ١٢ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن : جتا (٩٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{-12}{13}$ (ب) $\frac{12}{13}$ (جـ) $\frac{5}{13}$ (د) $\frac{-5}{13}$

(٧) إذا كان : ص = حا (٩٠° − θ) فإن : θ = ...

(أ) حا$^{-1}$ ص (ب) جتا$^{-1}$ ص (جـ) حا$^{-1}$ θ (د) جتا$^{-1}$ θ

(٨) إذا كانت : قا θ = − $\sqrt{2}$ فإن كلًا مما يأتى يصلح أن يكون قيمة θ ماعدا ....

(أ) ٤٥° (ب) −٤٥° (جـ) −١٣٥° (د) ٢٢٥°

(٩) إذا كان : ٩٠° < θ < ١٨٠° ، ظا θ = −٢,٤ فإن : قا (٩٠° − θ) = ...

(أ) $\frac{-5}{13}$ (ب) $\frac{-13}{5}$ (جـ) $\frac{12}{13}$ (د) $\frac{13}{12}$

(١٠) حا$^{-1}$ ٠,٧ ≃ ....

(أ) ٣٧ً ٢٥َ ٤٤° (ب) ٢٣ً ٣٤َ ١٣٥°

(جـ) ٣٧ً ٢٥َ ٢٢٤° (د) ٢٣ً ٣٤َ ٣١٥°

(١١) $جا^{-١}$ (-٠,٦) ≃ ....

(أ) -٣٦,٨٧° (ب) ١٤٣,١٣° (جـ) ٢١٦,٨٧° (د) ٣٢٣,١٣°

(١٢) $جا^{-١} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + جتا^{-١} \left(\frac{١}{٢}\right)$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(١٣) إذا كان : جا θ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(١٤) إذا كان : جتا θ = ٠,٤٣٦ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ ≃ ....

(أ) ٩ً ٦٤° (ب) ٥١َ ١١٥° (جـ) ٩ً ٢٤٤° (د) ٥١َ ٢٩٥°

(١٥) إذا كان : جا θ = $-\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...°

(أ) -٣٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢١٠ (د) ١٥٠

(١٦) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى

النقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}،\ ص\right)$ حيث ص ∈ $ح^{+}$ فإن : θ = ...°

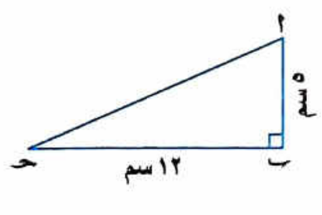
(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢١٠ (د) ٣٣٠

(١٧) إذا قطع الضلع النهائى للزاوية الذى قياسها θ فى وضعها القياسى دائرة الوحدة

فى النقطة $\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}،\ \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ فإن : θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(١٨) فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ جـ ب) = ...

(أ) $ظا^{-١} \left(\frac{١٢}{٥}\right)$ (ب) $جا^{-١} \left(\frac{١٢}{١٣}\right)$

(جـ) $قتا^{-١} \left(\frac{١٣}{١٢}\right)$ (د) $جتا^{-١} \left(\frac{١٢}{١٣}\right)$

(١٩) $جتا \left(\frac{١}{٢}\right)^{\circ} \times جتا^{-١} \left(\frac{١}{٢}\right)$ ≃ ....°

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦٠ (د) جتا $\frac{١}{٤}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد بالقياس الستينى قياس أصغر زاوية موجبة θ تحقق كلًا من :

(١) جا θ = ٠,٦ (٢) جتا θ = ٠,٧٨٦٥ (٣) ظا θ = ٢,٤٥٧٧

(٤) ظا θ = −٠,٨٢٢٧ (٥) جا θ = −٠,٤٦٥٢ (٦) جتا θ = −٠,٥٢٠٦

(٧) ظتا θ = ٣,٦٣١٨ (٨) ظتا θ = −١,٤٦١٢ (٩) قا θ = ١,٠٤٧٨

(١٠) قتا θ = −٢,٥٤٦٦ (١١) قا θ = −٣,٥٧ (١٢) قتا θ = ٢,٩٨١١

٢ إذا كان ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد θ التى تحقق كلًا مما يأتى :

(١) جا θ = ٠,٨٦٦٠٣ (٢) جتا θ = −٠,٤٧٥٢ (٣) قا θ = −١,٢٥٧٦

(٤) ظا θ = ١,٥٤١٧ (٥) جتا θ = −٠,٦٤٢ (٦) قا θ = ٢,٠٥١٥

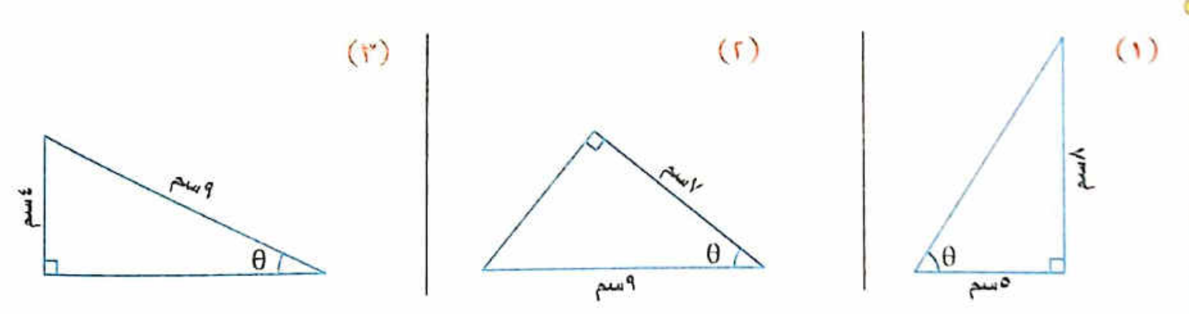
(٧) قتا θ = −١,٨٧١٥ (٨) ظتا θ = −٢,٧٠١٢ (٩) ظا θ = −٢,١٤٥٦

٣ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب

فأوجد : ق (د θ) حيث ٠° < θ < ٣٦٠° عندما :

(١) ب $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (٢) ب $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (٣) ب $(\frac{6}{10}, \frac{-8}{10})$

٤ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :



٥ إذا كان : جا θ = $\frac{1}{3}$ وكانت ٩٠° ≥ θ ≥ ١٨٠° :

(١) احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية. (٢) أوجد قيمة كل من : جتا θ ، ظا θ ، قا θ

٦ أ ب حـ مثلث فيه جتا أ = −٠,٥٨٠٧ ، ظا ب = ٠,٤٥٧٨ ، فأوجد لأقرب دقيقة ق (د حـ) «٥٤ ٢٩°»

٧ إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :

ظا θ = جا ٤٨ ٢٣° + جتا ٣٢ ٨٤° «٣١ ٢٦° ، ٣١ ٢٠٦°»

٨ **إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :**

جتا θ = جا ٧٠° − ٢ جتا ٨٠° ظا ٧٥°

«٥٣َ ١١٠° أ ، ٧َ ٢٤٩°»

---

٩ إذا كان : ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، θ ∈]٠ ، ٢π[

أوجد قيمة α لأقرب دقيقة إذا كان :

جا α = جا ١٥٠° جا (− θ) + $\frac{١}{٥}$ قتا (١٨٠° + θ) ظا ٢٢٥°

«٣٢َ ٤٠° أ ، ٢٨َ ١٣٩°»

---

١٠ إذا كان : جا α = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < α < ١٨٠° أوجد θ من المعادلة :

− $\frac{٥}{٤}$ جتا (٣٦٠° − α) + ظتا (٢٧٠° − θ) = ٢ حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

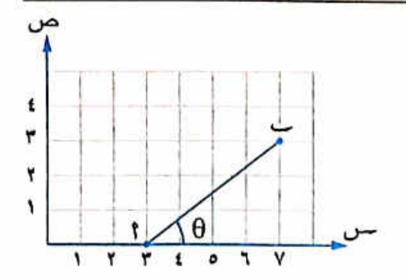
«٤٥° أ ، ٢٢٥°»

---

١١ الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين

النقطتين أ (٣ ، ٠) ، ب (٧ ، ٣)

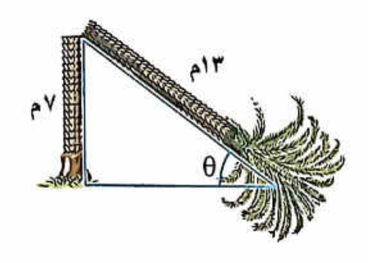
أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{أب}$ ومحور السينات.



«١٢ً ٥٢َ ٣٦°»



١٢ بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا ، بحيث تأخذ الشكل المجاور ، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار ، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هى الزاوية التى يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد θ بالتقدير الستينى.



إجابة كريم

∵ قا θ = $\frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قا$^{-١}$ $\frac{١٣}{٧}$

∴ θ ≃ ٣٢° ٣٤َ ٤٤ً

إجابة عمر

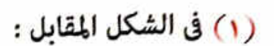
∵ قا θ = $\frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قا$^{-١}$ $\frac{١٣}{٧}$

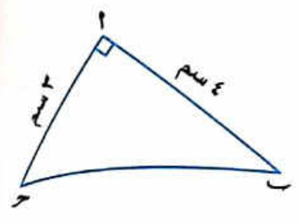
∴ θ ≃ ٥٧° ٢٥َ ١٦ً

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :





ق (∠ أ ب جـ) = ...

(أ) حا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$ (ب) حا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$ (جـ) طا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$ (د) طتا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

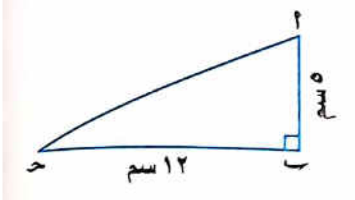
(٢) حا (حتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٣) قتا (حتا$^{-1}$ صفر) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) صفر

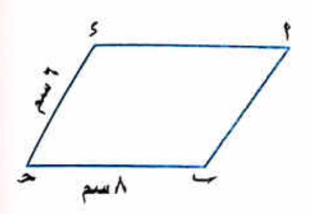
(٤) فى الشكل المقابل :



حا (طا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$) = ...

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) ١٣

(٥) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازى أضلاع مساحته = ٤٠ سم^{٢}

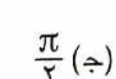
فإن : ق (∠ أ) ≃ ....

(أ) ٣٧° (ب) ٥٦° (جـ) ٥٣° (د) ٣٤°

(٦) طا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ + طتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

(٧) حتا$^{-1}$ س + حا$^{-1}$ س = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ 

(د) π

تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

1 📖 يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°

ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى. «٣,٤٩^ء»

2 📖 كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم ؟

«٢ π سم»

3 📖 قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات ، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم ، فأوجد سرعته بالكيلو متر فى الساعة. «٩٤٢٤,٧٨ كم/س»

4 📖 قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات ، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم.



فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر. «٢٠٩٤٤ كم»

5 📖 تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها ، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل ١٥° لكل ساعة.



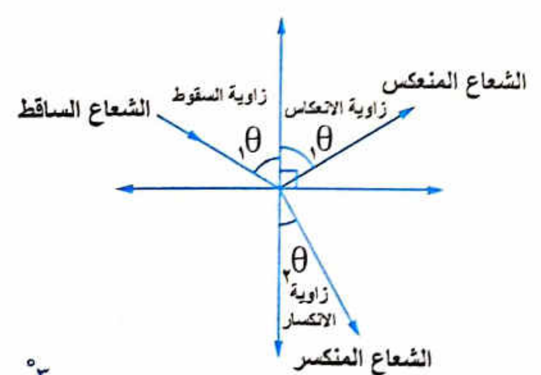
(١) أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

(٢) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{٢\pi}{٣}$ راديان ؟

(٣) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم ، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

«١,٠٥^ء ، ٨ ساعات ، ٢٠ π سم»

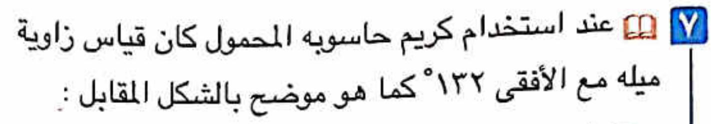
6 📖 عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف ، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور :



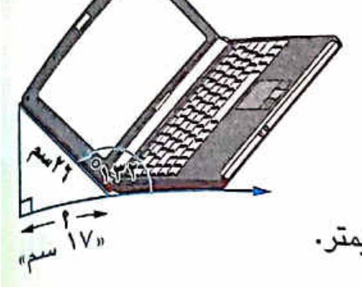
إذا كان جا θ_1 = ك جا θ_2

، كانت ك = $\sqrt{٣}$ ، θ_1 = ٦٠° فأوجد قياس زاوية θ_2

«٣٠°»



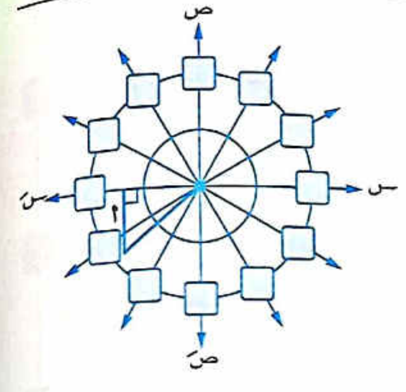
٧ عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كان قياس زاوية ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل :



(١) ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى ، بحيث تكون الزاوية ١٣٢° فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم أ ، ثم أوجد قيمة أ لأقرب سنتيمتر. «١٧ سم»

٨ تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى ، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ طول نصف قطره ١٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى $\frac{5\pi}{4}$:



(١) ارسم الزاوية التى قياسها $\frac{5\pi}{4}$ فى الوضع القياسى.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة أ ثم أوجد قيمة أ بالمتر لأقرب رقمين عشريين. «٨.٤٩ متر»

٩ يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر ، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار ، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة.

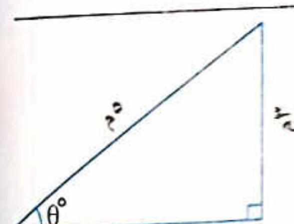
(١) أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.

(٢) ارسم مخططًا بيانيًا يبيِّن كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

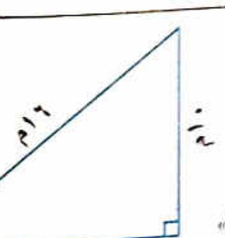
(٣) أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء.

١٠ سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٣ أمتار

فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأفقى. «٠.٦٤٤»

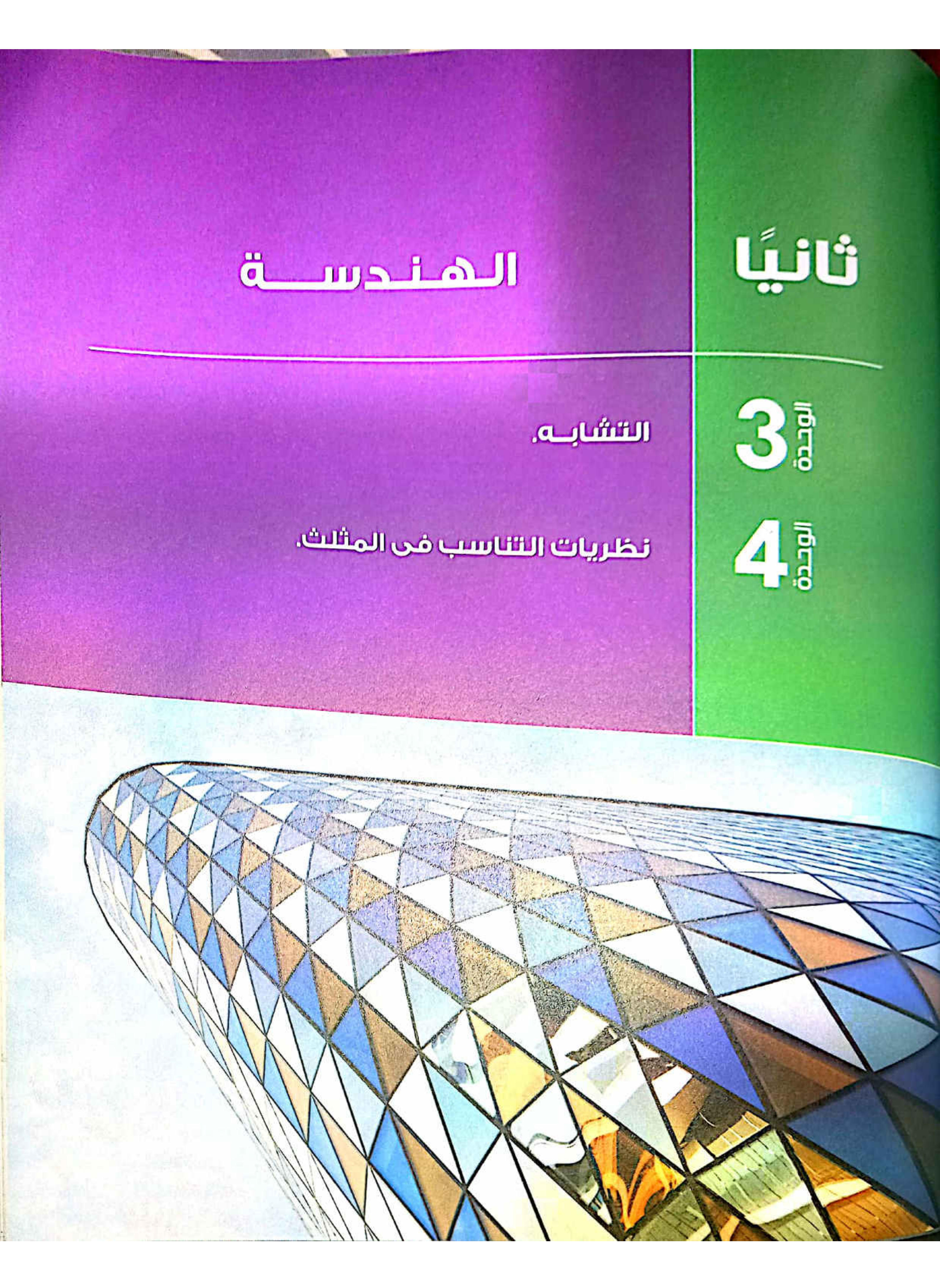


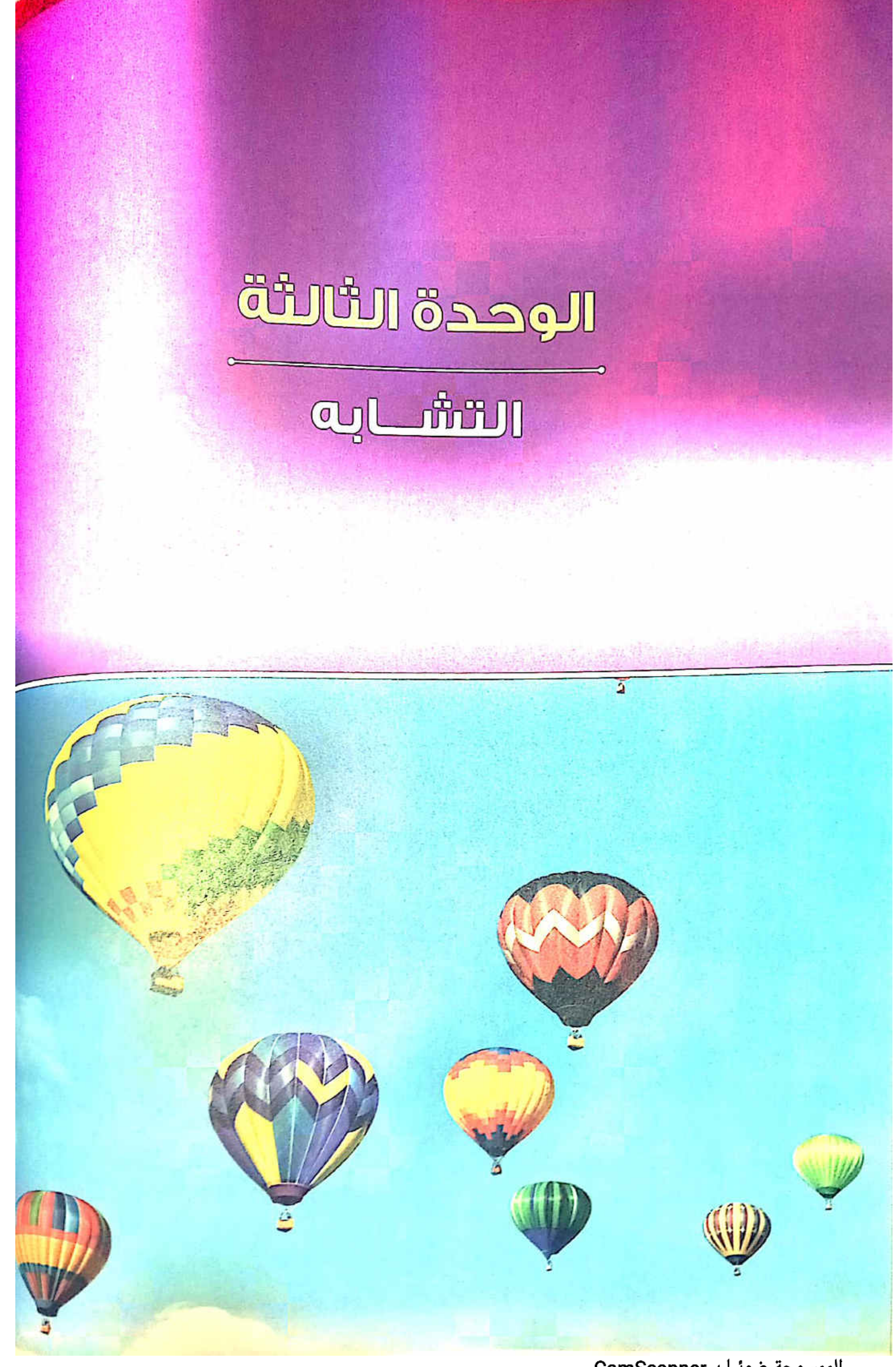
١١ توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات لأقرب جزء من ألف. «٣٨.٦٨٢°»



١٢ يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ مترًا وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ أوجد θ بالتقدير الستينى. «٧°٤ ٦١»

٦٥م
٨م
θ°


ثانيًا
الهندسة
الوحدة 3
التشابه.
الوحدة 4
نظريات التناسب فى المثلث.



الوحدة الثالثة

التشـــابه

دروس الوحدة

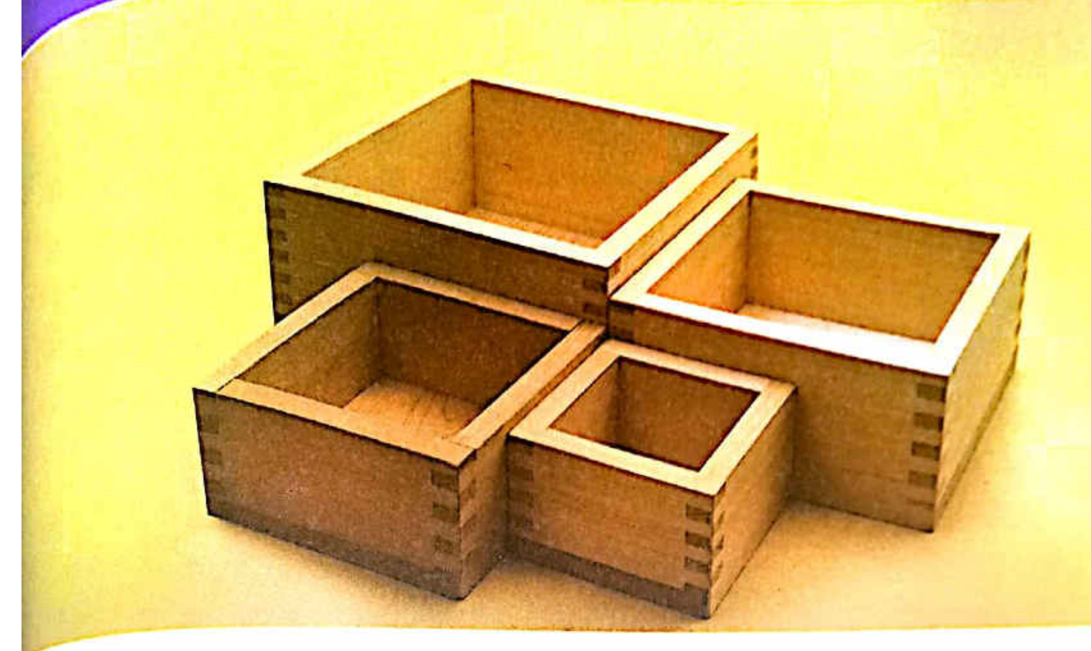
نواتـج التعلـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية عن موضوع التشابه.
- يستخدم معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.
- يتعرف مسلمة التشابه «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».
- يعرف أنه إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.
- يعرف أنه إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين ، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.
- يحل تمارين وتطبيقات رياضية على حالات تشابه المثلثات.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين».
- يستخدم تشابه المثلثات فى القياس غير المباشر.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- يتعرف العلاقة بين طول مماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- ينمذج ويحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.



تشابه المضلعات



تعريف

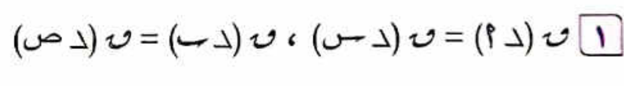
يُقال لمضلعين $م_1$ ، $م_2$ (لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق **الشرطان الآتيان معًا** :

(١) تساوى قياسات الزوايا المتناظرة. (٢) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

وفى هذه الحالة نكتب : المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$ **لتعنى أن :** المضلع $م_1$ يشابه المضلع $م_2$

ففى الشكل المقابل إذا كان :

(١) ق(∠أ) = ق(∠س) ، ق(∠ب) = ق(∠ص)

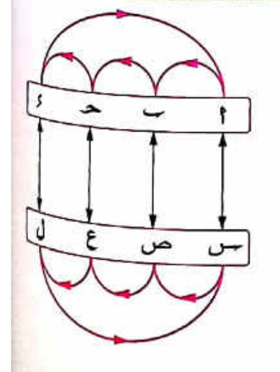


، ق(∠حـ) = ق(∠ع) ، ق(∠ء) = ق(∠ل)

(٢) $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$ فإن : المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

ملاحظة (١)

يُفضل عند كتابة المضلعين المتشابهين أن نكتبهما بنفس ترتيب رءوسهما المتناظرة حتى يسهل استنتاج الزوايا المتساوية فى القياس وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع.



فمثلًا إذا كتبنا أن المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإننا نستنتج مباشرة أن :

(١) ق(∠أ) = ق(∠س) ، ق(∠ب) = ق(∠ص)

، ق(∠حـ) = ق(∠ع) ، ق(∠ء) = ق(∠ل)

(٢) $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$

ملاحظة ٢

إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}} = ك$ (نسبة التشابه أو معامل التشابه) حيث : ك > صفر

فإذا كان معامل تشابه المضلع أ ب حـ ء للمضلع س ص ع ل = ك

فإن معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب حـ ء = $\frac{١}{ك}$

ملاحظة ٣

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$

إذا كان : ك > ١ فإن : المضلع $م_١$ هو تكبير للمضلع $م_٢$ وتسمى ك نسبة التكبير

إذا كان : ٠ < ك < ١ فإن : المضلع $م_١$ هو تصغير للمضلع $م_٢$ وتسمى ك نسبة التصغير

إذا كان : ك = ١ فإن : المضلع $م_١$ يطابق المضلع $م_٢$

وبصفة عامة : يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

ملاحظة ٤

لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتحقق شرطا التشابه معًا ولا يكفى تحقق أحدهما دون الآخر.

فمثلًا

- ليس جميع المستطيلات متشابهة فبرغم تساوى قياسات زواياها المتناظرة (كل = ٩٠°)
  إلا أن أطوال أضلاعها المتناظرة يمكن أن تكون غير متناسبة.
- كذلك ليس جميع المعينات متشابهة فبرغم أن أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة
  إلا أن زواياها المتناظرة يمكن أن تكون غير متساوية القياس.

ملاحظة ٥

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين ، بينما ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين.

ملاحظة ٦

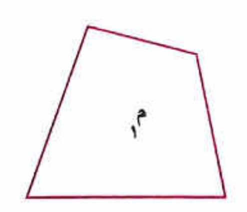
المضلعان المشابهان لمضلع ثالث متشابهان.

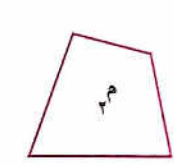
أى أنه

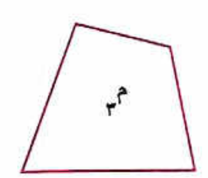
إذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٣$

، المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$

فإن : المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$







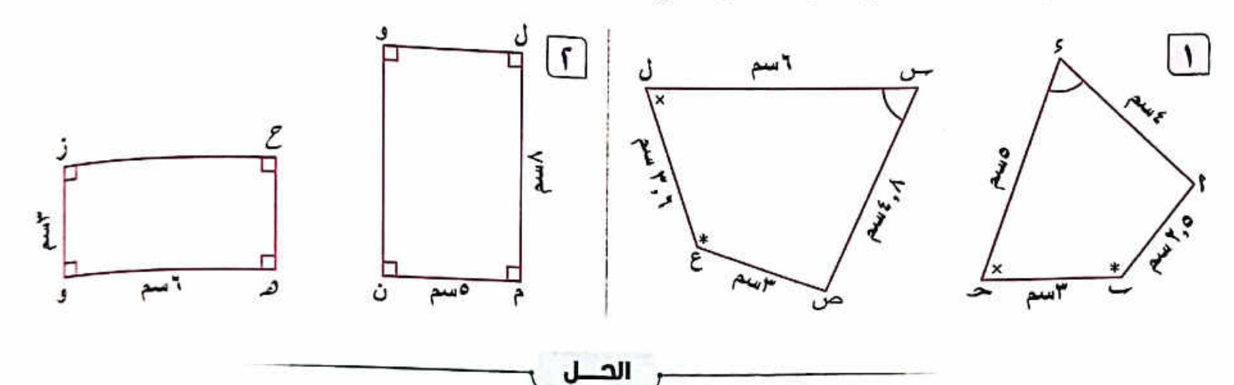
ملاحظة ٧

كل المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة.

- جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة.
- جميع المربعات متشابهة.
- جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة ، وهكذا.

مثال ١

بيّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة مع ذكر السبب وإذا كانت متشابهة أوجد نسبة التشابه :



الحل

١ المضلعان أ ب حـ ء ، ص ع ل س متشابهان

لأن ق(∠ب) = ق(∠ع) ، ق(∠حـ) = ق(∠ل) ، ق(∠ء) = ق(∠س) ∴ ق(∠أ) = ق(∠ص)

، $\frac{أب}{صع} = \frac{بحـ}{عل} = \frac{حـء}{لس} = \frac{ءأ}{سص}$ ، $\frac{٢,٥}{٣} = \frac{٣}{٣,٦} = \frac{٥}{٦} = \frac{٤}{٤,٨}$ ∴ نسبة التشابه = $\frac{٥}{٦}$

٢ المضلعان ل م ن و ، هـ و ز ح غير متشابهين

فبرغم أن ق(∠ل) = ق(∠هـ) ، ق(∠م) = ق(∠و) ، ق(∠ن) = ق(∠ز)

، ق(∠و) = ق(∠ح) (الزوايا المتناظرة متساوية فى القياس)

ولكن  $\frac{لم}{هـو} \neq \frac{من}{وز}$ **لأن** $\frac{٨}{٦} \neq \frac{٥}{٣}$

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

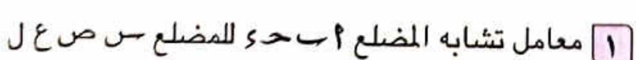
إذا كان المضلعان أ ب حـ ء

، س ص ع ل متشابهين

فأوجد :

١ معامل تشابه المضلع أ ب حـ ء للمضلع س ص ع ل

٢ أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة فى كلا المضلعين.




الحــل

$\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل $\therefore$ $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{حـ ء}{ع ل} = \frac{أ ء}{ل س}$ = معامل التشابه.

$\therefore \frac{أب}{٣} = \frac{٢,١}{١,٤} = \frac{حـ ء}{١,٨} = \frac{٣}{ل س}$ $\therefore$ معامل التشابه $= \frac{٢,١}{١,٤} = \frac{٣}{٢}$ **(المطلوب أولًا)**

، أب $= \frac{٣ \times ٢,١}{١,٤} = ٤,٥$ سم ، حـ ء $= \frac{١,٨ \times ٢,١}{١,٤} = ٢,٧$ سم ، ل س $= \frac{١,٤ \times ٣}{٢,١} = ٢$ سم

، $\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

$\therefore$ ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص) ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

$\therefore$ ق (∠ س) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٦٥° ، ق (∠ ع) = ١٣٥°

، $\because$ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

$\therefore$ ق (∠ ء) = ق (∠ ل) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٦٥° + ١٣٥°) = ٩٠° **(المطلوب ثانيًا)**

ملاحظة

فى المثال السابق نلاحظ أن :

$\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

$\therefore \frac{أب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{حـ ء}{ع ل} = \frac{أ ء}{س ل}$ = معامل التشابه

$= \frac{أب + ب حـ + حـ ء + أ ء}{س ص + ص ع + ع ل + ل س}$ (من خواص التناسب)

$\therefore \frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{١٢,٣}{٨,٢} = \frac{٣}{٢}$ = معامل التشابه.

أى أن

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين = النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما .

مثــال ٣

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتيمترات والآخر محيطه ٤٨ سم أوجد أطوال أضلاع المضلع الآخر.

الحــل

بفرض أن المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ ~ المضلع أ ب حـ ء هـ

$\therefore \frac{\text{محيط المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ}}{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء هـ}} = \frac{أَبَ}{أب} = \frac{بَحَ}{ب حـ} = \frac{حَءَ}{حـ ء} = \frac{ءَهَ}{ء هـ} = \frac{هَأَ}{هـ أ}$

، ∵ $\frac{\text{محيط المضلع } أَبَحَءَهَ}{\text{محيط المضلع } أبحءه} = \frac{٤٨}{٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠} = \frac{٤٨}{٣٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أَبَ}{أب} = \frac{بَحَ}{بح} = \frac{حَءَ}{حء} = \frac{ءَهَ}{ءه} = \frac{هَأَ}{هأ} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{أَبَ}{٣} = \frac{بَحَ}{٥} = \frac{حَءَ}{٦} = \frac{ءَهَ}{٨} = \frac{هَأَ}{١٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ أَبَ = ٤,٥ سم ، بَحَ = ٧,٥ سم ، حَءَ = ٩ سم

، ءَهَ = ١٢ سم ، هَأَ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



المضلع أبحء ~ المضلع س ص ع ل

[١] احسب : ق(∠ س) ، طول $\overline{\text{س ل}}$

[٢] إذا كان محيط المضلع أبحء يساوي ٢٥,٨ سم

احسب محيط المضلع : س ص ع ل

مثال ٤

أبح مثلث فيه : أب = ٤ سم ، بح = ٥ سم ، أح = ٨ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له إذا كان :

[١] معامل التشابه = ٢,٤ [٢] معامل التشابه = ٠,٧

الحل

[١] ∵ معامل التشابه ك = ٢,٤ > ١ ∴ المثلث المطلوب تكبير للمثلث أبح

وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أبح ∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ ح}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{س ص}}{٤} = \frac{\text{ص ع}}{٥} = \frac{\text{س ع}}{٨} = ٢,٤$

∴ س ص = ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم ، ص ع = ٥ × ٢,٤ = ١٢ سم

، س ع = ٨ × ٢,٤ = ١٩,٢ سم (وهو المطلوب)

[٢] ∵ معامل التشابه ك = ٠,٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث أبح وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أبح :

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ ح}}$ = معامل التشابه. ∴ $\frac{\text{س ص}}{٤} = \frac{\text{ص ع}}{٥} = \frac{\text{س ع}}{٨} = ٠,٧$

∴ س ص = ٤ × ٠,٧ = ٢,٨ سم ، ص ع = ٥ × ٠,٧ = ٣,٥ سم

، س ع = ٨ × ٠,٧ = ٥,٦ سم (وهو المطلوب)

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٢$ وكان ٠ < ك < ١

فإن المضلع م$_١$ هو .... للمضلع م$_٢$

(أ) مطابق (ب) تكبير (جـ) تصغير (د) ضعف المساحة

(٢) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٢$ فإن المضلع م$_١$ تصغير للمضلع م$_٢$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) صفر

(٣) إذا كان ك$_١$ هو معامل تشابه المضلع م$_١$ إلى المضلع م$_٢$ ، ك$_٢$ هو معامل تشابه المضلع م$_٢$ إلى المضلع م$_٣$

فإن معامل تشابه المضلع م$_١$ إلى المضلع م$_٣$ هو ....

(أ) ك$_١$ + ك$_٢$ (ب) ك$_١$ ك$_٢$ (جـ) $\frac{ك_١}{ك_٢}$ (د) $\frac{ك_٢}{ك_١}$

(٤) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان معامل التشابه ك يحقق ....

(أ) ك = $\frac{١}{٢}$ (ب) ك = ١

(جـ) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

(٥) إذا كان : △ أ ب جـ ~ △ د هـ و ، ب جـ = ٣ هـ و فإن معامل التشابه لهما = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٣

(٦) معامل التشابه بين المربع أ ب جـ د والمربع س ص ع ل يساوى كل مما يأتى ما عدا ....

(أ) أ جـ : س ع (ب) أ ب : ص ع

(جـ) (أ ب)^٢ : (س ص)^٢ (د) ب جـ : ص ع

(٧) إذا كان المعين أ ب جـ د يشابه المعين س ص ع ل وكانت : ق(∠ أ) = ٦٠°

وكان معامل التشابه = $\frac{١}{٢}$ فإن : ق(∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٥٠°

(٨) لكى يتشابه المضلعان $م_١$ ، $م_٢$ يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.

(٩) لكى يتشابه المعينان ا ب حـ ء ، س ص ع ل يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) ق(∠ ا) = ٦٠° ، ق(∠ ص) = ١٢٠° فقط.

(ب) محيط المعين ا ب حـ ء = ٢ محيط المعين س ص ع ل فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.

(١٠) أى من العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) كل مربعين متشابهين.

(ب) كل مثلثين متساويا الأضلاع متشابهين.

(جـ) كل معينين متشابهين.

(د) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع متشابهين.

(١١) العبارة الصحيحة فيما يلى هى ....

(أ) جميع المثلثات المتساوية الساقين متشابهة. (ب) جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة.

(جـ) جميع المربعات متشابهة. (د) جميع المضلعات المنتظمة متشابهة.

(١٢) أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) كل المضلعات المنتظمة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(جـ) كل المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(١٣) إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ مضلعين متشابهين وكان طولا ضلعين متناظرين فيهما ٢٠ سم ، ١٦ سم على الترتيب فإن : محيط المضلع $م_١$: محيط المضلع $م_٢$ = ...

(أ) ٢٥ : ١٦ (ب) ٤١ : ٩ (جـ) ٩ : ٤١ (د) ٥ : ٤

(١٤) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١٦ : ٨١ (د) ٩ : ٤

(١٥) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم فإن محيط الأكبر .... سم

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(١٦) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل وكان أ ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣ م − ١ ، ص ع = ٣ م + ١ فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(١٧) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢ سم ، ٨ سم ، ومحيط الثانى ٦٠ سم ، فإن طول المستطيل الثانى = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٦

(١٨) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٤ سم ، ١٠ سم ، محيط الثانى = ١٤٠ سم فإن مساحة المستطيل الثانى = ... سم^{٢}

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٥٠٠ (د) ١٠٠٠

(١٩) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، أ ب = ٣ سم ، ء هـ = ٦ سم ، هـ و = ٨ سم فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١,٥

(٢٠) مثلثان متشابهان محيط الأول ٧٤ سم وأطوال أضلاع الثانى ٤,٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم فإن طول أكبر أضلاع المثلث الأول يساوى .... سم

(أ) ٤ (ب) ٦٤ (جـ) ٣٢ (د) ١٦

(٢١) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن : $\frac{أ ب}{ب حـ}$ = ...

(أ) $\frac{ص ع}{س ل}$ (ب) $\frac{أ ء}{س ل}$ (جـ) $\frac{س ل}{أ ء}$ (د) $\frac{س ص}{ص ع}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

ومحيط المضلع أ ب حـ ء = ٤٨ سم

فإن محيط المضلع س ص ع ل = ... سم

(أ) ٤٨ (ب) ٣٦

(جـ) ٦٤ (د) ٣٢

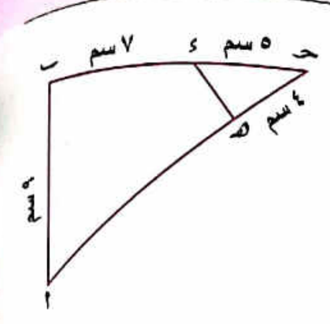
(٢٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

فإن : طول $\overline{و هـ}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : Δ حـ ب أ ~ Δ حـ هـ ء

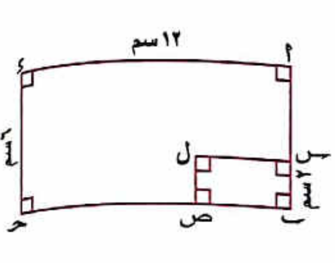
، وباستخدام الأطوال المبينة على الرسم

فإن : هـ ء + هـ أ = ... سم



(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢٥) في الشكل المقابل :

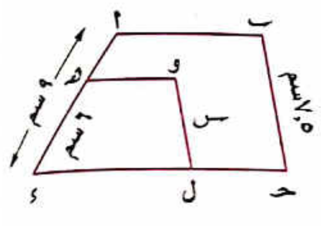


المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ب ص ل

فإن : طول $\overline{\text{ص حـ}}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٢٦) في الشكل المقابل :

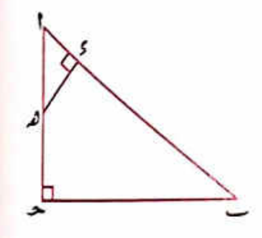


المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع هـ و ل ء

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٧,٥ (د) ٦

(٢٧) في الشكل المقابل :



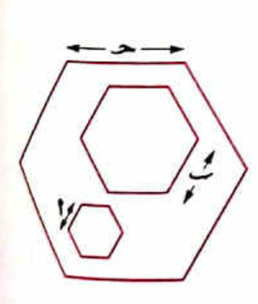
Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء فإذا كان : ق (∠ ب) = ٣ س + ١٠°

، ق (∠ أ هـ ء) = س + ٣٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٢٨) الشكل المقابل يوضح ثلاثة أشكال سداسية منتظمة



النسبة بين أطوال أضلاعهم كما يلي :

أ : ب = ١ : ٢ ، ب : حـ = ٣ : ٨

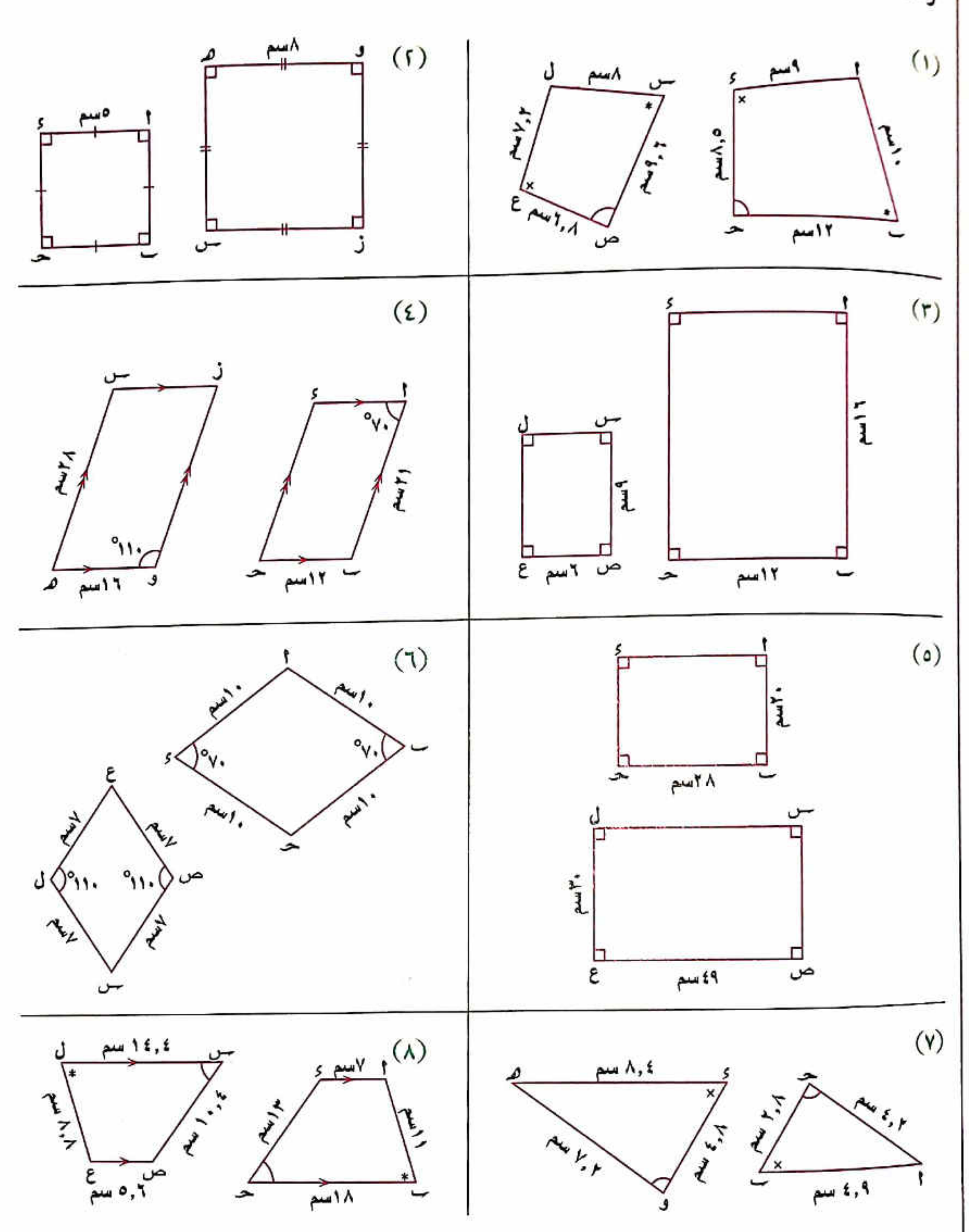
فإذا كان طول ضلع المسدس الأكبر = ٣٢ سم

فإن محيط المسدس الأصغر = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بيِّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة ، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة ، وحدد معامل التشابه.



٢ في الشكل المقابل :

إذا كان : Δ ا ب ح ~ Δ ن ك ل وأطوال الأضلاع

مبينة على الشكل

فأوجد :

(١) معامل تشابه المثلث ا ب ح للمثلث ن ك ل «$\frac{3}{2}$»

(٢) قيمة كل من س ، ص «٨ سم ، $9\frac{1}{3}$ سم»

---

٣ في الشكل المقابل :

المضلع ا ب ح ء ~ المضلع هـ و ز ح

أوجد :

(١) معامل تشابه المضلع ا ب ح ء للمضلع هـ و ز ح «$\frac{3}{2}$»

(٢) قيمة كل من س ، ص «١٠ سم ، ٧ سم»

---

٤ في الشكل المقابل :

Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب ح أثبت أن : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بح}$

، ومن الأطوال المبينة على الشكل

أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{حهـ}$ «١٢ سم ، ١٠ سم»

---

٥ في الشكل المقابل :

Δ ا ب ح ~ Δ ء هـ و ، ء هـ = ٨ سم ، هـ و = ٩ سم

، و ء = ١٠ سم إذا كان محيط Δ ا ب ح = ٨١ سم

أوجد : أطوال أضلاع Δ ا ب ح «٢٤ سم ، ٢٧ سم ، ٣٠ سم»

---

٦ مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم.

أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته. «٦٠ سم ، ٢٤٠٠ سم^2»

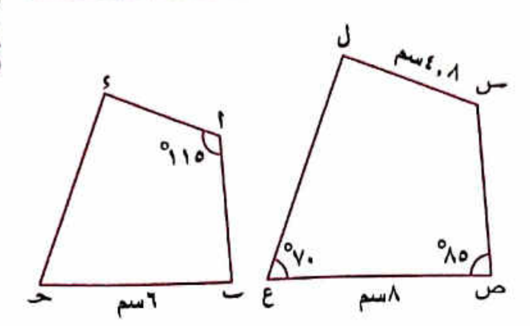
٧ في الشكل المقابل :

المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(١) احسب : ق (∠ س ل ع) ، طول $\overline{أء}$

(٢) إذا كان محيط المضلع أ ب حـ ء = ١٩,٥ سم

أوجد : محيط المضلع س ص ع ل



«٩٠° ، ٣,٦ سم ، ٢٦ سم»

---

٨ إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل ، أكمل :

(١) $\frac{أب}{ب حـ} = \frac{..........}{ص ع}$

(٢) أ ب × ع ل = س ص × ....

(٣) $\frac{ب حـ + ص ع}{ص ع} = \frac{.......... + ل س}{ل س}$

(٤) $\frac{محيط المضلع ....}{محيط المضلع ....} = \frac{س ص}{أ ب}$

---

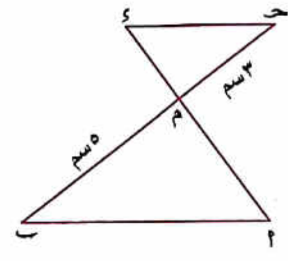
٩ في الشكل المقابل :

△ م أ ب ~ △ م ء حـ

أثبت أن : $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$

وإذا كان : م حـ = ٣ سم ، م ب = ٥ سم ، أ ء = ٦ سم

فأوجد : طول $\overline{أم}$



«$٣\frac{٣}{٤}$ سم»

---

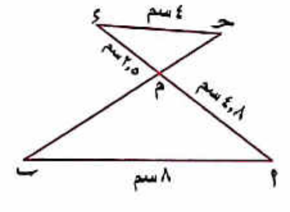
١٠ في الشكل المقابل :

△ م أ ب ~ △ م حـ ء

أثبت أن : الشكل أ ب ء حـ رباعي دائري

وإذا كان : أ ب = ٨ سم ، حـ ء = ٤ سم ، م أ = ٤,٨ سم

، م ء = ٢,٥ سم فأوجد : طول $\overline{ب حـ}$



«٧,٤ سم»

---

١١ مثلث أ ب حـ فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم

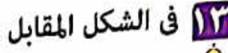
أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان :

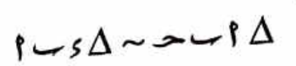
(١) معامل التشابه = ٢,٥ (٢) معامل التشابه = ٠,٦

---

١٢ مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٣ (٢) معامل التشابه = ٠,٤





١٣ في الشكل المقابل :

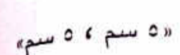
Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

أثبت أن : $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ

وأن : أ ب وسط متناسب بين ب ء ، ب حـ

وإذا كان : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، أ حـ = ٧,٥ سم

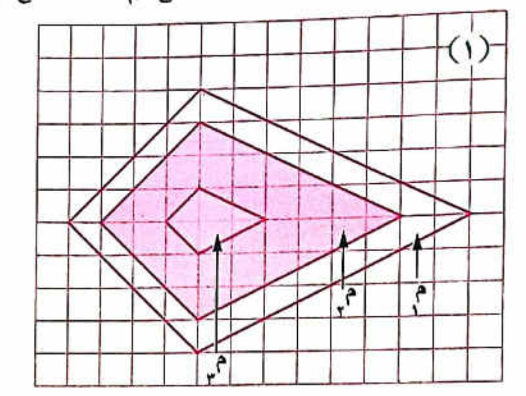
فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$

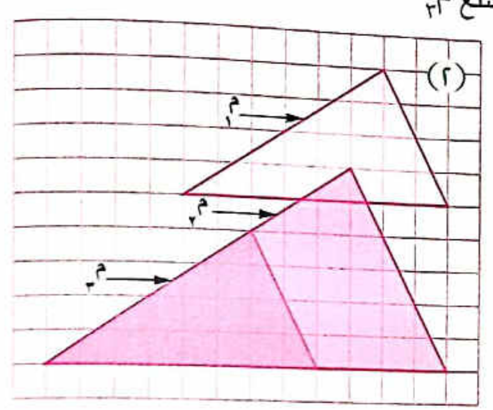


«٥ سم ، ٥ سم»

١٤ في كل من الشكلين التاليين : المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$

أوجد معامل تشابه كل من المضلع $م_١$ ، المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$





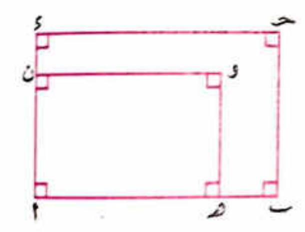
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

⁂ في الشكل المقابل :

المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ هـ و ن أثبت أن :

محيط المستطيل أ ب حـ ء : محيط المستطيل أ هـ و ن

= (أ ب − أ ء) : (أ هـ − أ ن)



الدرس 2



تشابه المثلثات



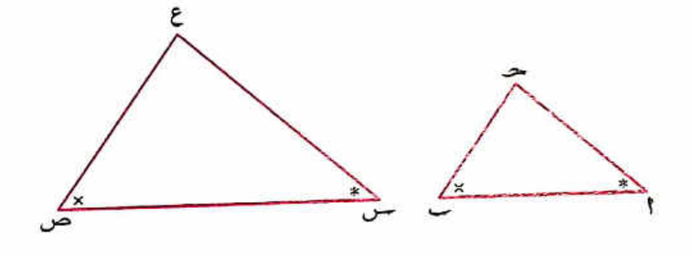
حالات تشابه المثلثات

الحالة الأولى

مسلمة

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

أى أنه فى الشكل المقابل :



إذا كانت : ∠ أ ≡ ∠ س ، ∠ ب ≡ ∠ ص

فإن : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع

وينتج من ذلك أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{س ع}}$

ملاحظات

١ يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة فى أحدهما قياس زاوية حادة فى الآخر.

٢ يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس زاوية فى أحدهما قياس الزاوية المناظرة لها فى الآخر.

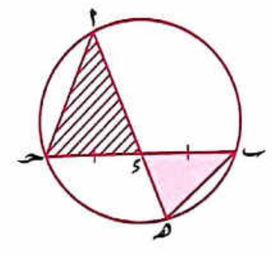
٣ المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.

مثال ١

فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى ء حيث ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن :



١ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء هـ

٢ $(\text{ب ء})^2$ = أ ء × ء هـ

الحل

∵ ∆∆ ا ء حـ ، ب ء هـ فيهما :

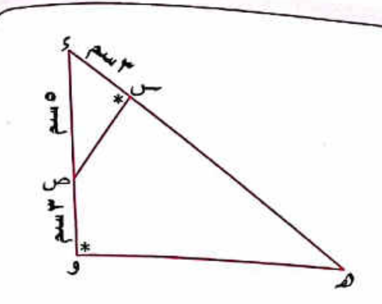
د ا ، د ب محيطيتان تحصران حـ هـ ∴ ق (د ا) = ق (د ب)

، ∵ ق (د ا ء حـ) = ق (د ب ء هـ) (بالتقابل بالرأس) ∴ ∆ ا ء حـ ~ ∆ ب ء هـ (المطلوب أولًا)

∴ $\frac{ا ء}{ب ء} = \frac{ء حـ}{ء هـ}$ ∴ ب ء × ء حـ = ا ء × ء هـ لكن ء حـ = ب ء (معطى)

∴ $(ب ء)^2$ = ا ء × ء هـ (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

ء هـ و مثلث ، ق (د و) = ق (د ء س ص)

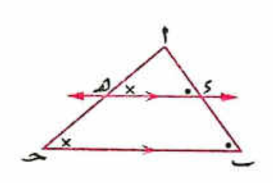
، ء س = ص و = ٣ سم ، ء ص = ٥ سم

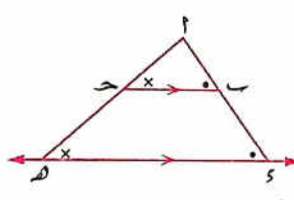
أوجد : طول س هـ

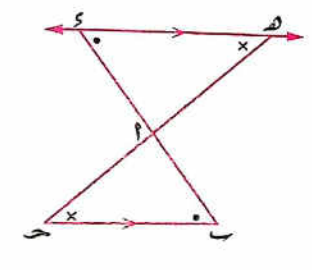
نتيجة ١

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

ففى كل من الأشكال الآتية :



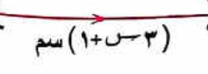




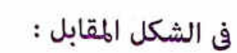
إذا كان : ء هـ // ب حـ ويقطع ا ب ، ا حـ فى ء ، هـ على الترتيب.

فإن : ∆ ا ب حـ ~ ∆ ا ء هـ

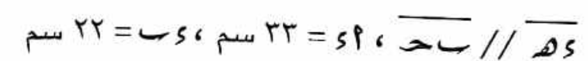
مثال ٢



فى الشكل المقابل :



ء هـ // ب حـ ، ا ء = ٣٣ سم ، ء ب = ٢٢ سم



، ء هـ = (٢ س − ٣) سم ، ب حـ = (٣ س + ١) سم

[١] أثبت أن : ∆ ا ء هـ ~ ∆ ا ب حـ

[٢] أوجد : قيمة س

الحـــل

∵ $\overline{ده} // \overline{بح}$ ∴ Δ أده ~ Δ أبح

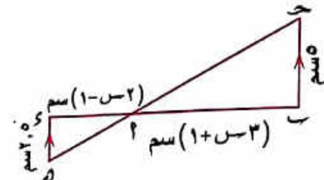
∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{ده}{بح}$ ∴ $\frac{33}{55} = \frac{2س - 3}{3س + 1}$ (المطلوب أولًا)

∴ $\frac{3}{5} = \frac{2س - 3}{3س + 1}$ ∴ 9س + 3 = 10س − 15 ∴ س = 18 (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

$\overline{حه} \cap \overline{بد} = \{أ\}$ ، $\overline{بح} // \overline{ده}$ ، بح = 5 سم ، ده = 2,5 سم



[1] أثبت أن : Δ أبح ~ Δ أده [2] أوجد قيمة : س

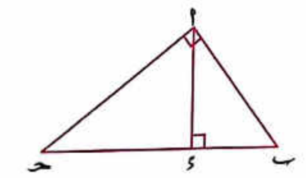
نتيجـــة [2]

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أبح قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أد} \perp \overline{بح}$

فإن : Δ دبأ ~ Δ دأح ~ Δ أبح



ويترك للطالب إثبات ذلك باستخدام المسلمة السابقة وملاحظاتها.

ملاحظات على الشكل السابق

[1] من تشابه ΔΔ دبأ ، أبح **ينتج أن :** $\frac{دب}{أب} = \frac{أب}{بح}$

∴ $(أب)^2$ = دب × بح أى أن : أب وسط متناسب بين دب ، بح

[2] من تشابه ΔΔ دأح ، أبح **ينتج أن :** $\frac{دح}{أح} = \frac{أح}{بح}$

∴ $(أح)^2$ = دح × بح أى أن : أح وسط متناسب بين دح ، بح

[3] من تشابه ΔΔ دبأ ، دأح **ينتج أن :** $\frac{دأ}{دح} = \frac{دب}{دأ}$

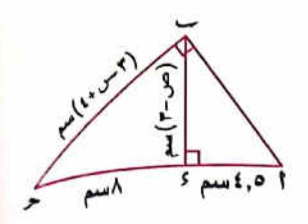
∴ $(دأ)^2$ = دب × دح أى أن : أد وسط متناسب بين دب ، دح

[4] من تشابه ΔΔ دبأ ، أبح **ينتج أن :** $\frac{أب}{حب} = \frac{أد}{أح}$

∴ أد × حب = أب × حأ

وتعد النتائج التى تم الحصول عليها من النتيجة السابقة برهانًا لنظرية إقليدس التى تم دراستها فى المرحلة الإعدادية.

مثال ٣



في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

فإذا كان : أ ء = ٤,٥ سم ، ء حـ = ٨ سم

فأوجد قيمتي : س ، ص

الحل

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ Δ ء ب حـ ~ Δ ب أ حـ   ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ (ب حـ)^2 = أ حـ × ء حـ

∴ (٣ س + ٤)^2 = ٨ × ١٢,٥ = ١٠٠   ∴ ٣ س + ٤ = ١٠

∴ س = ٢

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ Δ أ ب ء ~ Δ ب حـ ء   ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ء ب}}$

∴ (ء ب)^2 = ء حـ × ء أ   ∴ (ص − ٣)^2 = ٨ × ٤,٥ = ٣٦

∴ ص − ٣ = ٦   ∴ ص = ٩   (وهو المطلوب)



حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

أكمل :

١ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٢ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٣ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٤ $\frac{\text{.........}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$

٥ $\frac{\text{.........}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{.........}}$

٦ (ء أ)^2 = ... × ....

٧ (أ حـ)^2 = ... × ....

٨ أ ء = $\frac{\text{......... × أ حـ}}{\text{ب حـ}}$

الحالة الثانية

نظرية ١

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.

المعطيات: المثلثان أ ب حـ ، ء هـ و فيهما : $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب حـ}{هـ و} = \frac{حـ أ}{و ء}$

المطلوب: إثبات أن : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

العمل: عيّن س ∈ $\overline{أب}$ حيث أ س = ء هـ

، ارسم $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$ وتقطع $\overline{أ حـ}$ فى ص

البرهان: ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ س ص (نتيجة «١»)

ويكون $\frac{أب}{أس} = \frac{ب حـ}{س ص} = \frac{حـ أ}{ص أ}$ ، ∵ أ س = ء هـ (عملاً)

∴ $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب حـ}{س ص} = \frac{حـ أ}{ص أ}$ (١)

∵ $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{ب حـ}{هـ و} = \frac{حـ أ}{و ء}$ (معطيات) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : س ص = هـ و ، ص أ = و ء

ويكون Δ أ س ص ≡ Δ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

∴ Δ ء هـ و ~ Δ أ س ص

، ∵ Δ أ ب حـ ~ Δ أ س ص (برهاناً)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و (وهو المطلوب)

ملاحظة

لكتابة المثلثين المتشابهين بترتيب رءوسهما المتناظرة من التناسب بين أطوال أضلاعهما نتبع الآتى :

بفرض أن رءوس أحد المثلثين هى أ ، ب ، حـ وأن رءوس المثلث الآخر هى ء ، هـ ، و

وأن لدينا التناسب الآتى : $\frac{أ حـ}{ء و} = \frac{أ ب}{و هـ} = \frac{ب حـ}{ء هـ}$

فنبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ بالترتيب فنجدها ب ، حـ ، أ

ونبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{ء و}$ ، $\overline{و هـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ بالترتيب فنجدها هـ ، ء ، و

فيكون : Δ ب حـ أ ~ Δ هـ ء و أ، Δ أ ب حـ ~ Δ و هـ ء أ، ... إلخ.

مثال ٤

من الشكل المقابل أثبت أن :

[١] المثلثين المظللين متشابهان.

[٢] $\overleftarrow{\text{بء}}$ ينصف ∠ أ ب هـ

الحل

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{به}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{\text{بح}}{\text{بء}} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{\text{أح}}{\text{ءه}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{به}} = \frac{\text{بح}}{\text{بء}} = \frac{\text{أح}}{\text{ءه}}$ ∴ Δ ح أ ب ~ Δ ء هـ ب (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : ق (∠ أ ب ح) = ق (∠ هـ ب ء)

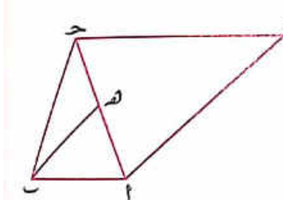
∴ $\overleftarrow{\text{بء}}$ ينصف ∠ أ ب هـ (المطلوب ثانيًا)

مثال ٥

أ ب ح ء شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{\text{أح}}$ بحيث : $\frac{\text{أح}}{\text{أء}} = \frac{\text{أه}}{\text{به}}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{أه}} = \frac{\text{حء}}{\text{أح}}$

أثبت أن : [١] $\overline{\text{حء}} \,//\, \overline{\text{بأ}}$ [٢] $\overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{به}}$

الحل



∵ $\frac{\text{أح}}{\text{أء}} = \frac{\text{أه}}{\text{به}}$ ∴ $\frac{\text{أح}}{\text{أه}} = \frac{\text{أء}}{\text{به}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{أه}} = \frac{\text{حء}}{\text{أح}}$ ∴ $\frac{\text{أح}}{\text{أه}} = \frac{\text{حء}}{\text{أب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أح}}{\text{أه}} = \frac{\text{أء}}{\text{به}} = \frac{\text{حء}}{\text{أب}}$ ∴ Δ ء ح أ ~ Δ ب أ هـ

وينتج من التشابه أن : ق (∠ أ ح ء) = ق (∠ هـ أ ب) وهما متبادلتان

∴ $\overline{\text{حء}} \,//\, \overline{\text{بأ}}$ (المطلوب أولاً)

، ق (∠ ح أ ء) = ق (∠ أ هـ ب) وهما متبادلتان. ∴ $\overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{به}}$ (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



س ص ع ل شكل رباعى فيه :

س ص = ٣٠ سم ، ص ع = ٣٦ سم ، ع ل = ١٦ سم

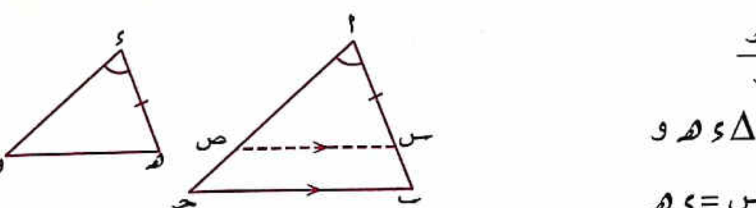
، ل س = ٢٠ سم ، س ع = ٢٤ سم

أثبت أن : Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

الحالة الثالثة

نظرية ٢

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين.



المعطيات ∠ ا ≡ ∠ ء ، $\frac{اب}{ءهـ} = \frac{احـ}{ءو}$

المطلوب إثبات أن : △ ا ب حـ ~ △ ء هـ و

العمل خذ س ∈ $\overline{اب}$ حيث ا س = ء هـ

، وارسم $\overleftrightarrow{سص}$ // $\overline{بحـ}$ ويقطع $\overline{احـ}$ فى ص

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{سص}$ // $\overline{بحـ}$ ∴ △ ا ب حـ ~ △ ا س ص (نتيجة) (١)

ويكون $\boxed{\frac{اب}{اس}} = \frac{احـ}{اص}$

، ∵ $\frac{اب}{ءهـ} = \frac{احـ}{ءو}$ (معطى) ، ا س = ء هـ (عملاً)

∴ $\boxed{\frac{اب}{اس}} = \frac{احـ}{ءو}$ ويكون ا ص = ء و

∴ △ ا س ص ≡ △ ء هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون △ ا س ص ~ △ ء هـ و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : △ ا ب حـ ~ △ ء هـ و (وهو المطلوب)

مثال ٦

ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، ء منتصف $\overline{اب}$ ، هـ ∈ $\overline{بحـ}$ بحيث ب هـ = ٢ سم

أثبت أن :

[١] △△ ء ب هـ ، حـ ب ا متشابهان.

[٢] الشكل ا ء هـ حـ رباعى دائرى.

الحل

ا
٣سم
ء
٣سم
حـ
ب
هـ ٢سم
٩سم

∵ △△ ء ب هـ ، حـ ب ا فيهما :

$\frac{بهـ}{با} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{بء}{بحـ} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{بهـ}{با} = \frac{بء}{بحـ}$

، ∵ ∠ب مشتركة.

∴ △ ء ب هـ ~ △ حـ ب ا (المطلوب أولاً)

وينتج أن :

ق (∠ ب هـ ء) = ق (∠ أ) ، ∵ ∠ ب هـ ء خارجة عن الشكل الرباعى أ ء هـ حـ

∴ الشكل أ ء هـ حـ رباعى دائرى. (المطلوب ثانيًا)

مثال ٧

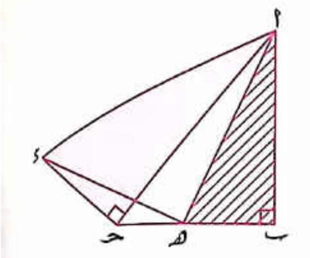
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ء) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\frac{\text{حـ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}}$

أثبت أن :

١ ∆∆ أ ب هـ ، أ حـ ء متشابهان.

٢ ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠°

الحل



∵ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$

، ∵ ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ء)

∴ ∆ أ ب هـ ~ ∆ أ حـ ء (المطلوب أولًا)

وينتج أن :

ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ ء حـ)

، ∵ ∠ أ هـ ب خارجة عن الشكل الرباعى أ هـ حـ ء

∴ الشكل أ هـ حـ ء رباعى دائرى.

∴ ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ أ حـ ء) (مرسومتان على $\overline{\text{أ ء}}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠° (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء = ٣ سم ، ء ب = ٥ سم

، أ هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٢ سم ، ب حـ = ١٢ سم

١ أثبت أن : ∆ أ ء هـ ~ ∆ أ حـ ب

٢ أوجد : طول $\overline{\text{ء هـ}}$



تمارين 2 على تشابه المثلثات

من أسلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

$\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، أهـ = ٢ سم

، هـحـ = ٣ سم ، ءهـ = ٦ سم

فإن : بحـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١٠

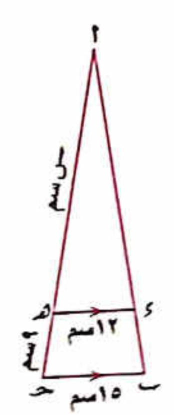


(٢) فى الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨



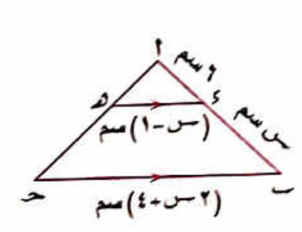
(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٣٠

(جـ) ٣ (د) ٢٤

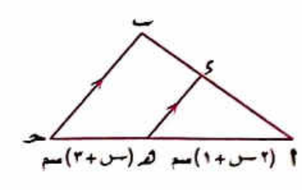


(٤) فى الشكل المقابل :

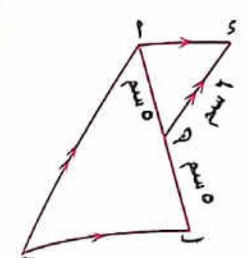
أء : أب = ٣ : ٥ ، $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧



(٥) فى الشكل المقابل :



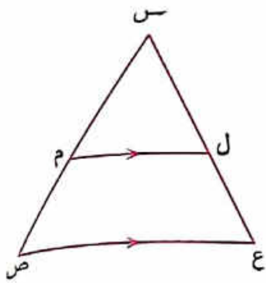


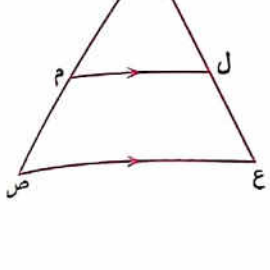
أحـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩

(جـ) ١٢ (د) ١٥

(٦) فى الشكل المقابل :





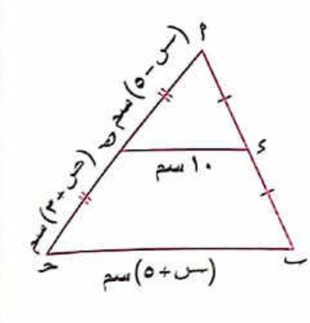
$\overline{لم} // \overline{عص}$ ، $\frac{ل م}{ع ص} = \frac{٤}{٧}$

فإن : $\frac{ص م}{م س} = $ ....

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{١١}$

(٧) فى الشكل المقابل :



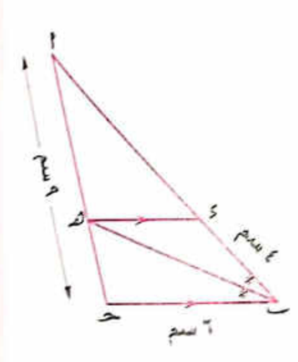
ء ، هـ منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$

طول : س + ص = ... سم

(أ) ١٥ (ب) ٧

(جـ) ٢٢ (د) ١١

(٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أحـ = ٩ سم

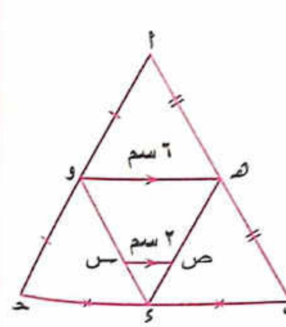
، ءب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

فإن محيط Δ أءهـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ١٦

(جـ) ١٤ (د) ١٢

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ ءس ص = ٨ سم

فإن محيط Δ أب حـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(١٠) فى الشكل المقابل :

ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ حـ) ، أ هـ = ١٤ سم

، هـ ء = ١٢ سم ، حـ ب = ١٥ سم ، ء ب = ٤ سم

فإن : أ حـ + أ ء + أ ب = ... سم

(أ) ٦٢,٥ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٦ (د) ٥٣,٥

(١١) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ // $\overline{ء هـ}$ ، حـ ء = ٣ سم

، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

فإن : حـ هـ = ... سم.

(أ) ٥,٤ (ب) ٤,٥ (جـ) ٨ (د) ٢,٥

(١٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان : حـ ن = س سم ، ن أ = (٥ س) سم

، م ن = ٧ سم ، ق(∠ حـ) = ق(∠ أ) = ٥٠°

، ق(∠ حـ م ن) = ٨٠° فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٥ (جـ) ٤٢ (د) ٢٨

(١٣) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٦°

(جـ) ٧٤° (د) ٣٠°

(١٤) المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ٧٠° يشابه المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٥٥ (د) ٤٠

(١٥) مثلثان الأول به زاويتان قياسهما ٥٠° ، ٦٠° والثانى به زاويتان قياسهما ٦٠° ، ٧٠° فإن : ....

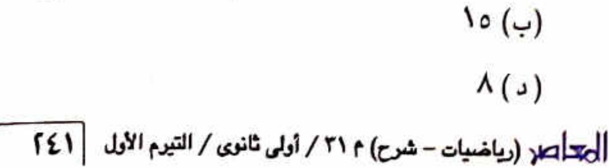
(أ) المثلثان متطابقان وغير متشابهان. (ب) المثلثان متشابهان وليس بالضرورة متطابقان.

(جـ) المثلثان متطابقان ومتشابهان. (د) المثلثان غير متطابقان وغير متشابهان.

(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى الأضلاع ، و ∈ $\overleftarrow{حـ ء}$

فإن : ب حـ = ... سم



(أ) ٥ (ب) ١٥

(جـ) ١٠ (د) ٨

(١٧) في الشكل المقابل :

ب ء = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٧

(١٨) في الشكل المقابل :

ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٤,٥

(جـ) ٣,٥ (د) ٣

(١٩) في الشكل المقابل :

النسبة بين محيطي المثلثين

Δ أ ء هـ ، Δ أ ب جـ هي ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ٥ (جـ) ١ : ٢ (د) ١ : ٤

(٢٠) في الشكل المقابل :

ل ∈ $\overline{\text{س ص}}$ حيث س ل = ٤ سم

، ص ل = ٨ سم ، م ∈ $\overline{\text{س ع}}$

حيث س م = ٦ سم ، ع م = ٢ سم ، ل م = ٧ سم

فإن : طول $\overline{\text{ص ع}}$ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٢٨ (جـ) ١٤ (د) ٣

(٢١) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ جـ)

فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(٢٢) في الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ)

، أ ب = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم

فإن : ء جـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٢

(جـ) $9\frac{1}{3}$ (د) $23\frac{1}{3}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ)

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٢٤) فى الشكل المقابل :

س = ...

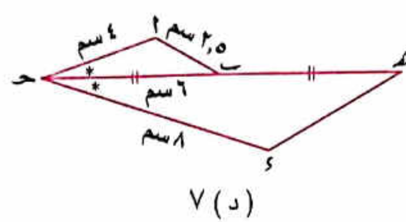
(أ) م (ب) ن

(جـ) ص (د) ل

(٢٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ب منتصف $\overline{حـ هـ}$

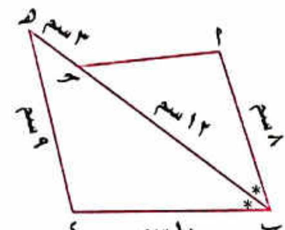
فإن : ء هـ = ... سم



(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٦) فى الشكل المقابل :

أ حـ = ... سم



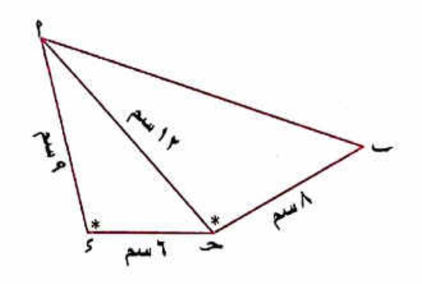
(أ) ٦,٢ (ب) ٦

(جـ) ٧,٢ (د) ٧

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ ء حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

فإن : أ ب = ... سم



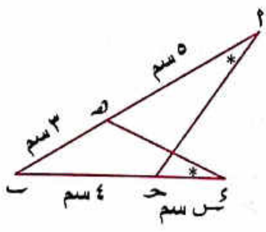
(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٢٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

فإن : س = ... سم



(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٢

(٢٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ب أ ء) = ق (∠ح)

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٢٤) فى الشكل المقابل :

س = ...

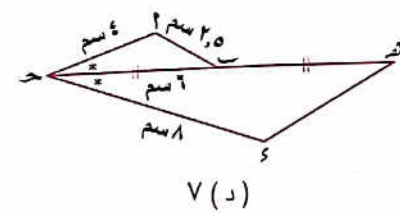
(أ) م (ب) ن

(جـ) ص (د) ل

(٢٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

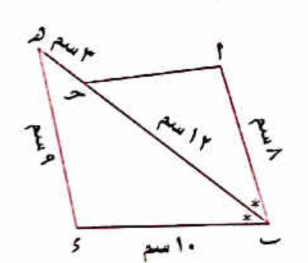
فإن : ء هـ = ... سم



(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٦) فى الشكل المقابل :

أ حـ = ... سم



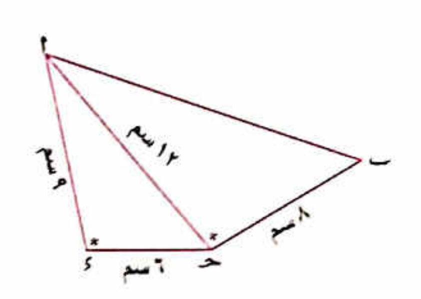
(أ) ٦,٢ (ب) ٦

(جـ) ٧,٢ (د) ٧

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠أ ء حـ) = ق (∠أ حـ ب)

فإن : أ ب = ... سم



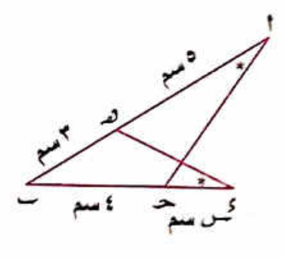
(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٢٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠أ) = ق (∠ء)

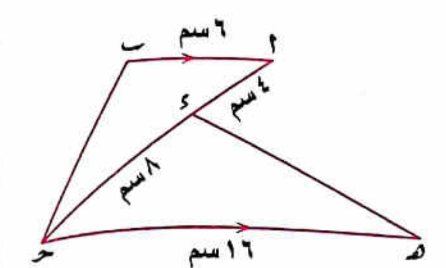
فإن : س = ... سم



(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٢

(٢٩) فى الشكل المقابل :



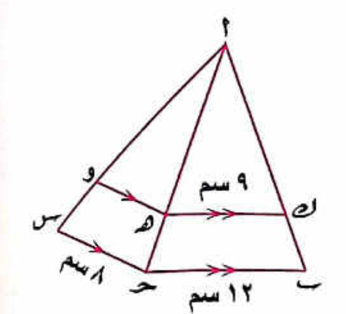
إذا كانت : $\overline{أب} // \overline{هـ جـ}$

فإن : $\frac{هـ ء}{ب جـ} = ...$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٠) فى الشكل المقابل :

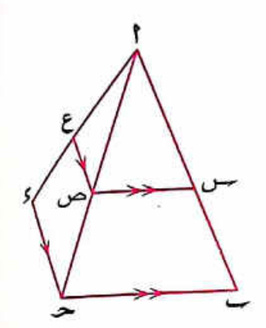


هـ و = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٣١) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$ ، $\overline{ص ع} // \overline{جـ ء}$

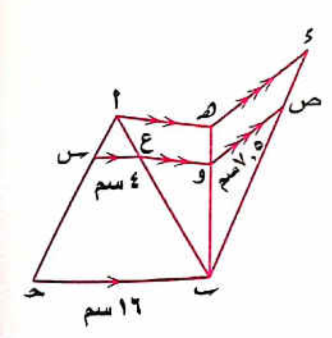
وكان : س ص = جـ ء ، ص ع = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم

فإن : طول $\overline{س ص}$ = ... سم

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $٣\sqrt{٢}$

(جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٣٢) فى الشكل المقابل :



ء هـ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ١٠

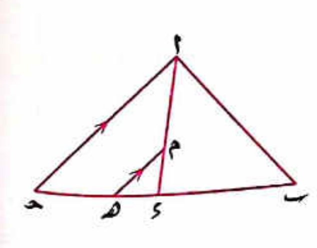
(جـ) ١٢ (د) ١٥

(٣٣) فى الشكل المقابل :

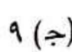
م نقطة تلاقى المتوسطات Δ أ ب جـ

، م $\in$ $\overline{أ ء}$ ، $\overline{م هـ} // \overline{أ جـ}$ ، م هـ = ٣ سم

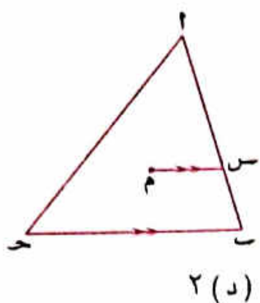
فإن : طول $\overline{أ جـ}$ = ... سم

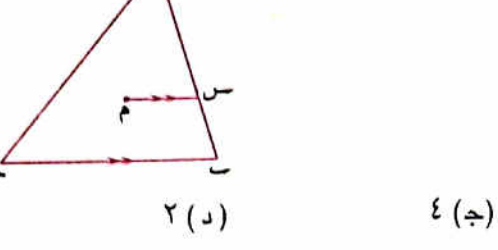


(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢


(٣٤) في الشكل المقابل :





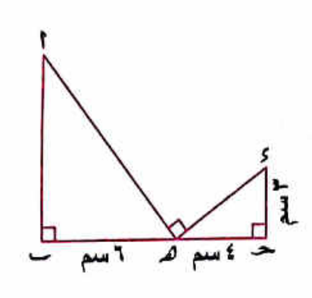
م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

، م س // ب حـ ، ب حـ = ١٢ سم

فإن : م س = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٣٥) في الشكل المقابل :



ق (∠ب) = ق (∠حـ) = ق (∠أ هـ ء) = °٩٠

فإن : طول أ ب = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٥

(٣٦) في الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء

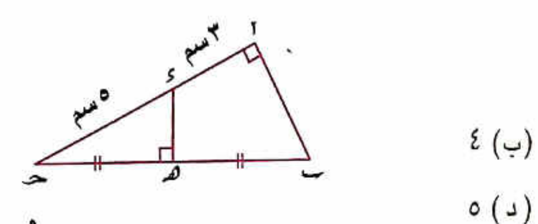
فإذا كان : ق (∠ب) = ٣ س + °٢٠

، ق (∠أ) = °٦٠ − ٢ س

فإن : ق (∠أ هـ ء) = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٣٧) في الشكل المقابل :

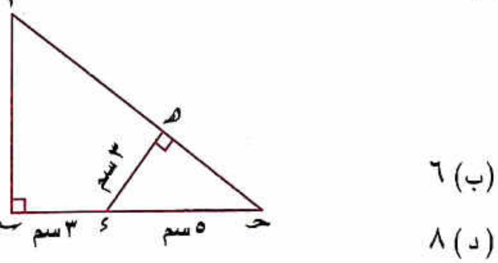


هـ حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٢ $\sqrt{5}$ (د) ٥

(٣٨) في الشكل المقابل :

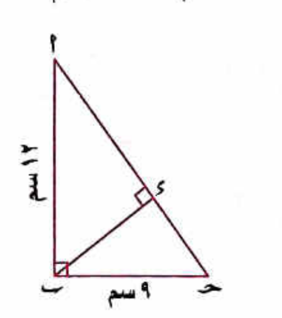


أ هـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٨

(٣٩) في الشكل المقابل :



طول ب ء = ... سم

(أ) ٩,٥ (ب) ٧,٢

(جـ) ٧,٥ (د) ٨



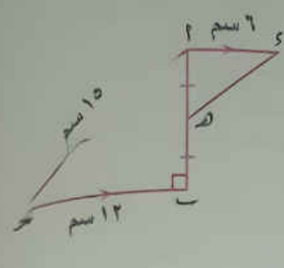
(٤٠) فى الشكل المقابل :

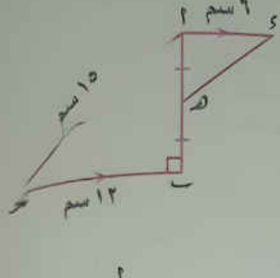
$\overline{أ د} // \overline{جـ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$

طول : $\overline{د هـ}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤,٥

(جـ) ٣ (د) ٧,٥





(٤١) فى الشكل المقابل :

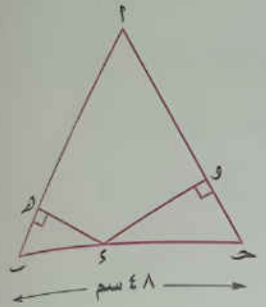
أ ب جـ مثلث متساوى الساقين حيث أ ب = أ جـ

، ب جـ = ٤٨ سم ، $\frac{د هـ}{د و} = \frac{٥}{٧}$

فإن : د جـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٢٤ (د) ٢٨

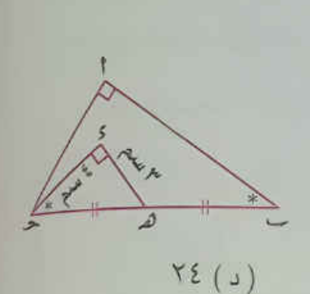


(٤٢) فى الشكل المقابل :

د هـ = ٣ سم ، د جـ = ٤ سم

فإن : م (△ أ ب جـ) = ... سم^٢

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤



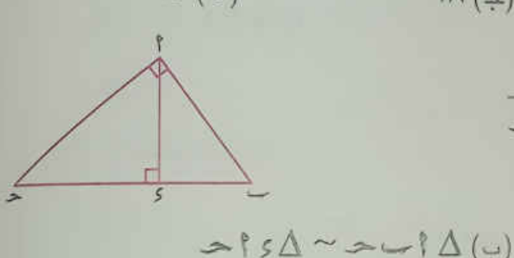
(٤٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : △ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$

فإن العبارة الخاطئة فيما يلى هى ....

(أ) △ أ ب جـ ~ △ د ب أ (ب) △ أ ب جـ ~ △ د أ جـ

(جـ) △ ب أ د ~ △ أ جـ د (د) أ د = د ب × د جـ



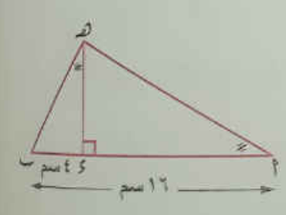
(٤٤) فى الشكل المقابل :

أ ب هـ مثلث ، $\overline{هـ د} \perp \overline{أ ب}$ ، ق (∠ أ) = ق (∠ ب هـ د)

فإذا كان : أ ب = ١٦ سم ، ب د = ٤ سم

فإن : طول $\overline{ب هـ}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) $٨\sqrt{٣}$

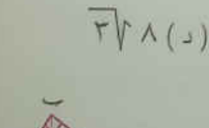


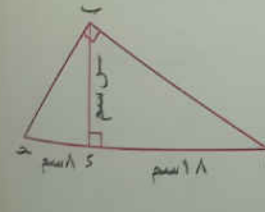
(٤٥) فى الشكل المقابل :

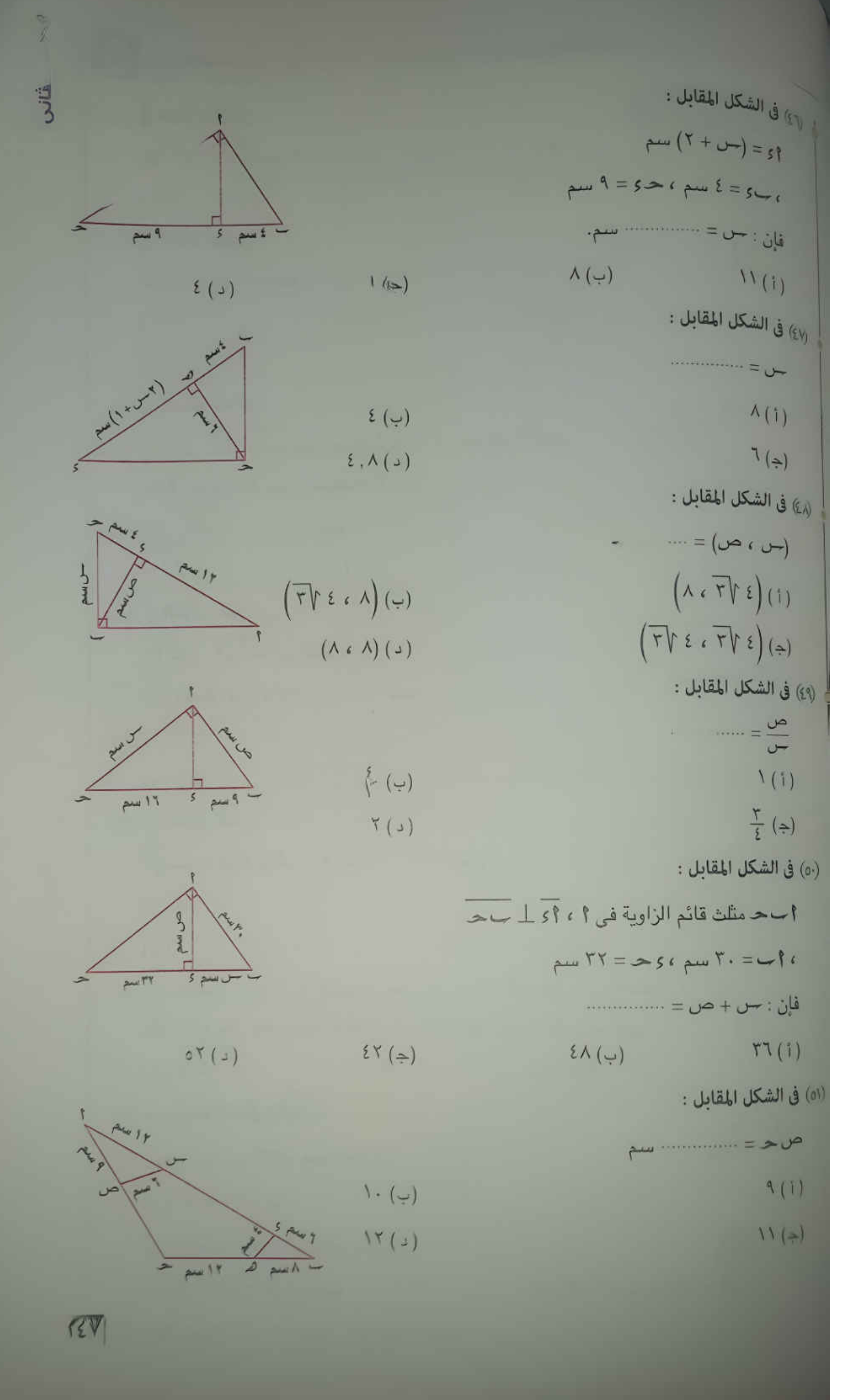
س = ...

(أ) $١٢\sqrt{٣}$ (ب) ٢٤

(جـ) ١٢ (د) $٨\sqrt{٣}$







(٤٦) فى الشكل المقابل :

أ د = (س + ٢) سم

، ب د = ٤ سم ، حـ د = ٩ سم

فإن : س = ... سم.

(أ) ١١ (ب) ٨ (جـ) ١ (د) ٤

(٤٧) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٤,٨

(٤٨) فى الشكل المقابل :

(س ، ص) = ...

(أ) $(٤\sqrt{٣} ، ٨)$ (ب) $(٨ ، ٤\sqrt{٣})$

(جـ) $(٤\sqrt{٣} ، ٤\sqrt{٣})$ (د) (٨ ، ٨)

(٤٩) فى الشكل المقابل :

$\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٢

(٥٠) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أ د} \perp \overline{ب حـ}$

، أ ب = ٣٠ سم ، د حـ = ٣٢ سم

فإن : س + ص = ...

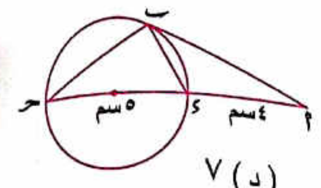
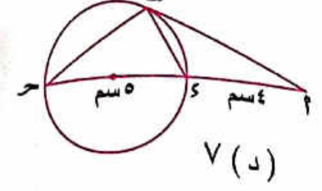
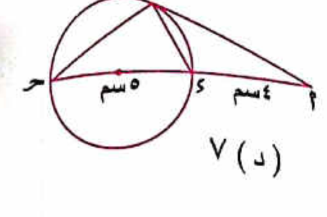
(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٢ (د) ٥٢

(٥١) فى الشكل المقابل :

ص حـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠

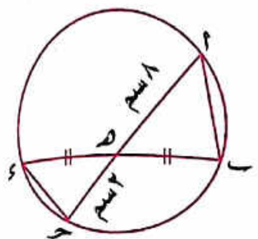
(جـ) ١١ (د) ١٢

(٥٢) **في الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة فإن : أب = ... سم

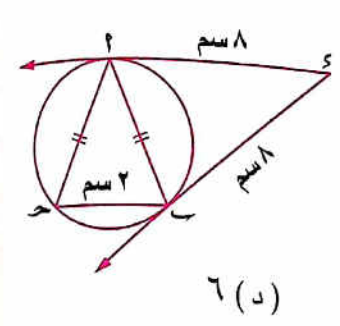
(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧



(٥٣) **في الشكل المقابل :**

ب ء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٢



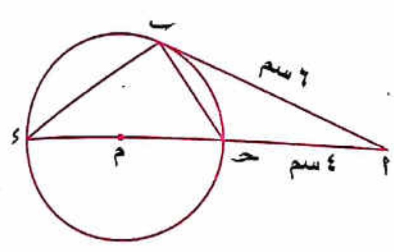
(٥٤) **في الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overleftarrow{\text{ءأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءب}}$ مماسين للدائرة عند أ ، ب على الترتيب

، ءأ = ءب = ٨ سم ، ب حـ = ٢ سم

فإن : أحـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



(٥٥) **في الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م

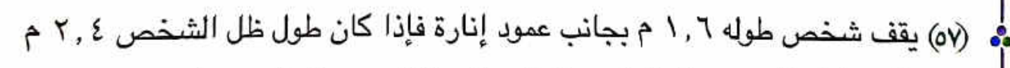
فإن محيط الدائرة م = ... سم

(أ) ٤ π (ب) ٥ π (جـ) ٦ π (د) ٩ π

(٥٦) **في الشكل المقابل :**

أء مماسة للدائرة طول : $\overline{\text{ءب}}$ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٦ $\frac{1}{4}$



(٥٧) يقف شخص طوله ١,٦ م بجانب عمود إنارة فإذا كان طول ظل الشخص ٢,٤ م

وكان طول ظل عمود الإنارة هو ٦,٦ م فإن طول عمود الإنارة يساوى .... م

(أ) ٤,٤ (ب) ٩,٩ (جـ) ٨,٨ (د) ١٠,١

(٥٨) **باستخدام الشكل المقابل :**

جميع العبارات التالية صحيحة عدا ....

(أ) ب حـ = ٢ ء هـ

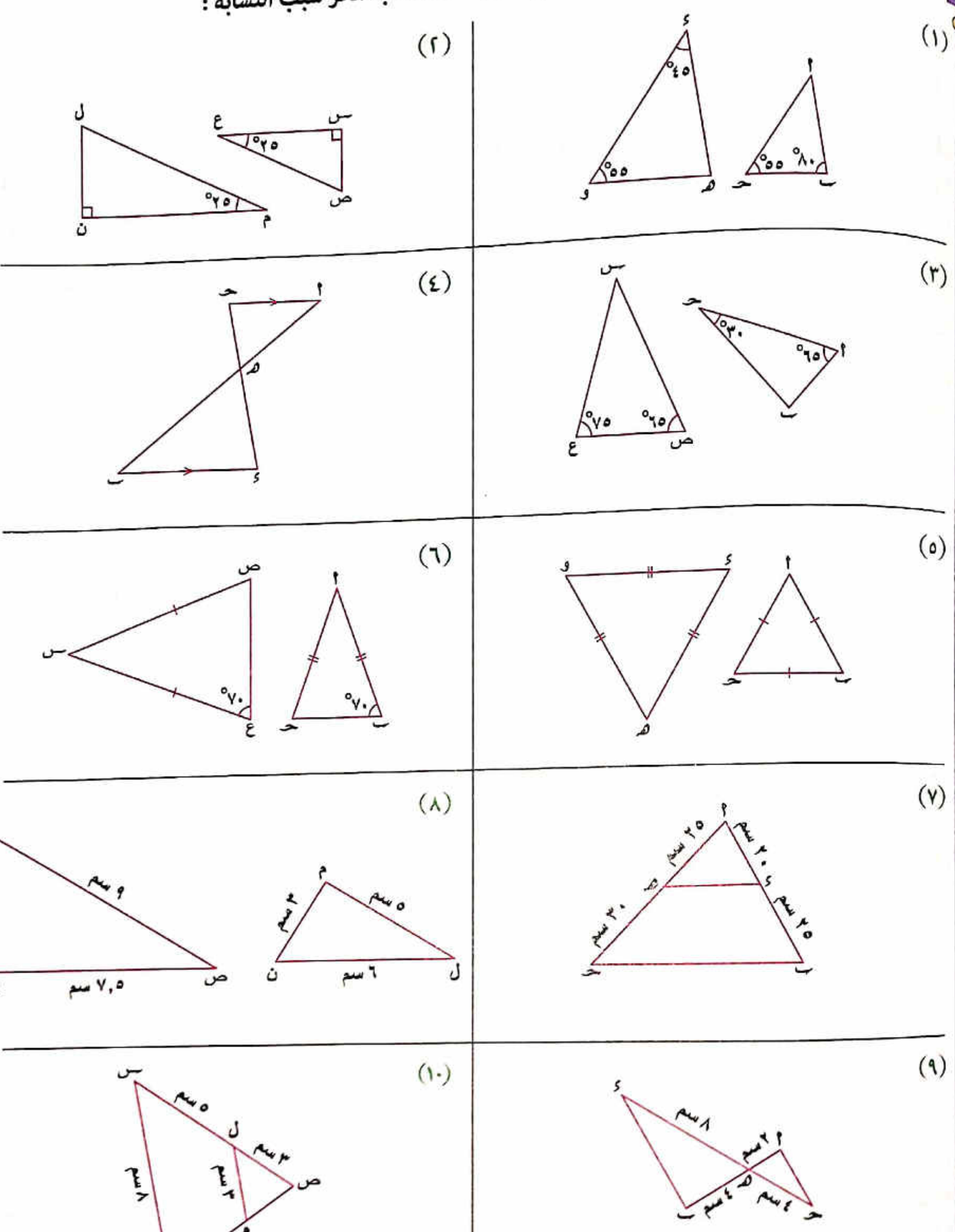
(ب) الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

(جـ) Δ أءهـ ~ Δ أب حـ

(د) أء × أب = أهـ × أحـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

1 اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين ، وفى حالة التشابه اذكر سبب التشابه :

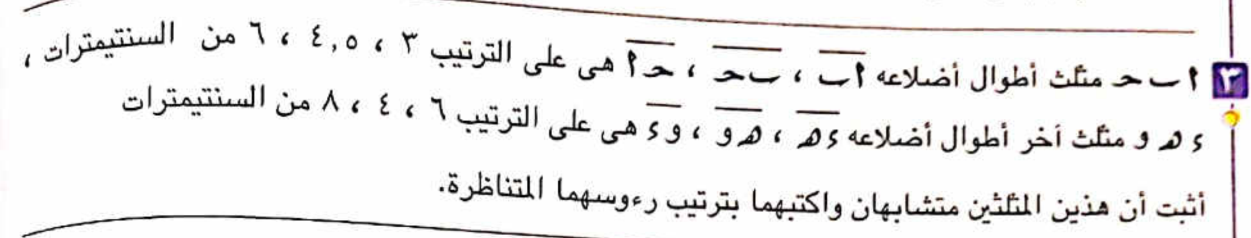


2 في الشكل المقابل :

$\overline{أ ء} // \overline{جـ ب}$

أثبت أن : (١) Δ أ هـ ء ~ Δ ب هـ جـ

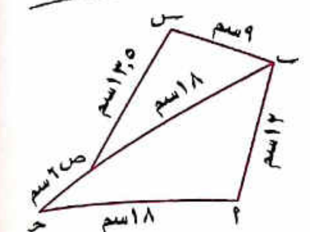
(٢) أ هـ × هـ جـ = ء هـ × هـ ب



3 أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ هى على الترتيب ٣ ، ٤,٥ ، ٦ من السنتيمترات ، ء هـ و مثلث آخر أطوال أضلاعه $\overline{ء هـ}$ ، $\overline{هـ و}$ ، $\overline{و ء}$ هى على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٨ من السنتيمترات

أثبت أن هذين المثلثين متشابهان واكتبهما بترتيب رءوسهما المتناظرة.

4 في الشكل المقابل :

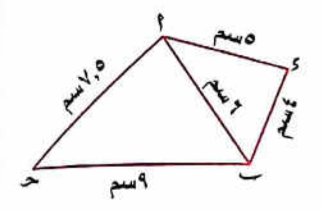


ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة.

أثبت أن : (١) Δ س ب ص ~ Δ أ ب جـ

(٢) $\overleftarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ أ ب س

5 في الشكل المقابل :



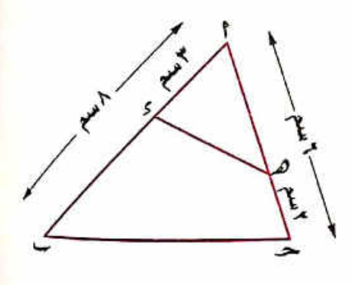
أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم

، أ جـ = ٧,٥ سم ، ء نقطة خارجة عن المثلث أ ب جـ

حيث : ء ب = ٤ سم ، ء أ = ٥ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب أ (٢) $\overleftarrow{ب أ}$ ينصف ∠ ء ب جـ

6 في الشكل المقابل :



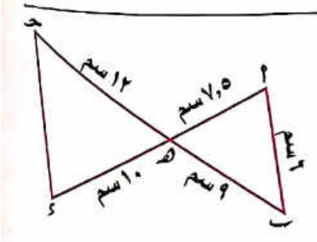
أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم

، ء ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أ جـ}$

حيث هـ جـ = ٢ سم

أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

7 في الشكل المقابل :



$\overline{أ ء} \cap \overline{ب جـ}$ = {هـ} ، أ هـ = ٧,٥ سم ، هـ جـ = ١٢ سم

، ب هـ = ٩ سم ، هـ ء = ١٠ سم ، أ ب = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ب هـ ~ Δ ء جـ هـ ثم احسب : طول $\overline{جـ ء}$

«٨ سم»

٨ في المثلث أ ب ح : أ ح > أ ب ، م ∈ أح حيث : ق (∠ أ ب م) = ق (∠ ح)

أثبت أن : (أ ب)^2 = أ م × أ ح

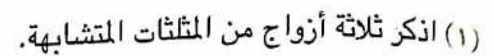
---

٩ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، ء ∈ أب ، رسم ءه // ب ح

ويقطع أح في ه ، رسم أس يقطع ءه ، ب ح

في س ، ص على الترتيب.

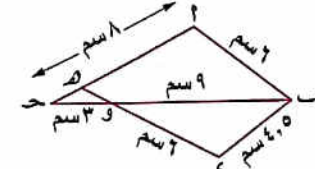


(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

(٢) **أثبت أن :** $\frac{\text{ء س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س ه}}{\text{ص ح}} = \frac{\text{ء ه}}{\text{ب ح}}$

---

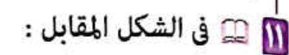
١٠ في الشكل المقابل :



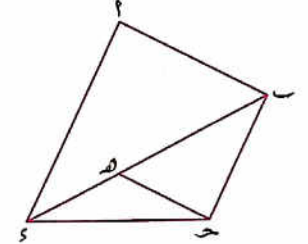
ب ح ∩ ءه = {و} ، أ ب = ٦ سم ، ب ح = ١٢ سم ، أ ح = ٨ سم

، و ح = ٣ سم ، ب ء = ٤,٥ سم ، ء و = ٦ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب ح ~ Δ ء ب و (٢) Δ ه و ح متساوى الساقين.



١١ في الشكل المقابل :



أ ب ح ء شكل رباعي ، ه ∈ ب ء حيث :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ح ه}}{\text{ب ح}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ه ب}}{\text{ب ح}}$

أثبت أن : (١) أ ء // ب ح (٢) أ ب // ح ه

---

١٢ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، أ ح = ٣ سم ، ء ∈ ب أ بحيث أ ء = ٤,٥ سم

، ه ∈ ح أ بحيث أ ه = ٦ سم **أثبت أن :** الشكل ب ح ء ه رباعي دائري.

---

١٣ أ ب ح مثلث ، أ ب = ٨ سم ، أ ح = ١٠ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ه ∈ أ ب

حيث : أ ه = ٢ سم ، ء ∈ ب ح حيث : ب ء = ٤ سم

(١) **برهن أن :** Δ ب ء ه ~ Δ ب أ ح **واستنتج :** طول ء ه «٥ سم»

(٢) **برهن أن :** الشكل أ ح ء ه رباعي دائري.

---

١٤ س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، رسم س ل ⊥ ص ع ويقطعه في ل

أثبت أن : $\frac{(\text{س ص})^2}{(\text{س ع})^2} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$ وإذا كان : س ص = ١٢ سم ، س ع = ١٦ سم

فاحسب : طول كل من ص ل ، س ل «٧,٢ سم ، ٩,٦ سم»

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، و ∈ ء حـ

، رسم ب و فقطع أ حـ في هـ ، وقطع أ ء في ى

أثبت أن : (١) Δ أ هـ ى ~ Δ حـ هـ ب (٢) $(هـ ب)^2$ = هـ ى × هـ و

---

١٦ 📖 أ ب ، ء حـ وتران في دائرة ، أ ب ∩ حـ ء = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة

، أ ب = ٤ سم ، ء حـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ حـ ب هـ ، ثم أوجد : طول حـ هـ «١٢ سم»

---

١٧ أ ب قطر في دائرة ، حـ نقطة تنتمي للدائرة ، رسم أ حـ فقطع المماس للدائرة عند ب في نقطة ء

أثبت أن : $(ب حـ)^2$ = حـ أ × حـ ء

---

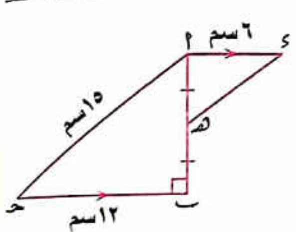
١٨ 📖 أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، رسم أ ء ⊥ ب حـ ليقطعه في ء

، إذا كان : $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{1}{2}$ ، أ ء = $6\sqrt{2}$ سم

أوجد : طول كل من ب ء ، أ ب ، أ حـ «٦ سم ، $6\sqrt{3}$ سم ، $6\sqrt{6}$ سم»

---

١٩ في الشكل المقابل :



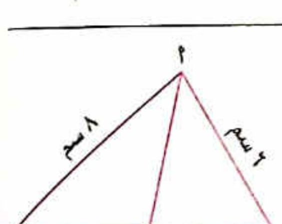
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

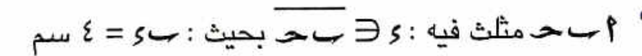
، هـ منتصف أ ب ، أ ء // ب حـ بحيث أ ء = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ب حـ ~ Δ هـ أ ء واستنتج أن : أ حـ // ء هـ

---

٢٠ في الشكل المقابل :





أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ ب حـ بحيث : ب ء = ٤ سم

، ء حـ = ٥ سم فإذا كانت : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم

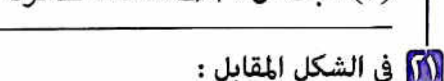
(١) أثبت أن : Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

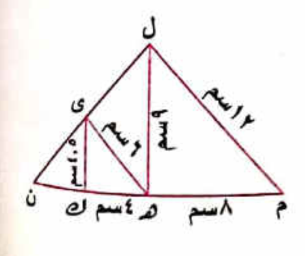
(٢) أوجد : طول أ ء «$5\frac{1}{3}$ سم»

(٣) أثبت أن : أ ب مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ

---

٢١ في الشكل المقابل :





ل م ن مثلث ، هـ ∈ م ن ، ك ∈ م ن ، ى ∈ ل ن

، ل م = ١٢ سم ، م هـ = ٨ سم ، ل هـ = ٩ سم

، هـ ى = ٦ سم ، هـ ك = ٤ سم ، ك ى = ٤,٥ سم

أثبت أن : ى ك // ل هـ ، هـ ى // م ل ثم احسب : طول ن ك «٤ سم»

22 س ص ع ، ل م ن مثلثان متساويان في قياسات زواياهما المتناظرة ، ص ع = ٨ سم ، م ن = ١٢ سم ، رسم س ء ⊥ ص ع قابله في ء ورسم ل هـ ⊥ م ن قابله في هـ

فإذا كان : ء س = ٧ سم فأوجد : طول ل هـ

«$10\frac{1}{2}$ سم»

23 أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان. رسم أ س ⊥ ب حـ ليقطعه في س ، ورسم ء ص ⊥ هـ و ليقطعه في ص أثبت أن : ب س × ص و = حـ س × ص هـ

24 أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ أ = ١٥ سم ، ء ∈ ب حـ

بحيث ب ء = $\frac{1}{4}$ ب حـ ، رسم ء هـ ⊥ ب حـ قطع أ حـ في هـ

أوجد : مساحة الشكل أ ب ء هـ

«$23\frac{5}{8}$ سم²»

25 أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء ∈ ب حـ بحيث : $\frac{\text{ء ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : (١) ∆ أ ب حـ ~ ∆ ء ب أ (٢) أ ء ⊥ ب حـ

26 إذا كان : ∆ أ ب حـ ~ ∆ ء هـ و وكانت س منتصف ب حـ ، ص منتصف هـ و

حيث ب حـ ، هـ و ضلعان متناظران في المثلثين فأثبت أن : ∆ أ ب س ~ ∆ ء هـ ص

27 أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه أ حـ ، ب ء في هـ ، فإذا كان : $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$

أثبت أن : (١) ∆ أ ب هـ ~ ∆ ء ب حـ (٢) ب ء ينصف ∠ أ ب حـ

28 في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ ء ⊥ ب حـ ، ء هـ ⊥ أ ب ، ء و ⊥ أ حـ

أثبت أن : (١) ∆ أ ء هـ ~ ∆ حـ ء و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ ء و = $\sqrt{\text{أ هـ × هـ ب × أ و × و حـ}}$

29 أ ب حـ ء مستطيل ، رسم ء و ⊥ أ حـ فقطع أ حـ في هـ ، ب حـ في و

أثبت أن : مساحة المستطيل أ ب حـ ء = $\sqrt{\text{أ هـ × أ حـ × ء هـ × ء و}}$

30 أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ تقاطع قطراه أ حـ ، ب ء في م

أثبت أن : م أ × م ب = م حـ × م ء

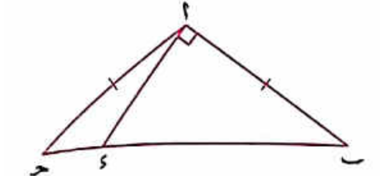
وإذا كان : أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٤ سم احسب : طول م أ

«٦ سم»

٣١ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، رسمت $\overline{\text{أ ء}}$ وفرضت عليها نقطة هـ ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى س ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ ص}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ء حـ}}$ فى ص

أثبت أن : (١) Δ أ ب حـ ~ Δ هـ س ص (٢) س ص × أ ء = ب حـ × ء هـ

٣٢ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة م ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وتقع خارج الدائرة ، رسمت $\overline{\text{حـ ء}}$ مماسة للدائرة تمسها عند ء ثم رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ قطعه فى هـ أثبت أن : $(\text{حـ ء})^2$ = حـ هـ × حـ م = حـ ب × حـ أ

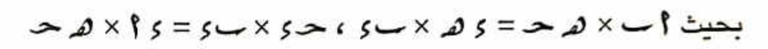


٣٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية فى أ ، أ ب = أ حـ

، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء

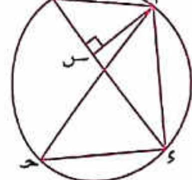
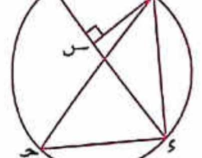
أثبت أن : ٢ $(\text{أ ب})^2$ = ب ء × ب حـ



٣٤ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ أ) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$

بحيث أ ب × هـ حـ = ء هـ × ب ء ، حـ ء × ب ء = ء أ × هـ حـ

أثبت أن : $(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ ء})^2 + (\text{حـ ء})^2$

٣٥ في الشكل المقابل :

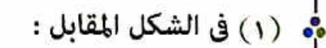
$\overline{\text{أ س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\frac{\text{ب س}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : (١) Δ ب س أ ~ Δ حـ ء أ (٢) $\overline{\text{أ حـ}}$ قطر فى الدائرة.

٣٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ خارج المثلث ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ خارج المثلث

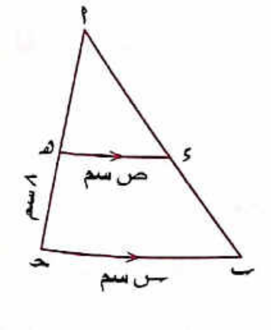
بحيث $(\text{أ ب})^2$ = ء ب × حـ هـ أثبت أن : Δ أ ب ء ~ Δ هـ حـ أ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{2}{7}$

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١٠

(٢) في الشكل المقابل :

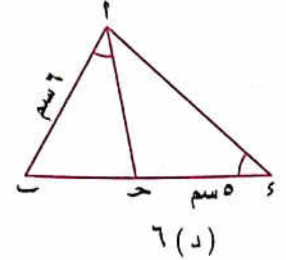
إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : طول $\overline{\text{و م}}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣) في الشكل المقابل :

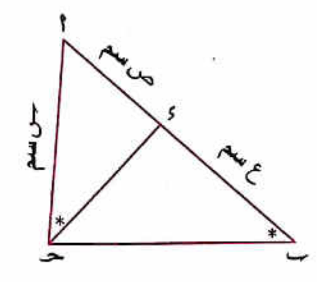


حـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ ، ق (∠ء) = ق (∠ب أ حـ) ، أ ب = ٦ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) في الشكل المقابل :



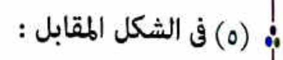
إذا كان : س² − ص² = ١٦

فإن : ص × ع = ... سم²

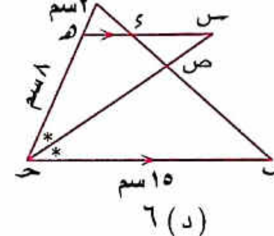
(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٦

(٥) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ينصف ∠ أ حـ ب ، $\overleftarrow{\text{س ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$



فإن : س ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) في الشكل المقابل :

أ ء = ... سم



(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ٦

(٧) في الشكل المقابل :

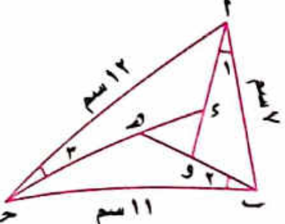
إذا كان : ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

، Δ ب ء هـ متساوى الأضلاع

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٨) في الشكل المقابل :

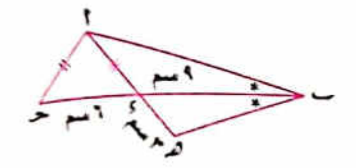


إذا كان : ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣)

فإن : ءهـ : هـ و : وء = ...

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧ (جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٩) في الشكل المقابل :



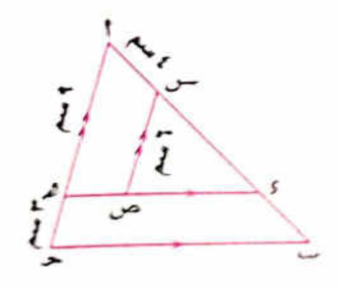
إذا كان : بء ينصف ∠ أ ب هـ

، بء = ٩ سم ، ءحـ = ٦ سم ، ءهـ = ٣ سم

فإن محيط Δ أءحـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(١٠) في الشكل المقابل :



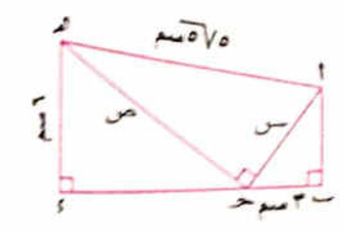
$\overline{سص}$ // $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$

فإن : ءب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(١١) في الشكل المقابل :

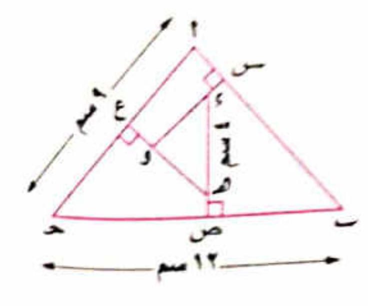


س + ص = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ١٨ (د) ٢١

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{وس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{ءص}$ ⊥ $\overline{بحـ}$

، $\overline{هـع}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ، أحـ = ٩ سم

، بحـ = ١٢ سم ، ءهـ = ٤ سم

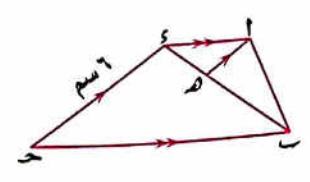
فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : ب هـ = ٢ هـ ء

فإن : أ هـ = ... سم



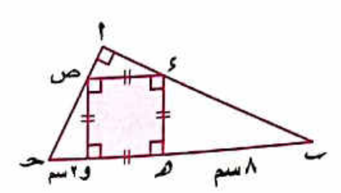
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، ء هـ و ص مربع ، ب هـ = ٨ سم ، و حـ = ٢ سم

فإن : مساحة المربع ء هـ و ص = ... سم٢

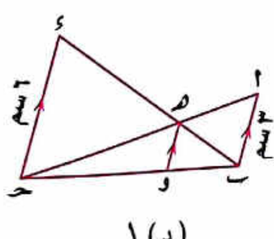


(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢٠ (د) ٣٦

(١٥) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{حـ ء}$

فإن : هـ و = ... سم



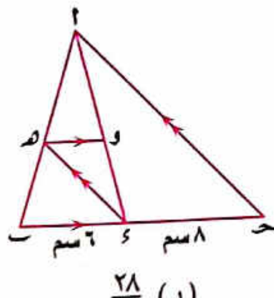
(أ) ٢,٥ (ب) ٢ (جـ) ١,٥ (د) ١

(١٦) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{و هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{حـ أ}$

، ب ء = ٦ سم ، ء حـ = ٨ سم

فإن : و هـ = ... سم

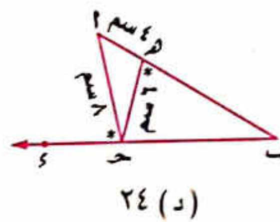


(أ) $\frac{١٢}{٧}$ (ب) $\frac{١٨}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{٢٨}{٧}$

(١٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ب هـ حـ)

فإن : ب هـ + ب حـ = ... سم



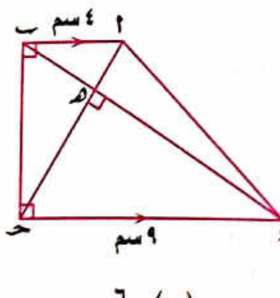
(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(١٨) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف

، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء حـ ب) = ٩٠° ، $\overline{أحـ}$ ⊥ $\overline{ب ء}$

فإن مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء = ... سم٢



(أ) ١٣ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٩ (د) ٦٠



العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

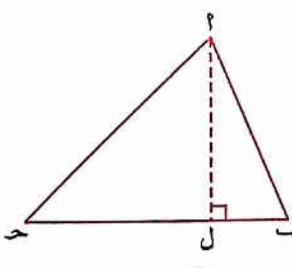


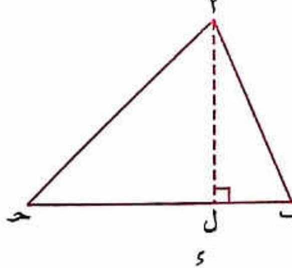
نعلم أن النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ، وفى هذا الدرس سنتناول العلاقة بين مساحتى مضلعين متشابهين.

أولًا النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين

نظرية ٣

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



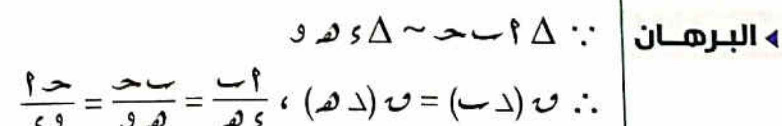


◂ **المعطيات** Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

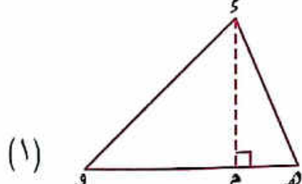
◂ **المطلوب** إثبات أن : $\frac{م(\Delta أ ب حـ)}{م(\Delta ء هـ و)} = \left(\frac{أ ب}{ء هـ}\right)^{٢} = \left(\frac{ب حـ}{هـ و}\right)^{٢} = \left(\frac{أ حـ}{ء و}\right)^{٢}$

◂ **العمل** نرسم $\overleftrightarrow{أ ل} \perp \overline{ب حـ}$ يقطعها فى ل ، $\overleftrightarrow{ء م} \perp \overline{هـ و}$ يقطعها فى م

◂ **البرهان** $\because \Delta$ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و



$\therefore$ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، $\frac{أ ب}{ء هـ} = \frac{ب حـ}{هـ و} = \frac{حـ أ}{و ء}$ (١)



، $\because \Delta\Delta$ أ ب ل ، ء هـ م قائما الزاوية ، ق(∠ب) = ق(∠هـ)

$\therefore \Delta$ أ ب ل ~ Δ ء هـ م $\therefore \frac{أ ب}{ء هـ} = \frac{أ ل}{ء م}$ (٢)

، $\because \frac{م(\Delta أ ب حـ)}{م(\Delta ء هـ و)} = \frac{\frac{١}{٢} ب حـ \times أ ل}{\frac{١}{٢} هـ و \times ء م} = \frac{ب حـ}{هـ و} \times \frac{أ ل}{ء م}$ (٣)

وبالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣) ينتج أن :

$\frac{م(\Delta أ ب حـ)}{م(\Delta ء هـ و)} = \frac{ب حـ}{هـ و} \times \frac{ب حـ}{هـ و} = \left(\frac{ب حـ}{هـ و}\right)^{٢} = \left(\frac{أ ب}{ء هـ}\right)^{٢} = \left(\frac{حـ أ}{و ء}\right)^{٢}$ **(وهو المطلوب)**

ملاحظة ١

من برهان النظرية السابقة نستطيع أن نستنتج أن :

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما .

مثال ١

إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين هى $\frac{٩}{١٦}$ ، ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم أوجد محيط المثلث الأكبر.

الحل

بفرض أن المثلثين المتشابهين هما : Δ أ ب حـ ، Δ س ص ع حيث Δ أ ب حـ هو المثلث الأصغر :

$\therefore \frac{م(\Delta أ ب حـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \left(\frac{أ ب}{س ص}\right)^٢ = \frac{٩}{١٦}$ $\qquad \therefore \frac{أ ب}{س ص} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{محيط \Delta أ ب حـ}{محيط \Delta س ص ع} = \frac{أ ب}{س ص} = \frac{٣}{٤}$ $\qquad \therefore \frac{٦٠}{محيط \Delta س ص ع} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ محيط Δ س ص ع $= \frac{٦٠ \times ٤}{٣} = ٨٠$ سم **(وهو المطلوب)**

مثال ٢

أ ب حـ مثلث مساحته ٦٢,٥ سم^٢ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س ، $\overline{أ حـ}$ فى ص

فإذا كان أ س : س ب = ٢ : ٣ **فأوجد :** مساحة الشكل س ب حـ ص

الحل

فى Δ أ ب حـ : $\because \overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

$\therefore \Delta$ أ س ص $\sim \Delta$ أ ب حـ

$\therefore \frac{م(\Delta أ س ص)}{م(\Delta أ ب حـ)} = \left(\frac{أ س}{أ ب}\right)^٢$

$\therefore \frac{م(\Delta أ س ص)}{٦٢,٥} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^٢$

$\therefore م(\Delta أ س ص) = \frac{٤}{٢٥} \times ٦٢,٥ = ١٠$ سم^٢

$\therefore$ مساحة الشكل س ب حـ ص = م(Δ أ ب حـ) − م(Δ أ س ص)

$= ٦٢,٥ - ١٠ = ٥٢,٥$ سم^٢ **(وهو المطلوب)**

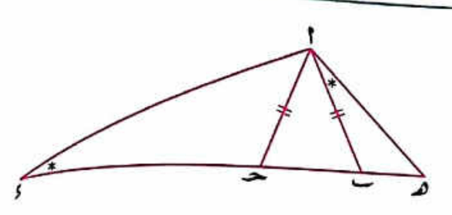
مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ء $\in \overrightarrow{ب حـ}$ خارج المثلث ، هـ $\in \overrightarrow{حـ ب}$ خارج المثلث بحيث

ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ ء) فإذا كانت مساحة Δ أ حـ ء أربعة أمثال مساحة Δ أ ب هـ

فأثبت أن : ء حـ = ٢ أ حـ

الحـــل



∵ ΔΔ أ ب هـ ، ء حـ أ فيهما :

ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ء)

، ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ ء حـ أ) (مكملتان لزاويتين متساويتين فى القياس)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ ء حـ أ ∴ $\frac{م (\Delta أ ب هـ)}{م (\Delta ء حـ أ)} = \left(\frac{أ ب}{ء حـ}\right)^{٢}$

∴ $\frac{١}{٤} = \left(\frac{أ ب}{ء حـ}\right)^{٢}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{أ ب}{ء حـ}$ ∴ ء حـ = ٢ أ ب

، ∵ أ ب = أ حـ ∴ ء حـ = ٢ أ حـ (وهو المطلوب)


مثـــال ٤

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{٥}{٣}$ ، رسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماسًا للدائرة عند أ قطع $\overleftarrow{ب حـ}$ فى ء

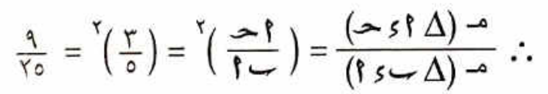
أوجد : م (Δ أ حـ ء) : م (Δ أ ب حـ)

الحـــل

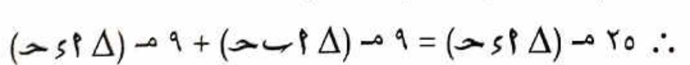
∵ ΔΔ أ ء حـ ، ب ء أ فيهما : ∠ ء مشتركة

، ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ ب) (مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ حـ}$)

∴ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء أ


∴ $\frac{م (\Delta أ ء حـ)}{م (\Delta ب ء أ)} = \left(\frac{أ حـ}{أ ب}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ $\frac{م (\Delta أ ء حـ)}{م (\Delta أ ب حـ) + م (\Delta أ ء حـ)} = \frac{٩}{٢٥}$


∴ ٢٥ م (Δ أ ء حـ) = ٩ م (Δ أ ب حـ) + ٩ م (Δ أ ء حـ)

∴ ١٦ م (Δ أ ء حـ) = ٩ م (Δ أ ب حـ)

∴ $\frac{م (\Delta أ ء حـ)}{م (\Delta أ ب حـ)} = \frac{٩}{١٦}$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر ١٥٠ سم^{٢}
احسب مساحة المثلث الأصغر.

ملاحظة ٢

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما.

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle$ أ ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و

، ل منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$

فإن : $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^2$

الإثبات

$\because$ $\triangle$ أ ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و $\quad \therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}}$

، $\because$ ب حـ = ٢ ب ل ، هـ و = ٢ هـ م $\quad \therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{٢ ب ل}}{\text{٢ هـ م}}$

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب ل}}{\text{هـ م}}$ ، $\because$ $\angle$ ب $\equiv$ $\angle$ هـ (لأن $\triangle$ أ ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و)

$\therefore$ $\triangle$ أ ب ل ~ $\triangle$ ء هـ م $\quad \therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب ل})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ م})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^2$ (١)

، $\because \frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^2$

ملاحظة ٣

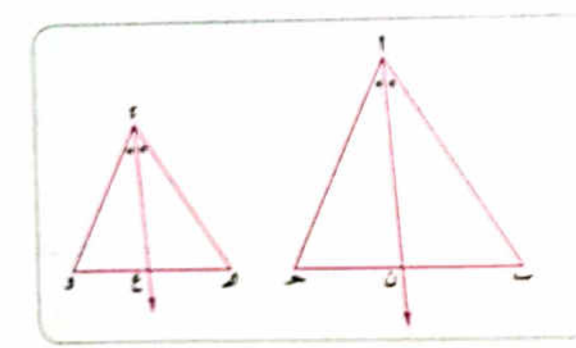
فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\triangle$ أ ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و

، $\overrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف $\angle$ أ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ن

، $\overrightarrow{\text{ء ع}}$ ينصف $\angle$ ء ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع

فإن : $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^2$



الإثبات

$\because$ $\triangle$ أ ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و $\quad \therefore$ ق($\angle$ ب أ حـ) = ق($\angle$ هـ ء و)

$\therefore \frac{1}{2}$ ق($\angle$ ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\angle$ هـ ء و) $\quad \therefore$ ق($\angle$ ب أ ن) = ق($\angle$ هـ ء ع)

، $\because$ ق($\angle$ ب) = ق($\angle$ هـ) $\quad \therefore$ $\triangle$ أ ب ن ~ $\triangle$ ء هـ ع

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\triangle \text{ ء هـ ع})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^2$ (١)

، ∵ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$ (٢)

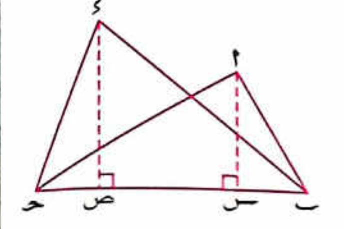
من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$

ملاحظة ٤

النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى القاعدة تساوى النسبة بين ارتفاعيهما.



فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب حـ}}$ قاعدة مشتركة بين Δ أ ب حـ ، Δ ء ب حـ

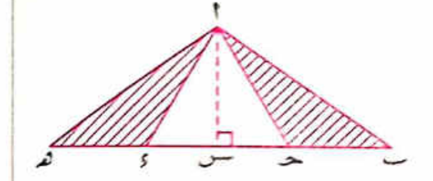
∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء ب حـ})} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ ب حـ} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢} \text{ ب حـ} \times \text{ء ص}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

ملاحظة ٥

النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى الارتفاع تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما.

فى الشكل المقابل :

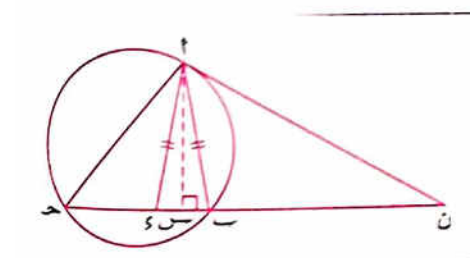


أ س ارتفاع مشترك بين Δ أ ب حـ ، Δ أ ء هـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ء هـ})} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ ب حـ} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢} \text{ ء هـ} \times \text{أ س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}}$

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

مثال ٥



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث : أ حـ > أ ب ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : أ ء = أ ب ، رسم $\overleftarrow{\text{أ ن}}$ يمس الدائرة عند أ ويقطع $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ فى ن

أثبت أن : ب ن : ء حـ = $(\text{أ ن})^{٢}$: $(\text{حـ أ})^{٢}$

الحــل

∵ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\Delta \text{ حـ ء أ})} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ ب ن} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢} \text{ ء حـ} \times \text{أ س}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{ء حـ}}$ (١)

، ∵ أ ب = أ ء ∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) ∴ ق(∠ أ ب ن) = ق(∠ أ ء حـ)

، ∵ $\overleftarrow{\text{أ ن}}$ مماس ∴ ق(∠ ب أ ن) = ق(∠ حـ) (مشتركتان فى $\frown{\text{أ ب}}$)

∴ Δ أ ب ن ~ Δ حـ ء أ ∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\Delta \text{ حـ ء أ})} = \frac{(\text{أ ن})^{٢}}{(\text{حـ أ})^{٢}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : ب ن : ء حـ = $(\text{أ ن})^{٢}$: $(\text{حـ أ})^{٢}$

(وهو المطلوب)

ثانيًا النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

حقيقة

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان المضلع أ ب حـ ء هـ يشابه المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ

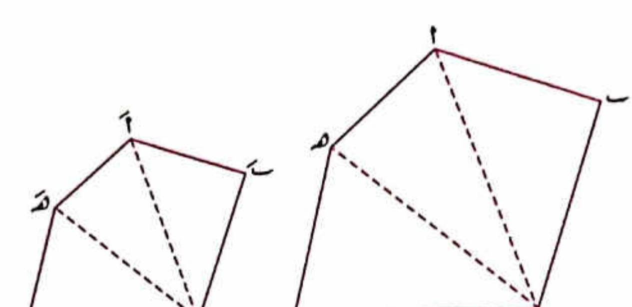
ومن رأسين متناظرين مثل حـ ، حَ

رسمنا $\overline{حـ أ}$ ، $\overline{حـ هـ}$ ، $\overline{حَ أَ}$ ، $\overline{حَ هَ}$

فإن كلاً من المضلعين ينقسم إلى ثلاثة مثلثات

ويكون : Δ أ ب حـ $\sim$ Δ أَ بَ حَ

، Δ أ حـ هـ $\sim$ Δ أَ حَ هَ ، Δ هـ حـ ء $\sim$ Δ هَ حَ ءَ



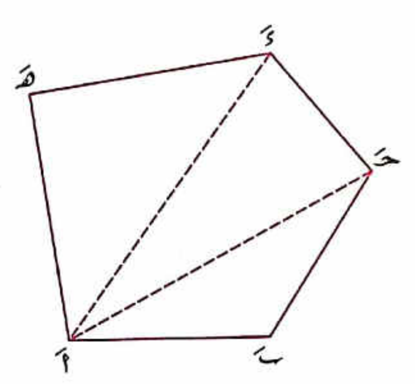
ملاحظات

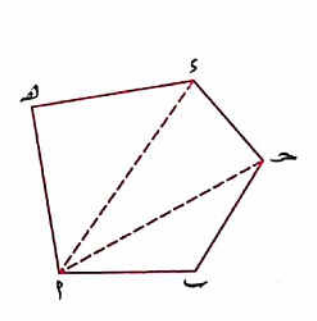
- الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع)
- إذا كان عدد أضلاع مضلع = ن ضلعًا

فإن عدد المثلثات التى ينقسم إليها برسم الأقطار المشتركة فى أحد الرءوس = (ن – ٢) مثلثًا .

نظرية ٤

النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما .





المعطيات المضلع أ ب حـ ء هـ $\sim$ المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ

المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء هـ)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^{2}$

العمل من أ ، أَ نرسم $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{أَ حَ}$ ، $\overline{أَ ءَ}$

البرهان ∵ المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع أ′ ب′ جـ′ د′ هـ′

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات ، كل يشابه نظيره (حقيقة) ويكون :

$$\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ ب′ جـ′})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب′ جـ′}}\right)^2 ، \quad \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ جـ د})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ جـ′ د′})} = \left(\frac{\text{جـ د}}{\text{جـ′ د′}}\right)^2 ، \quad \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ د′ هـ′})} = \left(\frac{\text{د هـ}}{\text{د′ هـ′}}\right)^2$$

، ∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب′ جـ′}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـ′ د′}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{د′ هـ′}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ′ ب′}}$ (من تشابه المضلعين)

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ ب′ جـ′})} = \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ جـ د})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ جـ′ د′})} = \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ د′ هـ′})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ′ ب′}}\right)^2$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ جـ د}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ′ ب′ جـ′}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ′ جـ′ د′}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ′ د′ هـ′})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ′ ب′}}\right)^2$$

ويكون : $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ب جـ د هـ})}{\text{م}(\text{المضلع أ′ ب′ جـ′ د′ هـ′})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ′ ب′}}\right)^2$ **(وهو المطلوب)**

مثال ٦

مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٩٥ سم^2 أوجد مساحة كل منهما.

الحل

∵ النسبة بين محيطى المضلعين المتشابهين = ٣ : ٢

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٢

∴ النسبة بين مساحتيهما = ٩ : ٤

وبفرض مساحة المضلع الأول = ٩ س ، ومساحة الثانى = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٩٥ ∴ ١٣ س = ١٩٥ ∴ س = ١٥

∴ مساحة المضلع الأول = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم^2

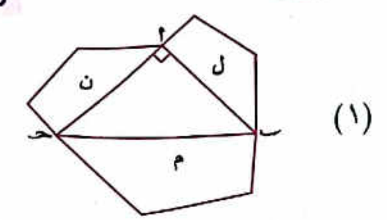
، مساحة المضلع الثانى = ١٥ × ٤ = ٦٠ سم^2

(وهو المطلوب)

مثال ٧

أثبت أنه إذا أنشئ على أضلاع مثلث قائم الزاوية ثلاثة مضلعات متشابهة بحيث تكون أضلاع المثلث أضلاعًا متناظرة فيها فإن مساحة المضلع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المضلعين المنشأين على ضلعى القائمة.

الحـــل



∵ المضلع ل ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}\right)^2 = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{ب حـ})^2}$ (١)

، ∵ المضلع ن ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}}\right)^2 = \frac{(\text{أ حـ})^2}{(\text{ب حـ})^2}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)}}{\text{مـ (المضلع م)}} + \frac{\text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{ب حـ})^2} + \frac{(\text{أ حـ})^2}{(\text{ب حـ})^2}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)} + \text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \frac{(\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2}{(\text{ب حـ})^2} = \frac{(\text{ب حـ})^2}{(\text{ب حـ})^2}$ **(فيثاغورس)**

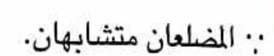
∴ مـ (المضلع ل) + مـ (المضلع ن) = مـ (المضلع م) **(وهو المطلوب)**

مثـــال ٨

أ ب حـ ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول فى م وقطرا الثانى فى ن

أثبت أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{ب م})^2}{(\text{بَ ن})^2}$

الحـــل



∵ المضلعان متشابهان.



∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أَ بَ حَ

وينتج أن : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ، Δ أ ب ء ~ Δ أَ بَ ءَ

وينتج أن : ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أَ بَ ن ∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{بَ ن}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{أَ بَ})^2} = \frac{(\text{ب م})^2}{(\text{بَ ن})^2}$ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك

أ ب حـ ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان فإذا كانت : س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بَ حَ}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{س ء})^2}{(\text{ص ءَ})^2}$





📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فتكون النسبة بين مساحتيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٩ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ١٦ : ٨١

(٢) 📖 إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{م (\Delta س ص ع)}{م (\Delta أ ب جـ)}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٩}$

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٩ : ٤٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ....

(أ) ٣ : ٧ (ب) ٩ : ٤٩ (جـ) ٣ : ١٠ (د) ١٠ : ٣

(٤) إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين ٧ سم ، ١١ سم فإن النسبة بين محيطيهما ....

(أ) $\frac{٤٩}{١٢١}$ (ب) $\frac{٧}{١٨}$ (جـ) $\frac{٧}{١١}$ (د) $\frac{١١}{١٨}$

(٥) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥

فإذا كانت مساحة الأول ١٦ سم^{٢} فإن مساحة الثانى = ... سم^{٢}

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(٦) 📖 إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم^{٢} فإن مساحة المضلع الأكبر = ... سم^{٢}

(أ) ٢٤ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٢٠٠

(٧) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٥ : ٧ ومساحة المضلع الأكبر ٢٤٥ سم^{٢} فإن مساحة المضلع الأصغر تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٢٥ (ب) ١٧٥ (جـ) ٣٤٣ (د) ٤٨٠,٢

(٨) مربعان النسبة بين طولى ضلعيهما ٣ : ٤ وكانت مساحة أكبرهما ٤٨ سم^{٢}
فإن مساحة أصغرهما = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٧

(٩) مربعان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم^{٢}
فإن مساحة أكبرهما .... سم^{٢}

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٠) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٩ : ٢٥ وكان طول أحد أضلاع المضلع الأصغر ٣ سم
فإن طول نظيره فى المضلع الأكبر .... سم

(أ) $\frac{٢٥}{٣}$ (ب) $\frac{٩}{٥}$ (جـ) ٧٥ (د) ٥

(١١) إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى ٩ : ٢٥ ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم
فإن محيط المثلث الأكبر يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٢) مضلعان متشابهان مساحتاهما ١٠٠ سم^{٢} ، ٦٤ سم^{٢} ، فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم
فإن محيط الثانى = ... سم

(أ) ٣٨,٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٢ (د) ٤٨

(١٣) 📖 إذا كان : Δ ٩ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، م (Δ ٩ ب حـ) = ٩ م (Δ ء هـ و) وكان ء هـ = ٤ سم
فإن : ٩ ب = ... سم

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٣٦

(١٤) دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٣ : ٥ فإذا كانت مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة الصغرى ٢٧ سم^{٢}
فإن مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة الكبرى تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

(١٥) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ ومجموع مساحتيهما ١٥٠ سم^{٢}
فإن مساحة المضلع الأصغر = ... سم^{٢}

(أ) ٥٤ (ب) ٩٦ (جـ) ٧٥ (د) ٥٢

(١٦) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ والفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^{٢}
فإن مساحة المضلع الأصغر تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٨ (ب) ٥٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٦

(١٧) إذا كان : المضلع م$_١$ ~ المضلع م$_٢$ ، وكان : $\frac{\text{مساحة سطح المضلع م}_١}{\text{مساحة سطح المضلع م}_٢} = \frac{٩}{١٦}$

فإن هذا يعنى أن : ....

(أ) مجموع مساحتى سطحى المضلعين = ٢٥ وحدة مربعة.

(ب) النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٩ : ١٦

(جـ) معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٢$ = $\frac{٩}{١٦}$

(د) محيط المضلع م$_١$ = $\frac{٣}{٤}$ محيط المضلع م$_٢$

(١٨) إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أَ بَ جَ ءَ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{١}{٣}$

فإن : $\frac{\text{ق (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{ق (المضلع أَ بَ جَ ءَ)}} + \frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جَ ءَ}} =$ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب = ٣ سم ، ب هـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

فإن : $\frac{\text{مساحة (}\Delta\text{ أ ب هـ)}}{\text{مساحة (}\Delta\text{ جـ ء هـ)}} \times \frac{\text{ق (} \angle \text{ أ ب هـ)}}{\text{ق (}\angle\text{ ء جـ هـ)}} =$ ....

(أ) $\frac{٩}{٤٩}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٦}{٤٩}$

(٢٠) فى الشكل المقابل :

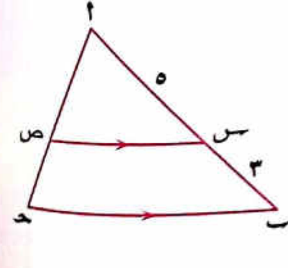
$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = ٤ سم ، ب جـ = ٩ سم

فإن : $\frac{\text{مساحة (}\Delta\text{ أ ء هـ)}}{\text{مساحة (}\Delta\text{ أ ب جـ)}} =$ ....

(أ) $\frac{١٦}{٨١}$ (ب) $\frac{٨١}{٦٥}$

(جـ) $\frac{٦٥}{٨١}$ (د) $\frac{١٦}{٦٥}$

(٢١) فى الشكل المقابل :



إذا كان أ س : س ب = ٥ : ٣

، م (Δ أ ب جـ) = ٢٥,٦ سم^٢

فإن : م (Δ أ س ص) = ... سم^٢



(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٤١ (د) ٦٥,٥

(٢٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{ب هـ}$ // $\overline{ء حـ}$

فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة شبه المنحرف ب حـ ء هـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٢٥}{٨١}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(٢٣) في الشكل المقابل :

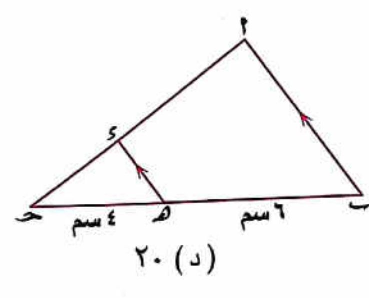
$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ، مساحة Δ أ ء هـ = ٨ سم^٢

فإن مساحة الشكل ء ب حـ هـ = ... سم^٢

(أ) ٢٧ (ب) ٦٤

(جـ) ٢٤ (د) ١٦

(٢٤) في الشكل المقابل :

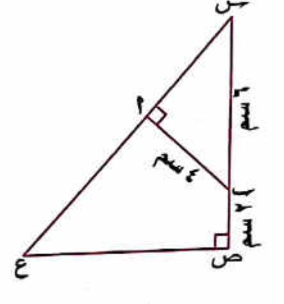


إذا كانت مساحة الشكل أ ب هـ ء = ٤٢ سم^٢

فإن مساحة Δ حـ هـ ء = ... سم^٢

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(٢٥) في الشكل المقابل :

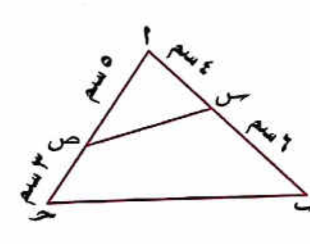


$\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ س أ ب})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ س ص ع})}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{١٦}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٦) في الشكل المقابل :

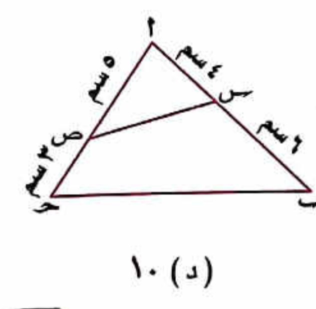


$\frac{\text{م } (\Delta \text{ أ س ص})}{\text{م } (\Delta \text{ أ حـ ب})}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٧) في الشكل المقابل :



إذا كان مساحة Δ أ س ص = ١٠ سم^٢

فإن مساحة سطح الشكل س ب حـ ص = ... سم^٢

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

(٢٨) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٤٥ سم^2

فإن : مساحة Δ أ س ص = ... سم^2

(أ) ٢٢,٥ (ب) ٩٠

(جـ) ٥ (د) ١٥

(٢٩) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل أ حـ ء هـ = ٣ مساحة المثلث هـ ب ء

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٣٠) في الشكل المقابل :

م (Δ أ ء حـ) = ١٦٠ سم^2

فإن : م (Δ أ ء ب) = ... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٩٠

(جـ) ١٢٠ (د) ٣٢٠

(٣١) في الشكل المقابل :

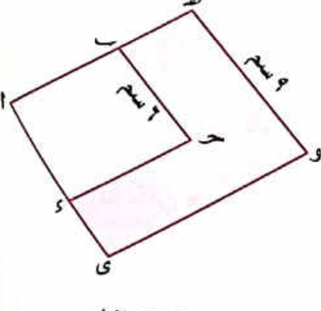
أ ء قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ ، ٣ أ ب = ٤ أ حـ

فإن : $\frac{\text{م (Δ أ حـ ء)}}{\text{م (Δ أ حـ ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٧}$ (ب) $\frac{٩}{١٦}$

(جـ) $\frac{٧}{١٦}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٢) في الشكل المقابل :



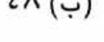


إذا كان : الشكل أ ب حـ ء ~ الشكل أ هـ و ى

وكانت مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٣٢ سم^2

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٧٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٠ (د) ١٦



(٣٣) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، أ هـ : هـ ب = ٤ : ٣

، م (∆ أ ء هـ) = ٣٢ سم^2

فإن : م (∆ ء و حـ) = ... سم^2

(أ) ١٨ (ب) ٩٨ (جـ) ٢٤ (د) ٤٢

(٣٤) في الشكل المقابل :

$\overline{أب} \cap \overline{حـ ء}$ = {هـ} ، م (∆ أ حـ هـ) = ٩٠٠ سم^2

فإن : م (∆ ء هـ ب) = ... سم^2

(أ) ١٠٨٠ (ب) ١٢٠٨ (جـ) ١٢٩٦ (د) ١٢١٨

(٣٥) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء رباعى دائرى فيه :

أ ب = ٨ سم ، حـ ء = ١٢ سم

فإن : م (∆ أ هـ ب) : م (∆ ء هـ حـ) = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٢ : ٣

(جـ) ٤ : ٩ (د) ٩ : ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم^2 أوجد مساحة كل منهما.

«٩٠ سم^2 ، ٤٠ سم^2»

٢ مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^2 فأوجد مساحة كل منهما.

«٤ سم^2 ، ٣٦ سم^2»

٣ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{ءحـ}$

، $\overline{أحـ}$ // $\overline{ءهـ}$ ، أ ب = $\frac{٣}{٢}$ ء حـ

، مساحة ∆ ء حـ هـ = ١٦ سم^2

أوجد : مساحة ∆ أ ب حـ

«٣٦ سم^2»

٤ أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أء = ٢ ب ء ، هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ حيث ءهـ // $\overline{\text{بجـ}}$
إذا كانت مساحة △ أ ء هـ = ٦٠ سم² أوجد : مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ «٧٥ سم²»

---

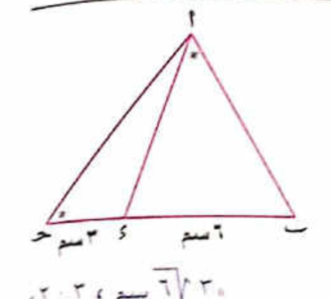
٥ أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ ء = ٣ سم
، هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ حيث هـ جـ = ٢ سم أوجد : $\frac{\text{م (△ أ ء هـ)}}{\text{م (الشكل ء ب جـ هـ)}}$ «$\frac{١}{٢}$»

---

٦ أ ب جـ ء ، أَ بَ جـَ ءَ مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول في س وقطرا الثاني في ص
أثبت أن : $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ جـَ ءَ)}} = \frac{(\text{ب س})^2}{(\text{بَ ص})^2}$

---

٧ في الشكل المقابل :

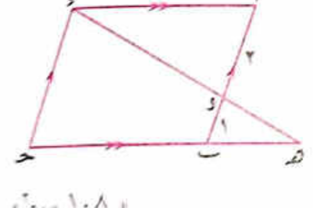


أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{\text{بجـ}}$ بحيث
ب ء = ٦ سم فإذا كان ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ جـ)
فأثبت أن : △ أ ب جـ ~ △ ء ب أ واحسب : طول $\overline{\text{أب}}$
ثم أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين : أ ب جـ ، ء ب أ

«٣ $\sqrt{٦}$ سم ، ٣ : ٢»

---

٨ في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، $\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{١}{٢}$
، م (△ ب هـ و) = ٩ سم²
أوجد : مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ ء «١٠٨ سم²»

---

٩ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$
حيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـب}}$ = {و}
(١) أثبت أن : △ ء جـ و ~ △ هـ أ ء (٢) أوجد : $\frac{\text{م (△ ء جـ و)}}{\text{م (△ هـ أ ء)}}$ «$\frac{٢٥}{٩}$»

---

١٠ أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، س ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، س ∉ $\overline{\text{أب}}$ حيث ب س = ٢ أ ب
، ص ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـب}}$ ، ص ∉ $\overline{\text{جـب}}$ حيث ب ص = ٢ ب جـ ، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص
أثبت أن : $\frac{\text{م (متوازي الأضلاع أ ب جـ ء)}}{\text{م (متوازي الأضلاع س ب ص ع)}} = \frac{١}{٤}$

---

١١ أ ب جـ ء ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{صع}}$
فأثبت أن : م (المضلع أ ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ء)² : (ن ل)²

١٢ $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران غير متقاطعين فى دائرة م ، فإذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$ ، أحـ = ٣ ب ء

فأوجد : $\frac{م(\Delta\ هـ ب ء)}{م(\Delta\ هـ حـ أ)}$

« $\frac{١}{٩}$ »

١٣ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، رسم قاطعان يمران بالنقطة أ يقطعان الدائرة م فى ب ، ء ويقطعان الدائرة ن فى حـ ، هـ أثبت أن : $\frac{م(\Delta\ أ ب ء)}{م(\Delta\ أ حـ هـ)} = \frac{(ب ء)^٢}{(حـ هـ)^٢}$

١٤ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : م (Δ أ ب هـ) : م (Δ أ ء حـ) : م (Δ ب ء هـ) = $(هـ ب)^٢ : (حـ ء)^٢ : (هـ ء)^٢$

١٥ إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع ، $\overline{أء}$ ، $\overline{س ل}$ ارتفاعين متناظرين فيهما

فأثبت أن : ب حـ × س ل = أ ء × ص ع

١٦ برهن على أن النسبة بين مساحتى المثلثين المتشابهين تساوى مربع النسبة بين :

(١) ارتفاعين متناظرين فيهما.

(٢) طولى متوسطين متناظرين فيهما.

١٧ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب حـ ص ، أ حـ ع أثبت أن : م (Δ أ ب س) + م (Δ ب حـ ص) = م (Δ أ حـ ع)

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أ حـ}$ فى هـ أثبت أن : $\frac{م(\Delta\ أ ب حـ)}{م(\Delta\ أ ب هـ)} = \frac{٧}{١٦}$

١٩ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص} // \overline{أء}$ ، ويقطع $\overline{أب}$ فى س ، $\overline{حـ ء}$ فى ص وبحيث ينقسم شبه المنحرف إلى المضلعين المتشابهين أ س ص ء ، س ب حـ ص

أثبت أن : $\frac{م(\text{المضلع أ س ص ء})}{م(\text{المضلع س ب حـ ص})} = \frac{م(\Delta\ أ ب ء)}{م(\Delta\ ب ء حـ)}$

٢٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ يقطعه فى ء ، رسم المثلثان المتساويا الأضلاع أ ب هـ ، حـ أ و خارج المثلث أ ب حـ

أثبت أن : (١) المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع حـ ء أ و

(٢) $\frac{م(\text{المضلع أ ء ب هـ})}{م(\text{المضلع حـ ء أ و})} = \frac{ب ء}{حـ ء}$

٢١ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ يقطعه فى ء ، رُسم على $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ المربعان أ س ص ب ، ب م ن حـ خارج المثلث أ ب حـ

(١) **أثبت أن :** المضلع ء أ س ص ب ~ المضلع ء ب م ن حـ

(٢) إذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد : النسبة بين مساحتى سطحى المضلعين. « $\frac{٩}{١٦}$ »

---

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ حـ}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهى المضلعات س ، ص ، ع على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع س = ٤٠ سم^٢ ، ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم^٢ ، ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم^٢ أثبت أن المثلث أ ب حـ قائم الزاوية.

---

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ $\overline{ب ء}$ ، رسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overline{ء أ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى و ، رسم $\overleftrightarrow{هـ م}$ // $\overline{ء حـ}$ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى م

أثبت أن : م (المضلع ب م هـ و) : م (المضلع ب حـ ء أ) = $\frac{ب و \times ب م}{ب أ \times ب حـ}$

---

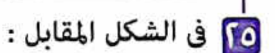
٢٤ أ ب حـ ء مربع ، قسمت $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ بالنقاط س ، ص ، ع ، ل على الترتيب بنسبة ١ : ٣

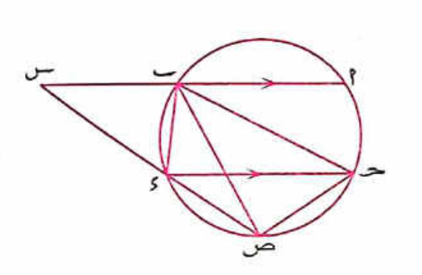
أثبت أن : (١) الشكل س ص ع ل مربع.

(٢) $\frac{\text{م (المربع س ص ع ل)}}{\text{م (المربع أ ب حـ ء)}} = \frac{٥}{٨}$

---

٢٥ فى الشكل المقابل :





$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان فى دائرة ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{ص ء}$ = {س}

أثبت أن : $\frac{\text{م (}\Delta\text{ ء ب س)}}{\text{م (}\Delta\text{ حـ ص ب)}} = \frac{(\text{س ب})^٢}{(\text{ب ص})^٢}$

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة (الشكل ء ص و حـ) = ٤٠ سم^٢

، مساحة (الشكل و هـ ب حـ) = ٣٢ سم^٢

، مساحة (Δ أ و ص) = ٥ سم^٢

فإن مساحة (Δ أ هـ و) = ... سم^٢

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة (△ ٩ س ص) = ٤٠ سم^2

، مساحة (△ ء ع م) = ١٣ سم^2

، مساحة (الشكل س ب حـ ص) = ٥٠ سم^2 فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٧٧ (ب) ٩٢ (جـ) ١٠٤ (د) ١١٢

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٩ ب = ٣ ٩ ء وكانت مساحة △ ٩ ء هـ = ٦ سم^2

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة الشكل ء س ص هـ = ٣٠ سم^2

فإن مساحة الشكل س ب حـ ص = ... سم^2

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات △ ٩ ب حـ ، $\overline{مء}$ // $\overline{٩ب}$

وكانت مساحة △ ٩ ب حـ = ٣٦ سم^2

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٢٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة △ ء هـ و = ٦ سم^2

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^2

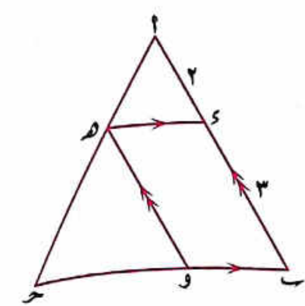
(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٥٤

(٧) إذا كان △ ٩ ب حـ ~ △ ء هـ و وكان ٩ ب = س سم ، ء هـ = (س + ١) سم ،

مساحة △ ٩ ب حـ = (س + ٢) سم^2 ، ومساحة △ ء هـ و = (س + ٧) سم^2 فإن قيمة س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) فى الشكل المقابل :



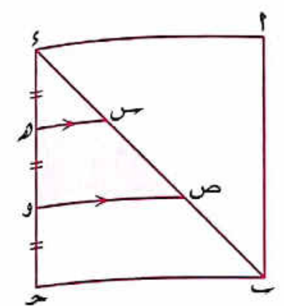
إذا كانت : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، $\overline{هـو} // \overline{أب}$ ، $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\square \text{ ءبوهـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أبحـ})} = $ ....

(أ) $\frac{٢١}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١٢}{٢٥}$ (د) $\frac{١٣}{٢٥}$

(٩) فى الشكل المقابل :

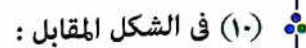


أبحـء مربع طول ضلعه ٦ سم ، ءهـ = هـو = وحـ

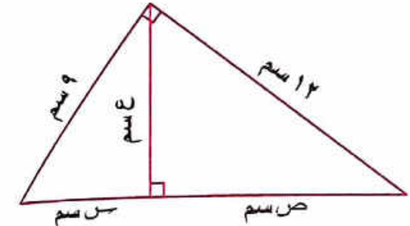
فإن : مساحة (الشكل س ص و هـ) = ... سم^٢

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢



(١٠) فى الشكل المقابل :

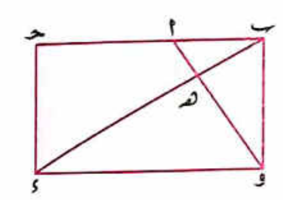


س + ص + ع = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٨,٢

(جـ) ٢٢ (د) ٢٢,٢

(١١) فى الشكل المقابل :

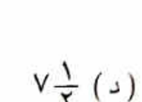


بحـءو مستطيل ، مساحة (Δ أبهـ) = ٢ سم^٢

، مساحة (Δ بهـو) = ٣ سم^٢

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ٥ (ب) $٥\frac{١}{٢}$ (جـ) ٦ (د) $٧\frac{١}{٢}$



(١٢) إذا كان معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشابه المضلع $م_٣$ للمضلع $م_٢$ هو $\frac{١}{٣}$

فأى من العلاقات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) مساحة ($م_١$) + مساحة ($م_٢$) = مساحة ($م_٣$)

(ب) مساحة ($م_١$) + مساحة ($م_٣$) = مساحة ($م_٢$)

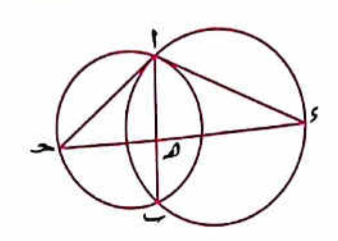
(جـ) $\sqrt{\text{مساحة } (م_١)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_٢)} = \sqrt{\text{مساحة } (م_٣)}$

(د) $\sqrt{\text{مساحة } (م_١)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_٣)} = \sqrt{\text{مساحة } (م_٢)}$

٢ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، حـ نقطة تنتمى للدائرة ، س $\in$ $\overline{أب}$ بحيث أ س = ب حـ
، رسم $\overrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى ص

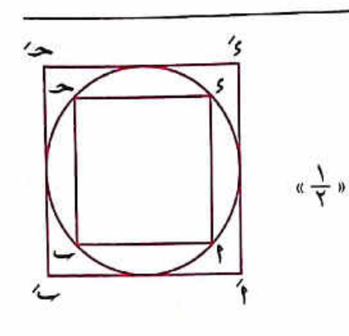
أثبت أن : م (Δ أ ب حـ) : م (المضلع س ب حـ ص) = $(أ ب)^2$: $(أ حـ)^2$

٣ **فى الشكل المقابل :**



دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overline{أ حـ}$ وتر فى إحدى الدائرتين
يمس الأخرى عند أ ، $\overline{أ ء}$ وتر فى الدائرة الثانية يمس الأولى
عند أ فإذا كان $\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ **فأثبت أن :** $\frac{حـ هـ}{هـ ء} = \frac{(أ حـ)^2}{(أ ء)^2}$

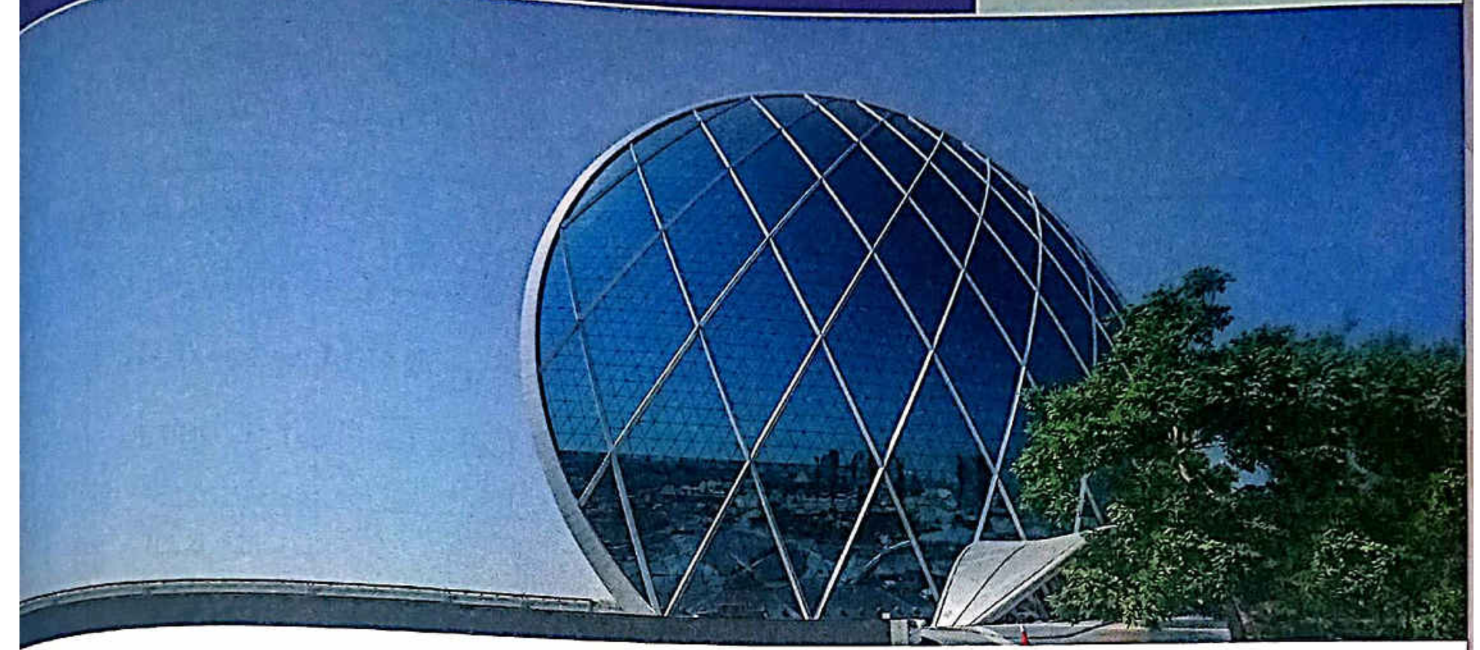
٤ **فى الشكل المقابل :**



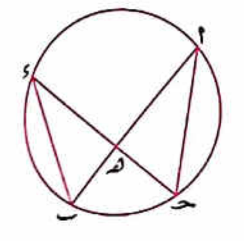
مربعان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم خارجها.
أوجد النسبة بين مساحتيهما. « $\frac{1}{2}$ »



تطبيقات التشابه فى الدائرة



١ فى الشكل المقابل



أب ، جـ د وتران متقاطعان فى نقطة هـ

نلاحظ أن ∆ هـ أ جـ ~ ∆ هـ د ب

وذلك لأن ق (∠ أ هـ جـ) = ق (∠ د هـ ب) (بالتقابل بالرأس)

، ق (∠ أ) = ق (∠ د) (محيطيتان مشتركتان فى ⌒جـ ب)

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

٢ فى الشكل المقابل

أ ب د جـ شكل رباعى دائرى ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}} = \{\text{هـ}\}$

نلاحظ أن ∆ هـ أ جـ ~ ∆ هـ د ب

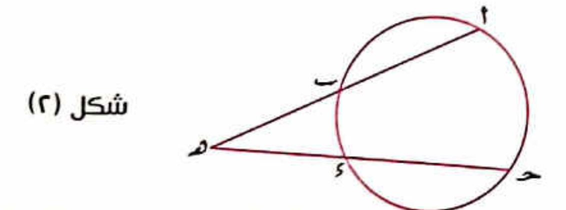
وذلك لأن ق (∠ هـ أ جـ) = ق (∠ هـ د ب) (خواص الرباعى الدائرى) ، ∠ هـ مشتركة

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

تمرين مشهور

- إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أب ، جـ د لدائرة فى نقطة هـ فإن : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

شكل (١)



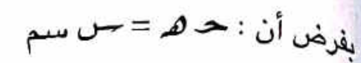
شكل (٢)

مثال ١

أ ب ، حـ ء وتران في دائرة متقاطعان في هـ فإذا كان : أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٢ سم ، حـ ء = ٥,٥ سم

فاحسب : طول كل من حـ هـ ، هـ ء

الحل



بفرض أن : حـ هـ = س سم

∴ هـ ء = (٥,٥ − س) سم

∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

∴ ٦ = ٥,٥ س − س^{٢}

∴ (٢ س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ حـ هـ = ٤ سم ، هـ ء = ١,٥ سم

، ∵ أ ب ، حـ ء وتران متقاطعان في هـ

∴ ٣ × ٢ = س (٥,٥ − س)

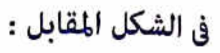
∴ ٢ س^{٢} − ١١ س + ١٢ = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أ، س = ٤



(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

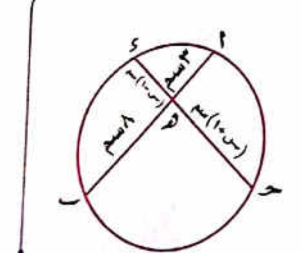


في الشكل المقابل :

أ ب ∩ حـ ء = {هـ} ، أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٨ سم

، حـ هـ = (س + ١) سم ، هـ ء = (س − ١) سم

أوجد : قيمة س



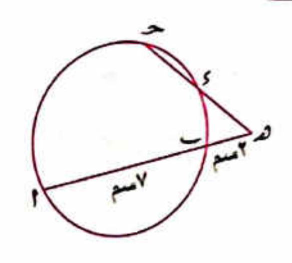
مثال ٢

في الشكل المقابل :

أ ب ∩ حـ ء = {هـ} ، هـ ب = ٢ سم ، أ ب = ٧ سم

فإذا كان : $\frac{هـ ء}{هـ حـ} = \frac{١}{٢}$

فأوجد : طول هـ حـ



الحل

∵ $\frac{هـ ء}{هـ حـ} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ ء = ك ، هـ حـ = ٢ ك حيث ك ≠ ٠

، ∵ أ ب ∩ حـ ء = {هـ}

∴ هـ ء × هـ حـ = هـ ب × هـ أ

∴ ك × ٢ ك = ٢ × ٩ = ١٨

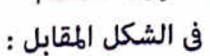
∴ ٢ ك^{٢} = ١٨

∴ ك^{٢} = ٩

∴ ك = ٣ أ، −٣ (مرفوض)

∴ هـ حـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

(وهو المطلوب)



حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ص س}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ = {م} ، م س = ٤ سم ، م ل = ٥ سم

، ل ع = ٧ سم

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

مـلاحظـة

فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند ب

نلاحظ أن Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء ب

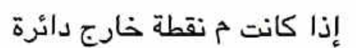
وذلك لأن ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

، ∠ أ مشتركة.

◂ **ومن التشابه نستنتج أن** $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ ∴ (أ ب)^٢^ = أ حـ × أ ء

! تذكر أن
أ ب وسط متناسب بين أ حـ ، أ ء



نتيجـة ١

إذا كانت م نقطة خارج دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ يمس الدائرة فى حـ

، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ يقطعها فى أ ، ب

فإن : (م حـ)^٢^ = م أ × م ب



مثـال ٣

م نقطة خارج دائرة ، $\overline{\text{م حـ}}$ قطعة مماسة لها عند حـ ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها فى أ ، ب حيث م أ > م ب

فإذا كان : م حـ = ١٠ سم ، أ ب = ١٥ سم **فاحسب** : طول $\overline{\text{م ب}}$

الحـل

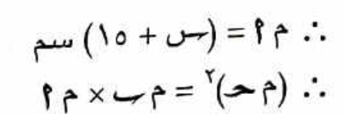
نفرض أن : م ب = س سم

، ∵ $\overline{\text{م حـ}}$ مماسة للدائرة ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها

∴ (١٠)^٢^ = س (س + ١٥)

∴ س^٢^ + ١٥ س − ١٠٠ = ٠

∴ س = ٥ أى م ب = ٥ سم



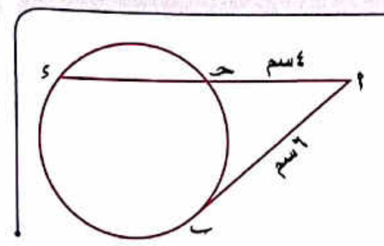
∴ م أ = (س + ١٥) سم

∴ (م حـ)^٢^ = م ب × م أ

∴ (س − ٥) (س + ٢٠) = ٠

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أء}$ قاطع للدائرة عند حـ ، ء ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماسة للدائرة عند ب

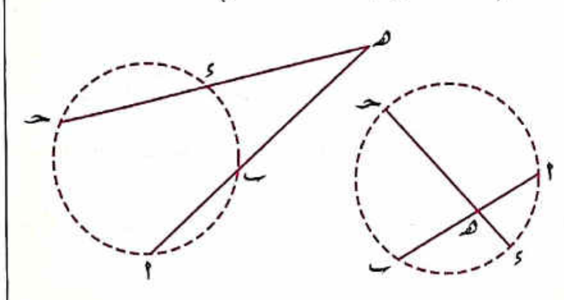
أوجد : طول $\overline{حـ ء}$

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ في نقطة هـ (مختلفة عن أ ، ب ، حـ ، ء)

وكان هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

فإن النقط : أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.



ففي الشكلين المقابلين :

إذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

فإن النقط :

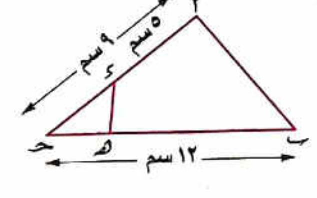
أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، فرضت ء ∈ $\overline{أحـ}$ بحيث أ ء = ٥ سم ، وفرضت هـ ∈ $\overline{ب حـ}$

بحيث $\frac{ب هـ}{هـ حـ}$ = ٣ أثبت أن : الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري.

الحل



∵ حـ ء = أ حـ − أ ء = ٩ − ٥ = ٤ سم ∴ حـ ء × حـ أ = ٤ × ٩ = ٣٦

، ∵ ب هـ = ٣ حـ هـ ∴ ب حـ = ٤ حـ هـ

∴ حـ هـ = $\frac{1}{4}$ ب حـ = $\frac{1}{4}$ × ١٢ = ٣ سم ∴ حـ هـ × حـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦

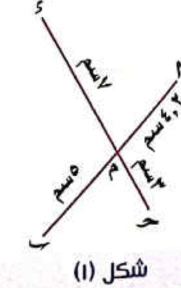
∴ حـ ء × حـ أ = حـ هـ × حـ ب

∴ الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري.

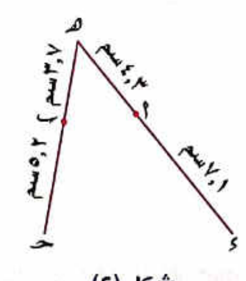
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

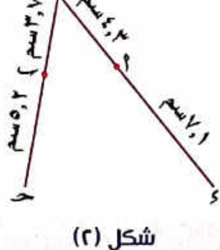
في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ؟



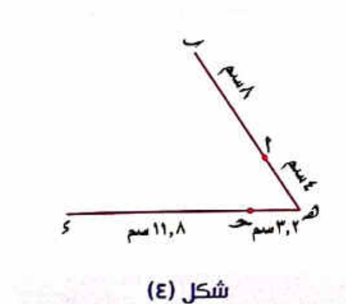
شكل (١)



شكل (٢)

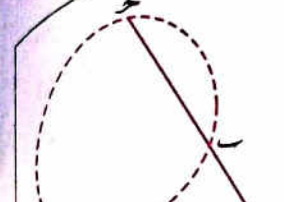


شكل (٣)



شكل (٤)

نتيجة ٢



إذا كان : $(ﻫ أ)^٢ = ﻫ ب \times ﻫ حـ$

فإن : $\overleftrightarrow{ﻫ أ}$ تمس الدائرة المارة

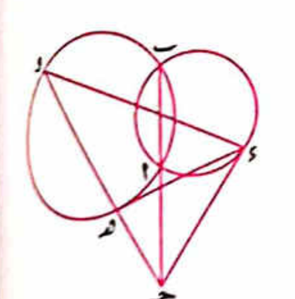
بالنقط أ ، ب ، حـ

مثال ٥

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{ب أ}$ ، حـ $\notin \overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ مماسة لإحدى الدائرتين فى ء ، $\overrightarrow{حـ و}$ قاطعة للأخرى فى ﻫ ، و حيث حـ و > حـ ﻫ

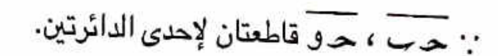
أثبت أن : $\overline{حـ ء}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، ﻫ ، و

الحل

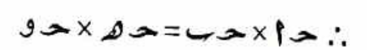


$\because$ $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ و}$ قاطعتان لإحدى الدائرتين.

$\therefore$ حـ أ × حـ ب = حـ ﻫ × حـ و (١)



، $\because$ $\overline{حـ ء}$ مماسة للدائرة الأخرى ، $\overrightarrow{حـ ب}$ قاطعة لها



$\therefore$ $(حـ ء)^٢$ = حـ أ × حـ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(حـ ء)^٢$ = حـ ﻫ × حـ و

$\therefore$ $\overline{حـ ء}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، ﻫ ، و (وهو المطلوب)

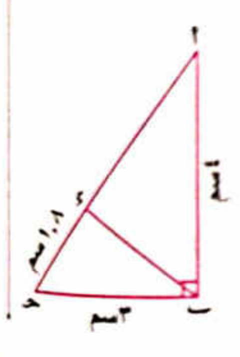
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ١,٨ سم

أثبت أن : $\overline{ب حـ}$ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء





على تطبيقات التشابه فى الدائرة



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



س = ... سم

(أ) ٣,٥ (ب) ١٤

(جـ) ٦ (د) ١٢

(٢) فى الشكل المقابل :

أب ∩ حء = {م} ، أم = ٦ سم ، مب = ١٨ سم

، حم = ٣ س سم ، ءم = ٤ س سم

فإن : حء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٢١

(٣) من الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٦ (ب) -٦

(جـ) ± ٦ (د) ٣٦

(٤) فى الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ٦,٥ (ب) ١٣

(جـ) ٦ (د) ٣٦

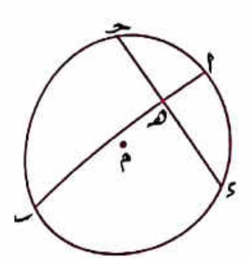
(٥) فى الشكل المقابل :

أب ، حء وتران فى الدائرة ، أب ∩ حء = {و}

، أو = (٥ جاهـ) سم ، وب = (٢ قتاهـ) سم ، وحـ = ٢ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$



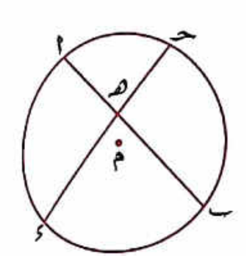
(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ هـ = ٥ سم ، جـ هـ = ٨ سم

، ء هـ = ١٠ سم ، ب هـ = س + ١ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ١٥



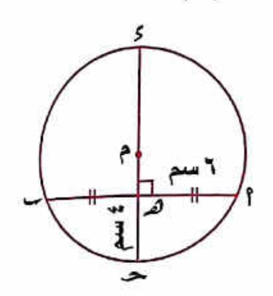
(٧) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب} \cap \overline{جـ ء}$ = {هـ} ، أ هـ = ٤ سم ، هـ ب = ٦ سم

، ء هـ = (س + ١) سم ، جـ هـ = (س − ١) سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٧

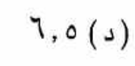


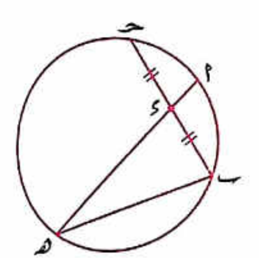
(٨) فى الشكل المقابل :

طول نصف قطر الدائرة = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٤,٥

(جـ) ٦ (د) ٦,٥



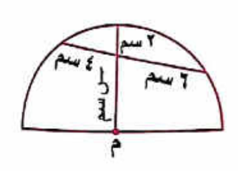


(٩) فى الشكل المقابل :

(ب ء)^{٢} = ...

(أ) أ ء × ء ب (ب) أ ء × ء هـ

(جـ) أ ء × ب هـ (د) أ جـ × ب ء

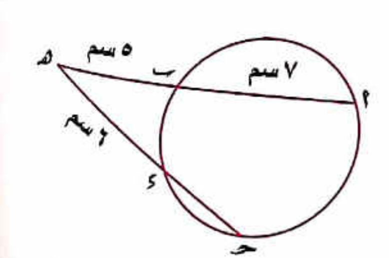


(١٠) فى الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها م

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٢



(١١) فى الشكل المقابل :

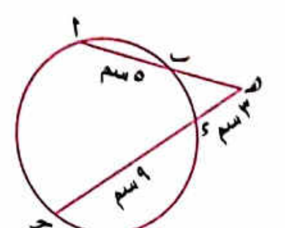
أ ب = ٧ سم ، ب هـ = ٥ سم ، ء هـ = ٦ سم

فإن : طول $\overline{جـ ء}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٢) في الشكل المقابل :

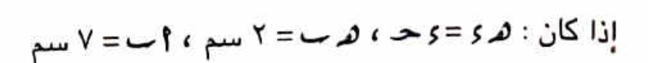


ب هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٣) في الشكل المقابل :


إذا كان : هـ ء = ء حـ ، هـ ب = ٢ سم ، أ ب = ٧ سم

فإن : طول $\overline{\text{هـ حـ}}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٣

(١٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : ء حـ = م ب

فإن : محيط الدائرة م = ... سم

(أ) ١٥ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٠ π (د) ٢٤ π

(١٥) 📖 في الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٣ (د) ٩

(١٦) 📖 في الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٤،٨ (ب) ٥،٦

(جـ) ٤،٢ (د) ٥،٢

(١٧) في الشكل المقابل :

مساحة الدائرة م = ... سم^2

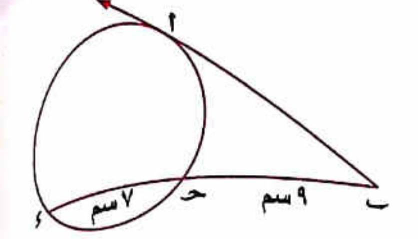
(أ) ٦ π (ب) ١٨ π

(جـ) ٢ $\sqrt{6}$ π (د) $\sqrt{6}$ π

(١٨) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس ، ب حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٧ سم

فإن : أ ب = ... سم



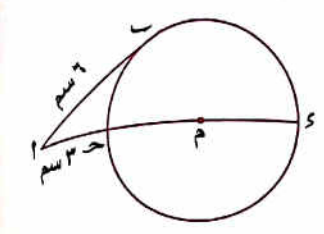
(أ) ٦٣ (ب) ١٤٤

(جـ) ١٢ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(١٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م

فإن محيط الدائرة م = ...

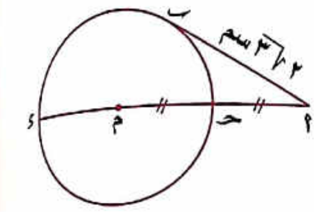


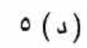
(أ) ٦ π (ب) ٩ π

(جـ) ١٢ π (د) ١٥ π

(٢٠) في الشكل المقابل :

طول نصف قطر الدائرة م = ... سم



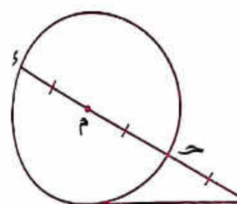


(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢١) في الشكل المقابل :

محيط الدائرة = ... سم

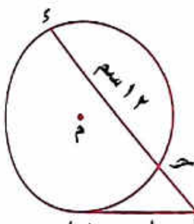


(أ) ٤√٣ π (ب) ٨√٣ π

(جـ) ٨ π (د) ٤ π

(٢٢) في الشكل المقابل :

أ حـ = ... سم



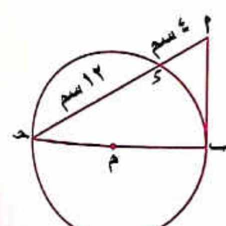
(أ) ١٢ (ب) ٨

(جـ) ٤ (د) ٦

(٢٣) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة م ، أ ء = ٤ سم ، ء حـ = ١٢ سم

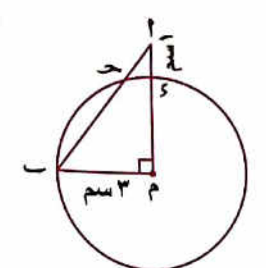
فإن : طول نصف قطر الدائرة م = ... سم



(أ) ٤√٣ (ب) ١٦√٣

(جـ) ٨√٣ (د) ٢٤√٣

(٢٤) فى الشكل المقابل :

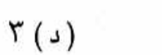


أ م ب مثلث قائم فى م

، نصف قطر الدائرة = ٣ سم ، أ ء = ١ سم

فإن : ب حـ = ...

(أ) ٣,٦ (ب) ١,٤ (جـ) ٥ (د) ٣



(٢٥) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٥

(٢٦) فى الشكل المقابل :

أ ، ب ، ء ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ ، ء ، م ، حـ على استقامة واحدة

، أ ب = ٢٤ سم ، ء حـ = ١٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٧) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى إذا كان ....

(أ) $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{هـ ء}{هـ حـ}$

(ب) $\frac{هـ أ}{أ ب} = \frac{هـ ء}{ء حـ}$

(جـ) أ و × و ء = ب و × و حـ

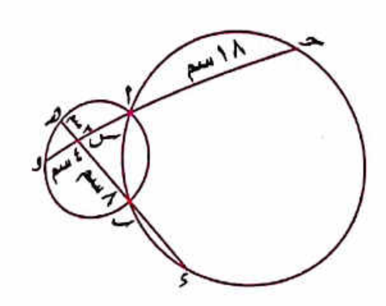
(د) هـ أ × هـ ب = هـ ء × هـ حـ

(٢٨) فى الشكل المقابل :

م (Δ أ ب حـ) = ... سم^2

(أ) ٤٨ (ب) ٤٢

(جـ) ٤٠ (د) ٢٤

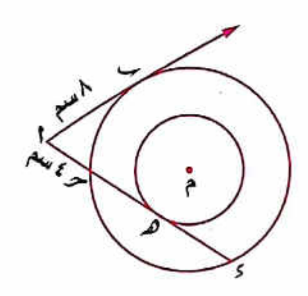


(٢٩) فى الشكل المقابل :

سء = ... سم

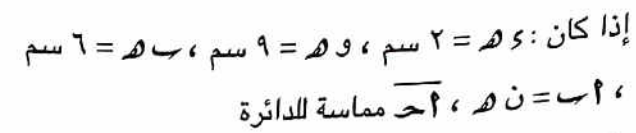
(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢



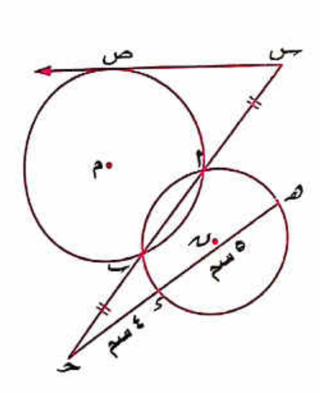
(٣٠) فى الشكل المقابل :


إذا كان : ء هـ = ٢ سم ، و هـ = ٩ سم ، ب هـ = ٦ سم


، أ ب = ن هـ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسة للدائرة

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨



(٣١) فى الشكل المقابل :

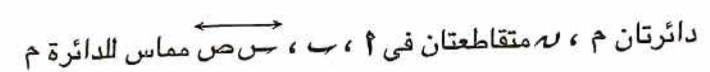
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة الكبرى ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة الصغرى

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣٢) فى الشكل المقابل :

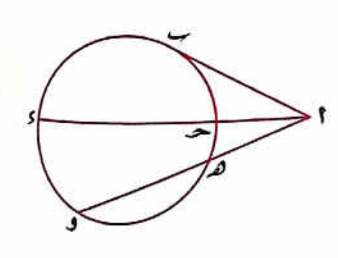

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م

إذا كان : أ س = ب حـ

فإن : س ص = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ٩



(٣٣) فى الشكل المقابل :

كل التعبيرات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) $(\text{أ ب})^2$ = أ حـ × أ ء

(ب) $(\text{أ ب})^2$ = أ هـ × أ و

(جـ) أ هـ × أ و = أ حـ × أ ء

(د) أ حـ × حـ ء = أ هـ × هـ و

(٣٤) من الشكل المقابل :

س = ...

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) $2\sqrt{7}$

(جـ) $3\sqrt{7}$ (د) $4\sqrt{7}$

(٣٥) فى الشكل المقابل :

س + ص = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٨

(جـ) ٢٢ (د) ٣١

(٣٦) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة الكبرى

، $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة الصغرى ، أء = ٤ سم ، ءهـ = ٢,٥ سم

فإن : أب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٧) فى الشكل المقابل :

أب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطعة مماسة للدائرة فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤,٨ (د) ٥

(٣٩) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣

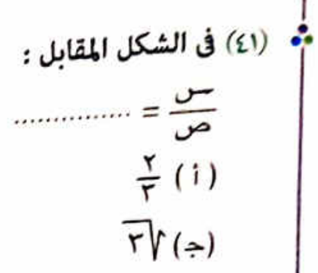
(جـ) ٤,٥ (د) ٥

(٤٠) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣,٢

(جـ) ٥ (د) ٣

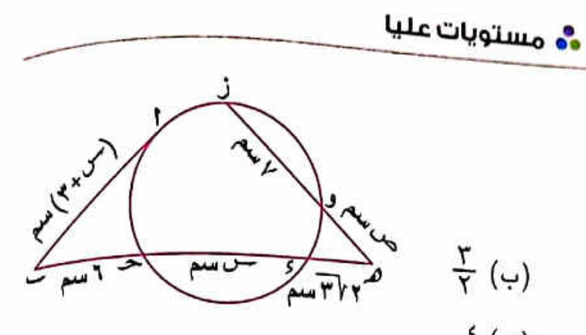


(٤١) في الشكل المقابل :

$\frac{س}{ص} = $ ....

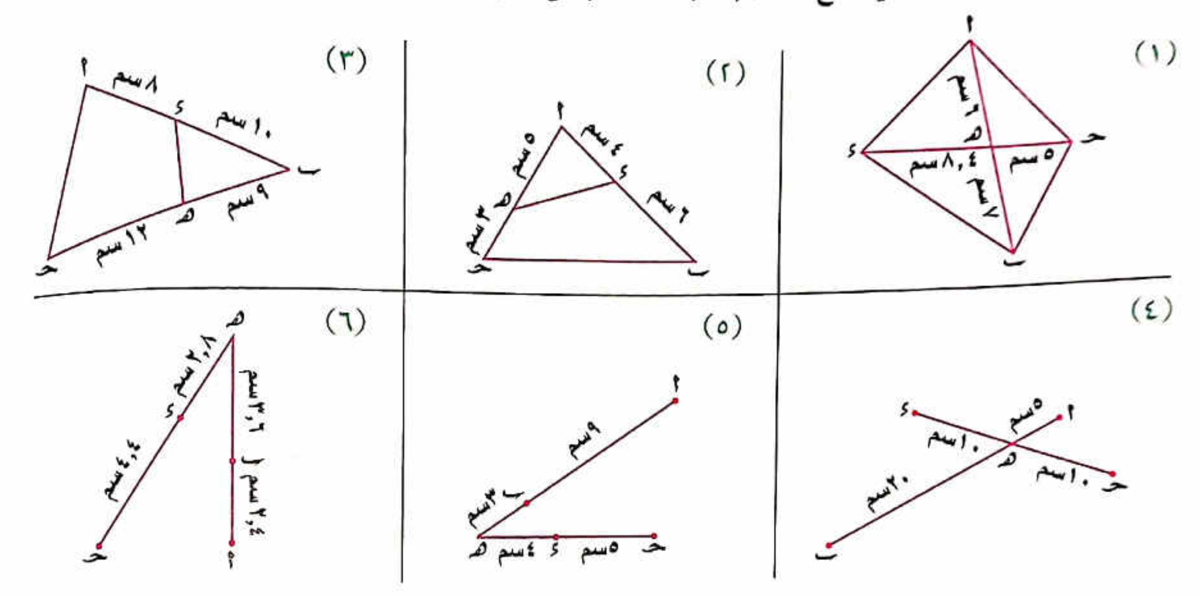
(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٤

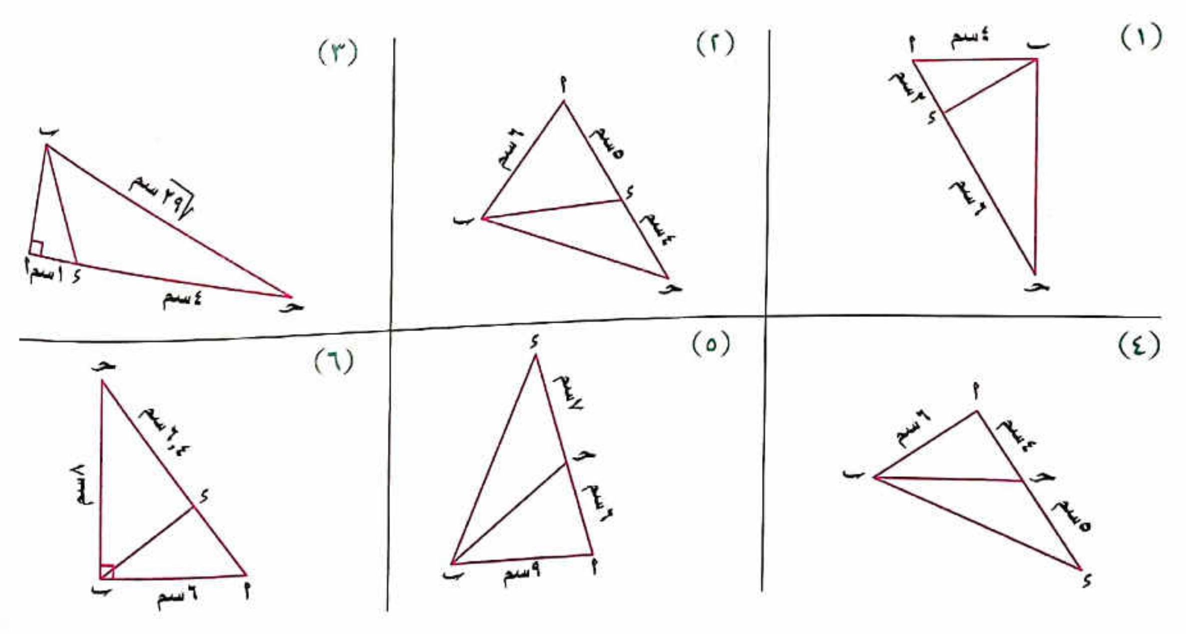


ثانيًا الأسئلة المقالية

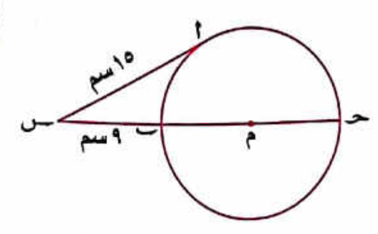
١ في أى من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ؟ فسِّر إجابتك.



٢ في أى من الأشكال التالية أب قطعة مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء :



٣ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{س أ}}$ مماسة للدائرة م عند أ حيث س أ = ١٥ سم

فإذا كان : س ب = ٩ سم

فاحسب : طول نصف قطر الدائرة.

«٨ سم»

٤ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٤ سم ، فرضت نقطة م حيث م و = ٦ سم

ورسم من م قاطع للدائرة قطعها في أ ، ب حيث أ ∈ $\overline{\text{م ب}}$ فإذا كان : م أ = ٣ سم

فأوجد : طول $\overline{\text{أ ب}}$

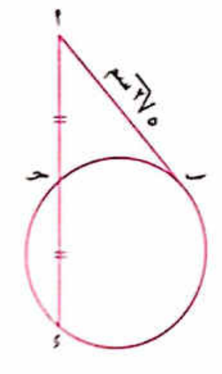
«$3\frac{2}{3}$ سم»

٥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران في دائرة متقاطعان في هـ فإذا كانت أطوال : $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$

هي على الترتيب ٥ سم ، ٦ سم ، ١١,٥ سم **فاحسب :** طول كل من $\overline{\text{هـ حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$

«٧,٥ سم ، ٤ سم»

٦ في الشكل المقابل :



إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة

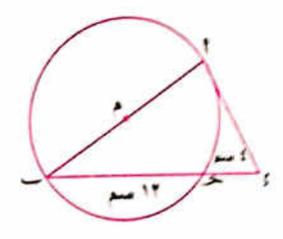
، حـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

، طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ٥ $\sqrt{2}$ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$

«١٠ سم»

٧ في الشكل المقابل :



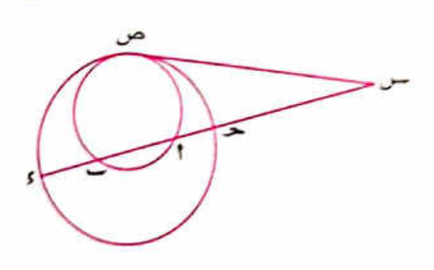
$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

، $\overline{\text{أ ء}}$ مماسة للدائرة عند أ

أوجد : مساحة الدائرة م

«٤٨ π سم²»

٨ في الشكل المقابل :

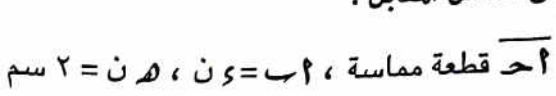


دائرتان متماستان من الداخل في النقطة ص

، $\overleftrightarrow{\text{ص س}}$ مماس مشترك للدائرتين.

أثبت أن : $\frac{\text{س حـ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س أ}}{\text{س ء}}$

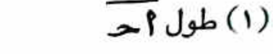
٩ في الشكل المقابل :



$\overline{أحـ}$ قطعة مماسة ، أب = ءن ، هـ ن = ٢ سم

، ن و = ٩ سم ، ن ب = ٦ سم

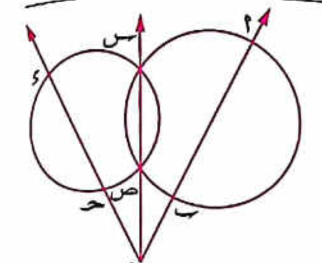
أوجد :



(١) طول $\overline{أحـ}$ «٦ سم ، $\frac{١}{٤}$»

(٢) م (△ أحـ ب) : م (△ أءحـ)

١٠ في الشكل المقابل :



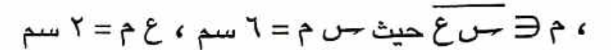
أثبت أن :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء

تمر بها دائرة واحدة.

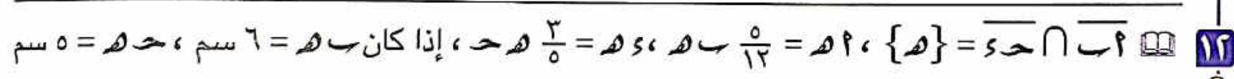
١١ في الشكل المقابل :

ل ∈ $\overline{س ص}$ حيث س ل = ٤ سم ، ص ل = ٨ سم



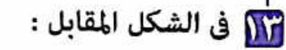
، م ∈ $\overline{س ع}$ حيث س م = ٦ سم ، ع م = ٢ سم

أثبت أن : (١) △ س ل م ~ △ س ع ص (٢) الشكل ل ص ع م رباعي دائري.



١٢ $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ حـ ، إذا كان ب هـ = ٦ سم ، حـ هـ = ٥ سم

أثبت أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.



١٣ في الشكل المقابل :

دائرتان متماستان من الخارج في س

، $\overleftrightarrow{أء}$ يقطع إحدى الدائرتين في أ ، ب ويقطع الأخرى

في حـ ، ء ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س في نقطة ن

أثبت أن : $\frac{ن ب}{ن حـ} = \frac{ن ء}{ن أ}$



١٤ دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ ، رسم من حـ القطعتان

$\overline{حـ س}$ ، $\overline{حـ ص}$ مماستين للدائرتين عند س ، ص **أثبت أن :** حـ س = حـ ص

١٥ في الشكل المقابل :

الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ

، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عند حـ

، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ يقطع الدائرتين عند و ، ء على الترتيب حيث أ و = ٤ سم ، و هـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

أثبت أن : ب منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

١٦ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ارتفاعان فيه متقاطعان في و

أثبت أن : $\frac{\text{أ هـ} \times \text{أ حـ}}{\text{ب و} \times \text{و هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{و ء}}$

١٧ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٨ سم ، م نقطة بحيث م و = ١٢ سم ، رسم من م قاطع للدائرة يقطعها في أ ، ب حيث أ $\in$ $\overline{\text{م ب}}$ فإذا كان أ ب = ١١ سم

فأوجد : (١) طول $\overline{\text{م أ}}$

(٢) طول القطعة المماسة للدائرة من م «٥ سم ، ٤ $\sqrt{٥}$ سم»

١٨ أ ب حـ مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث ء ب = ٥ سم ، ء حـ = ٤ سم

إذا كان : أ حـ = ٦ سم

أثبت أن : (١) $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، ء

(٢) Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

(٣) م (Δ أ ب ء) : م (Δ أ ب حـ) = ٥ : ٩

١٩ دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{أ ء}}$ في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، حـ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب × ب ء = ٩٥

٢٠ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ حـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ في و

(١) **أثبت أن :** $(\text{أ ب})^2$ = أ و × أ ء (٢) **أوجد :** طول $\overline{\text{أ و}}$ «٤,٥ سم»

٢١ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه في حـ ويقطع الدائرة في ء

فإذا كان : حـ ء = ٢ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة. «٥ سم»

٢٢ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، حـ ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{حـ س}$ ⊥ $\overline{أب}$ فقطع الدائرة فى سـ ، رسم $\overline{ءهـ}$ وترًا فى الدائرة مارًا بالنقطة حـ أثبت أن : (سـ حـ)^{٢} = ء حـ × حـ هـ

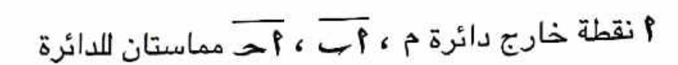
---

٢٣ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، $\overline{حـ ء}$ وتر فيها عمودى على $\overline{أب}$ قطعه فى ن ، رسم الوتران $\overline{أهـ}$ ، $\overline{أو}$ فى جهتين مختلفتين من $\overline{أب}$ فقطعا $\overline{حـ ء}$ فى سـ ، ص على الترتيب.

أثبت أن : أ سـ × أ هـ = أ ص × أ و

---

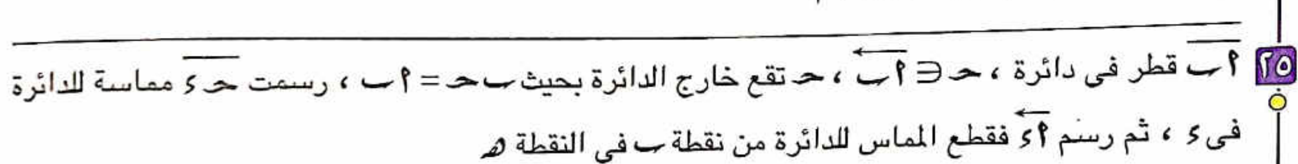
٢٤ فى الشكل المقابل :



أ نقطة خارج دائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماستان للدائرة

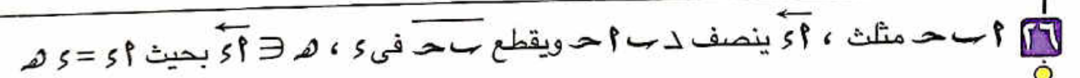
، $\overline{أص}$ قاطعة لها فى سـ ، ص ، $\overline{ب حـ}$ ∩ $\overline{أم}$ = {ء}

أثبت أن : أ سـ × أ ص = أ ء × أ م



٢٥ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ تقع خارج الدائرة بحيث ب حـ = أ ب ، رسمت $\overline{حـ ء}$ مماسة للدائرة فى ء ، ثم رسم $\overrightarrow{أء}$ فقطع المماس للدائرة من نقطة ب فى النقطة هـ

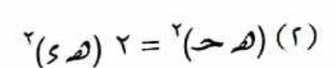
أثبت أن : (حـ ء)^{٢} = ٢ أ ء × أ هـ



٢٦ أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء ، هـ ∈ $\overrightarrow{أء}$ بحيث أ ء = ء هـ

فإذا كان : (أ ء)^{٢} = ء ب × ء حـ

فأثبت أن : (١) Δ هـ حـ ء ~ Δ هـ أ حـ



(٢) (هـ حـ)^{٢} = ٢ (هـ ء)^{٢}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

نصف دائرة م

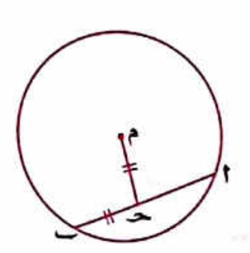
، م هـ = هـ ء ، هـ حـ = ٣ سم

، أ هـ = ٨ سم

فإن : م هـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{٨}{٣}$

(٢) فى الشكل المقابل :



دائرة م طول قطرها ١٢ سم

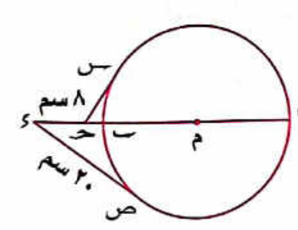
، م حـ = حـ ب

فإذا كان : أ حـ = (ب حـ + ١) سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان أ ب قطراً فى دائرة م

، ء س ، ء ص قطعتين

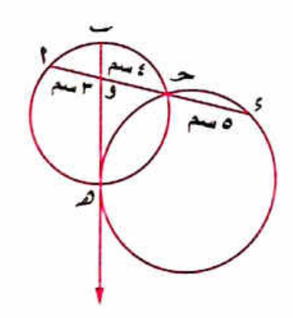
مماستين للدائرة م

، أ ب = ٣٠ سم ، حـ س = ٨ سم ، ء ص = ٢٠ سم

فإن : ء حـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤) فى الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان فى حـ ، هـ

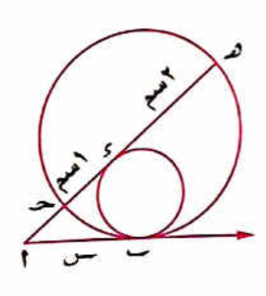
، ب هـ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

إذا كان : أ و = ٣ سم ، و حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(٥) فى الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل فى ب

، أ ب ، أ ء مماسان للدائرة

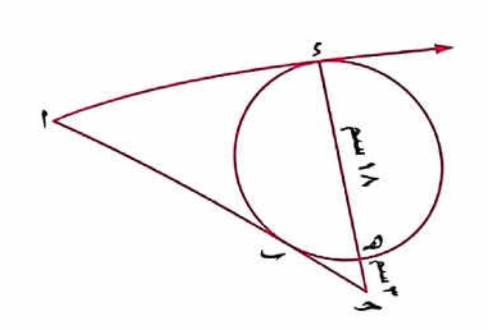
الصغرى عند ب ، ء

إذا كان : حـ ء = ١ سم ، ء هـ = ٢ سم ، أ ب = س سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢,٥ (د) ٣,٥

(٦) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماسان لدائرة عند ء ، ب

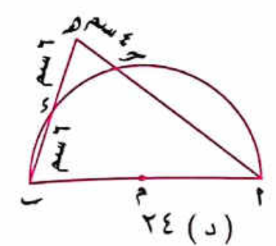
على الترتيب ، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ يقطع الدائرة فى هـ ، ء

إذا كان : حـ هـ = ٣ سم ، هـ ء = ١٨ سم

فإن : (أ حـ − أ ء) = ... سم

(أ) $\sqrt{7}$ (ب) $٢\sqrt{7}$ (جـ) $٣\sqrt{7}$ (د) $٦\sqrt{7}$

(٧) فى الشكل المقابل :

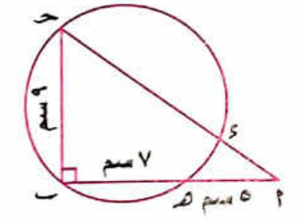


$\overline{أ ب}$ قطر فى نصف الدائرة م

فإن : نق = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٨) فى الشكل المقابل :

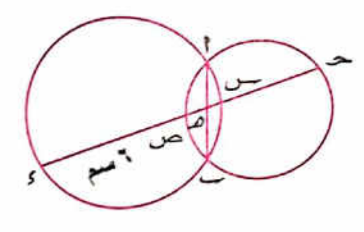


ء حـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ء ص = ٦ سم

وكان : $\frac{س هـ}{هـ ص} = \frac{٢}{٣}$

فإن : حـ س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٠) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة م ، هـ $\in$ $\overrightarrow{ب أ}$

لإيجاد طول نصف قطر الدائرة

يكون كافيًا الحصول على ....

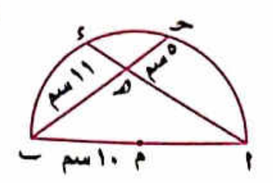
(أ) محيط Δ هـ ب حـ = ٢٦ سم فقط.

(ب) محيط Δ هـ م حـ = ٢٠ سم فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(١١) فى الشكل المقابل :

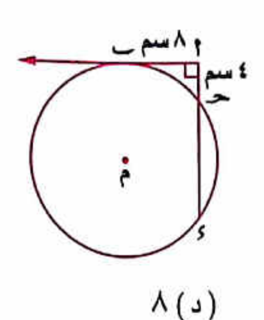


نصف دائرة م طول نصف قطر دائرته = ١٠ سم

فإن : هـ ء = ... سم

(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(١٢) فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

، أب = ٨ سم ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ قاطع للدائرة م عند حـ ، ء

فإن : طول نصف قطر الدائرة م يساوى .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

---

٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦٠ مم ، أ حـ = ٤٠ مم ، ب حـ = ٤٥ مم ، أخذت نقطة ء ∈ $\overline{أب}$

بحيث : أ ء = ١٦ مم ، هـ ∈ $\overline{أحـ}$ بحيث أ هـ = ٢٤ مم

(١) أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب واحسب : طول $\overline{ءهـ}$

(٢) إذا كان : $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = {ن} فأثبت أن : Δ ء ن ب ~ Δ حـ ن هـ

واحسب : طول كل من $\overline{هـ ن}$ ، $\overline{ن حـ}$

«١٨ مم ، ٢١,٦ مم ، ١٤,٤ مم»

تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة

من أسئلة الكتاب المدرسى

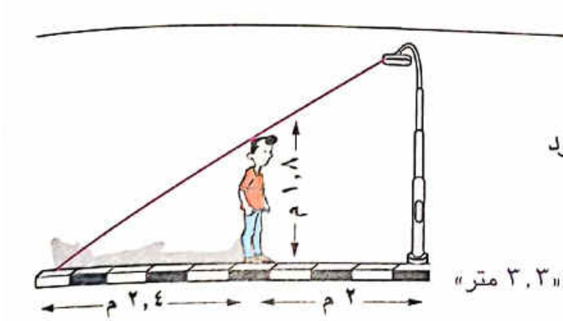
١ يوضح الشكل المقابل مخططًا لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد :

(١) أبعاد حجرة الاستقبال.

(٢) أبعاد حجرة النوم.

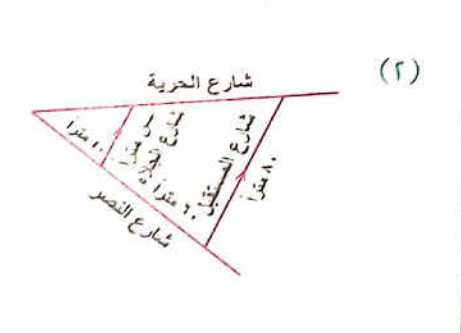
(٣) مساحة حجرة المعيشة.

(٤) مساحة الوحدة السكنية.



٢ رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود إنارة وعلى بُعد ٢ متر من قاعدته فإذا وُجد أن طول ظل الرجل الناتج عن إنارة العمود هو ٢,٤ متر

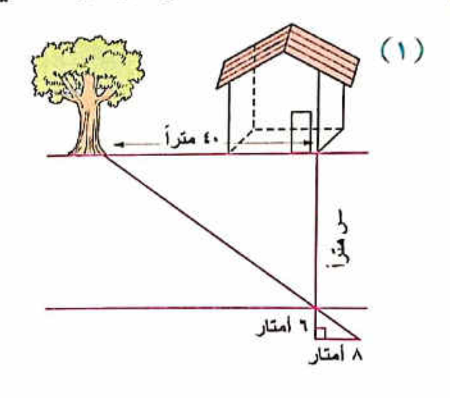
فأوجد ارتفاع العمود.



«٣,٣ متر»

٣ أوجد المسافة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١)



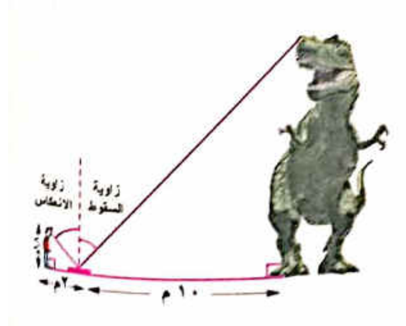
«٣٠ مترًا»

(٢)

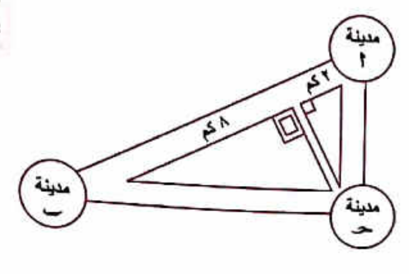
«٣٢ مترًا»

٤ أراد رجل معرفة طول ديناصور فى أحد المتاحف ، فوضع مرآة فى وضع أفقى على الأرض على بُعد ١٠ أمتار من قدم الديناصور ورجع إلى الخلف حتى استطاع مشاهدة رأس الديناصور فى المرآة فكانت المسافة التى رجعها للخلف ٢ متر فإذا كان طول الرجل ١,٨ متر وإذا علمت أن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

فما ارتفاع الديناصور ؟



«٩ أمتار»

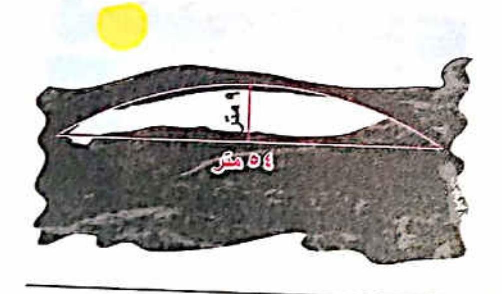


٥ يبيِّن المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبي يؤدى إلى المدينة حـ عموديًا على الطريق السريع بين المدينتين أ ، ب علمًا بأن الطريق الواصل بين المدينتين أ ، حـ عمودى على الطريق الواصل بين المدينتين ب ، حـ

(١) كم ينبغى أن تبعد المحطة عن المدينة حـ ؟

(٢) ما البعد بين المدينتين ب ، حـ ؟

«٤ كم ، ٤ $\sqrt{5}$ كم»

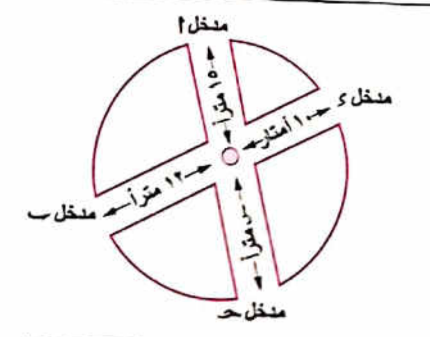


٦ وجد أحد مهندسى الآثار قطعة خشبية أثرية عبارة عن جزء من قرص خشبى دائرى. أراد هذا المهندس معرفة طول نصف قطر هذا القرص فعين النقطتين أ ، ب على القرص

فوجد أن طول $\overline{أب}$ = ١٠ سم

ثم رسم من النقطة حـ منتصف $\overline{أب}$ القطعة المستقيمة $\overline{ءحـ}$ بحيث $\overline{ءحـ} \perp \overline{أب}$ فوجد أن : ءحـ = ٢,٥ سم واستطاع بذلك هندسيًا إيجاد طول نصف القطر. ترى كيف استطاع ذلك ؟!

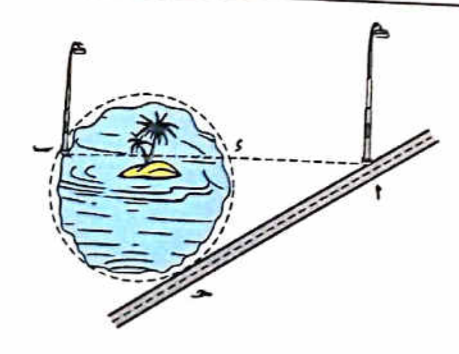
«٦,٢٥ سم»



٧ فى إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعى. وجد الچيولوچيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل المقابل.

أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.

«٤٥ م»



٨ يبيِّن الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عن المدخل حـ

«٨ أمتار»

٩ فى الشكل المقابل :

طريق يمس بحيرة دائرية الشكل ، ويريد أحد مهندسى شركة كهرباء وضع عمودين إنارة أحدهما على الطريق والآخر على الجهة الأخرى من البحيرة ويصل بينهما بسلك كهرباء.

فكيف يمكنك إيجاد طول هذا السلك ؟!


الوحدة الرابعة
نظريات التناسب
فى المثلث

دروس الوحدة

نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة» وعكسها ، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة وحالات خاصة منها.
- يحل تطبيقات وتمارين على نظرية تاليس العامة ونظرية تاليس الخاصة.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين» وعكسها.
- يوجد طول كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.
- يتعرف حقيقة أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.

تمهيد ..

قبل البدء فى دراسة الوحدة الرابعة (نظريات التناسب فى المثلث) من المفيد والضرورى أن نستعرض مفهوم التناسب وبعض خواصه التى سوف نستخدمها أثناء دراستنا لهذه الوحدة :

- **يقال ان** ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة إذا كان :

$\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ...$

- **يقال ان** ا ، ب ، حـ ، ء ، ... فى تناسب متسلسل إذا كان :

$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = ...$

وفى هذه الحالة يسمى ب الوسط المتناسب للعددين ا ، حـ حيث $ب^{٢} = ا حـ$

كما يسمى حـ الوسط المتناسب للعددين ب ، ء حيث $حـ^{٢} = ب ء$ وهكذا ...

- **إذا كان** $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ حيث كل من ا ، حـ يسمى مقدم النسبة وكل من ب ، ء يسمى تالى النسبة فإن :

١ $ا \times ء = ب \times حـ$

٢ $\frac{ب}{ا} = \frac{ء}{حـ}$ (مقلوبات النسبة تكون متساوية)

٣ $\frac{ا}{حـ} = \frac{ب}{ء}$ $\left(\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}\right)$

٤ $\frac{ا + ب}{ب} = \frac{حـ + ء}{ء}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}} \text{ للنسبة الأولى} = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}} \text{ للنسبة الثانية}\right)$

٥ $\frac{ا + ب}{ا} = \frac{حـ + ء}{حـ}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}} \text{ للنسبة الأولى} = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}} \text{ للنسبة الثانية}\right)$

- **إذا كان** $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن :

١ $\frac{ا + حـ + هـ + ...}{ب + ء + و + ...} =$ إحدى النسب $\left(\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}\right)$

٢ $\frac{ا ك + حـ م + هـ ن + ...}{ب ك + ء م + و ن + ...} =$ إحدى النسب

حيث ك ، م ، ن ، ... أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

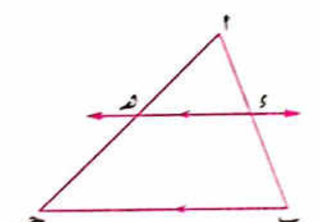


المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة



نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



المعطيات أ ب جـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

البرهان $\because \overleftrightarrow{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \triangle$ أ ب جـ $\sim \triangle$ أ د هـ (مسلمة التشابه)

ويكون : $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$ (١)

، $\because$ د $\in \overline{\text{أ ب}}$ ، هـ $\in \overline{\text{أ جـ}}$

$\therefore$ أ ب = أ د + د ب ، أ جـ = أ هـ + هـ جـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ د} + \text{د ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ} + \text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

ويكون : $\frac{\text{أ د}}{\text{أ د}} + \frac{\text{د ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ}} + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

$\therefore 1 + \frac{\text{د ب}}{\text{أ د}} = 1 + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

$\therefore \frac{\text{د ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{أ هـ}}$

ومن خواص التناسب نجد أن : $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ (وهو المطلوب)

ملاحظة

من الشكل السابق :

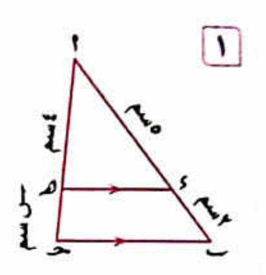
$\because \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ حـ}$ (نظرية)

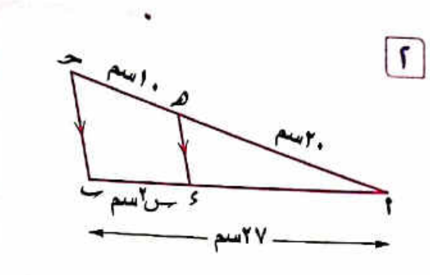
$\therefore \frac{أ ء + ء ب}{ء ب} = \frac{أ هـ + هـ حـ}{هـ حـ}$ (راجع خواص التناسب)

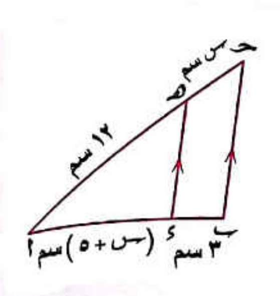
$\therefore \frac{أ ب}{ء ب} = \frac{أ حـ}{هـ حـ}$

مثال 1

فى كل من الأشكال الآتية : $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$ أوجد قيمة س :







الحل

1 $\because \overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$ $\therefore \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ حـ}$ $\therefore \frac{٥}{٢} = \frac{٤}{س}$ $\therefore س = ١,٦$

2 $\because \overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$ $\therefore \frac{أ ب}{ء ب} = \frac{أ حـ}{هـ حـ}$ $\therefore \frac{٢٧}{س^٢} = \frac{٣٠}{١٠}$ $\therefore س^٢ = ٩$

$\therefore س = \pm ٣$

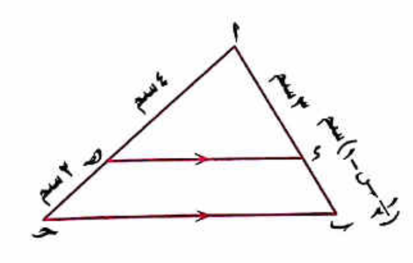
3 $\because \overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$ $\therefore \frac{أ هـ}{هـ حـ} = \frac{أ ء}{ء ب}$ $\therefore \frac{١٢}{س} = \frac{س + ٥}{٣}$

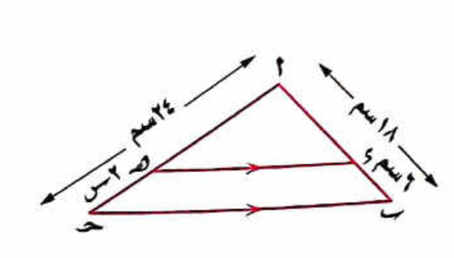
$\therefore س^٢ + ٥ س = ٣٦$ $\therefore س^٢ + ٥ س - ٣٦ = ٠$

$\therefore (س + ٩)(س - ٤) = ٠$ $\therefore س = -٩$ (مرفوض) أ، $س = ٤$

حاول بنفسك

فى كل من الشكلين الآتيين : $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$ أوجد قيمة س العددية :



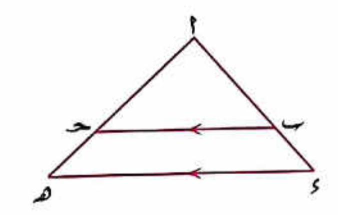


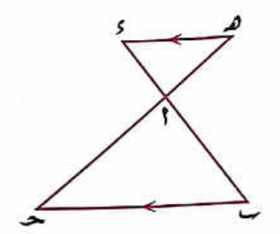
نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب حـ يوازى ضلعًا من أضلاعه ، وليكن $\overline{ب حـ}$ ، ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ فى ء ، هـ على الترتيب فإن : $\frac{أ ب}{ب ء} = \frac{أ حـ}{حـ هـ}$ (كما فى الشكل)

• بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن :

$\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ حـ}$ ، $\frac{أ ء}{ب ء} = \frac{أ هـ}{حـ هـ}$





مثال ٢

فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ء} // \overline{ب هـ} // \overline{و حـ}$

، $\overline{أ حـ} \cap \overline{ء و} = \{ى\}$ ، ء هـ = ٧ سم

، هـ ى = ٣ سم ، ى حـ = ٦ سم ، أ ى = ١٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ى و}$ ، $\overline{ى ب}$

الحل

∵ $\overline{أ ء} // \overline{و حـ}$ ∴ $\frac{أ ى}{ى حـ} = \frac{ء ى}{ى و}$

∴ $\frac{١٦}{٦} = \frac{١٠}{ى و}$ ∴ ى و $= \frac{٦ \times ١٠}{١٦} = ٣,٧٥$ سم

، ∵ $\overline{ب هـ} // \overline{أ ء}$ ∴ $\frac{ى ب}{ى أ} = \frac{ى هـ}{ى ء}$

∴ $\frac{ى ب}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$ ∴ ى ب $= \frac{٣ \times ١٦}{١٠} = ٤,٨$ سم (وهو المطلوب)

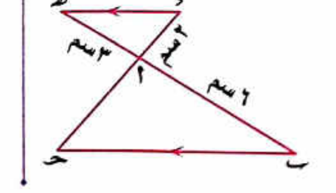
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

$\overline{ء هـ} // \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء حـ} \cap \overline{ب هـ} = \{أ\}$ ، أ هـ = ٣ سم

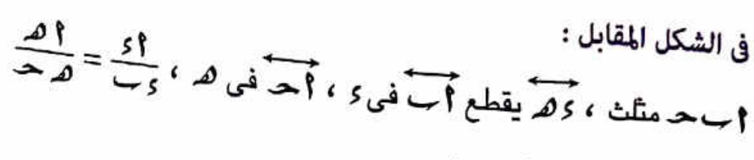
، أ ب = ٦ سم ، أ ء = ٢ سم

أوجد : طول $\overline{أ حـ}$



عكس نظرية ١

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فى ء ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$

فإن : $\frac{\text{أ ء} + \text{ء ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ} + \text{هـ حـ}}{\text{أ هـ}}$

(**لأن** $\frac{\text{مقدم} + \text{تالى}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالى}}{\text{مقدم}}$)

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ هـ}}$ ، $\because$ ∠ أ مشتركة

$\therefore \Delta\,\text{أ ب حـ} \sim \Delta\,\text{أ ء هـ}$ $\therefore$ ∠ ب ≡ ∠ أ ء هـ وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

ملاحظة

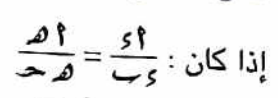
إذا رسم مستقيم (وليكن $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$) خارج مثلث أ ب حـ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ فى ء ، هـ على الترتيب

وكان $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$ فإن : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب حـ}}$

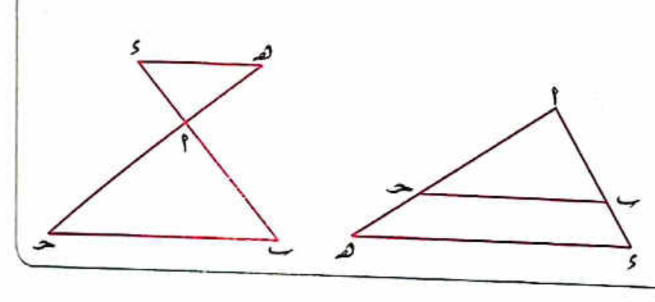
ففى الشكل المقابل :



إذا كان : $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$



فإن : $\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب حـ}}$



مثال ٣

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب و}}$ ، أ ء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب

، أ هـ = ٤,٥ سم ، و حـ = ١٤ سم **فأثبت أن :** $\overline{\text{ء و}} \,//\, \overline{\text{ب حـ}}$





الحل

$\because$ أ ء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٤}$

، $\because \overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب و}}$ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}}$

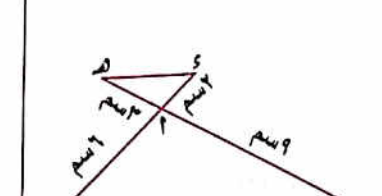
$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٥}{\text{هـ و}}$ $\therefore$ هـ و = $\frac{٤,٥ \times ٤}{٣}$ = ٦ سم

∴ أ و = ٤,٥ + ٦ = ١٠,٥ سم ∴ $\frac{أو}{وحـ} = \frac{١٠,٥}{١٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{أو}{وحـ} = \frac{أ ء}{ء ب}$ ∴ ء و // ب حـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

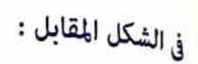


ء حـ ∩ ب هـ = {أ} ، أ ء = ٢ سم ، أ هـ = ٣ سم

، أ ب = ٩ سم ، أ حـ = ٦ سم

حدد ما إذا كان : ء هـ // ب حـ ولماذا ؟

مثال ٤



في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعي ، ص ∈ ب ء

، رسم ص س // ء أ فقطع أ ب في س

، ورسم ص ع // ء حـ فقطع ب حـ في ع

أثبت أن : س ع // أ حـ

الحـل

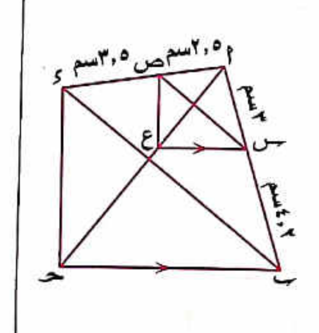
في Δ أ ب ء : ∵ س ص // أ ء ∴ $\frac{ب س}{ب أ} = \frac{ب ص}{ب ء}$ (١)

، في Δ ب حـ ء : ∵ ص ع // حـ ء ∴ $\frac{ب ع}{ب حـ} = \frac{ب ص}{ب ء}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ب س}{ب أ} = \frac{ب ع}{ب حـ}$ ∴ في Δ أ ب حـ : س ع // أ حـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي ، رسم قطراه أ حـ ، ب ء

، س ∈ أ ب حيث : أ س = ٣ سم ، س ب = ٤,٢ سم

، ص ∈ أ ء حيث : أ ص = ٢,٥ سم ، ص ء = ٣,٥ سم

، رسم س ع // ب حـ ويقطع أ حـ في ع

أثبت أن : [١] س ص // ب ء [٢] ص ع // حـ ء



على المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

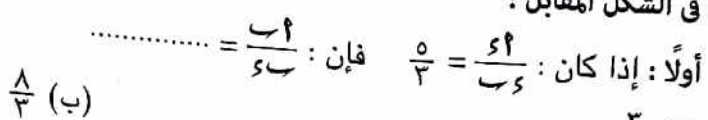


📖 من أسئلة الكتاب المدرس • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



أولًا : إذا كان : $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٥}{٣}$ فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = $ ....

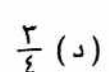
(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

ثانيًا : إذا كان : $\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٧}$ فإن : $\frac{\text{جـهـ}}{\text{هـأ}} = $ ....

(أ) $\frac{٧}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

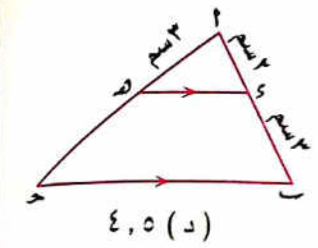
ثالثًا : إذا كان : $\frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = $ ....

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) ١,٥ (جـ) $\frac{٢}{٣}$



(د) $\frac{٣}{٤}$

(٢) فى الشكل المقابل :

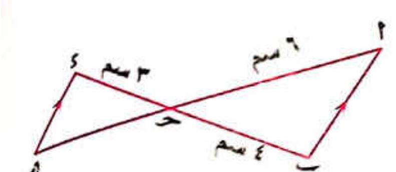


إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}} // \overline{\text{بجـ}}$ ، أء = ٢ سم ، أهـ = ءب = ٣ سم

فإن : طول $\overline{\text{هـجـ}} = $ .... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٤,٥

(٣) 📖 فى الشكل المقابل :

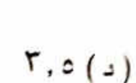


$\overleftrightarrow{\text{أب}} // \overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{بء}} = \{\text{جـ}\}$

، أجـ = ٦ سم ، بجـ = ٤ سم ، جـء = ٣ سم

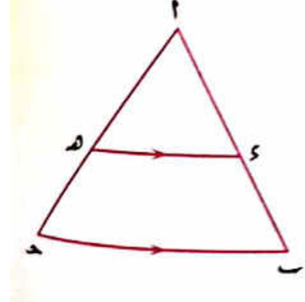
فإن : طول $\overline{\text{جـهـ}} = $ .... سم

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٤,٥



(د) ٣,٥

(٤) فى الشكل المقابل :



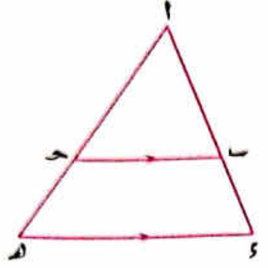
جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ما عدا التعبير ....

(أ) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (ب) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ‾بجـ // ‾دهـ فإن ....

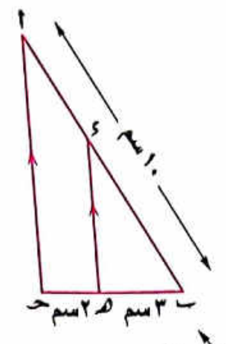
(أ) الشكل د ب جـ هـ رباعى دائرى.

(ب) Δ أ ب جـ ~ Δ أ د هـ

(جـ) أ ب × أ د = أ جـ × أ هـ

(د) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{د هـ}}$

(٦) فى الشكل المقابل :



‾دهـ // ‾أجـ ، ب هـ = ٣ سم ، هـ جـ = ٢ سم

فإن : أ د = ... سم

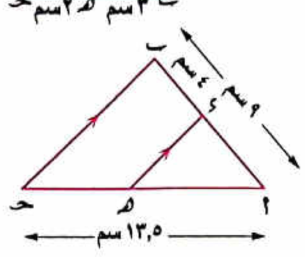
(أ) ٦

(ب) ٤

(جـ) ٥

(د) ٧

(٧) فى الشكل المقابل :



‾دهـ // ‾بجـ فإن : أ هـ = ...

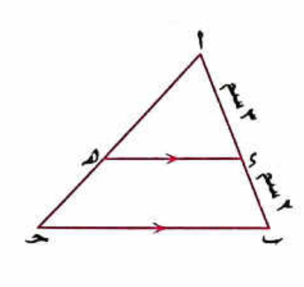
(أ) ٤ سم

(ب) ٥ سم

(جـ) ٦ سم

(د) ٧,٥ سم

(٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ‾دهـ // ‾بجـ

فإن : $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ د هـ})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})}$ = ...

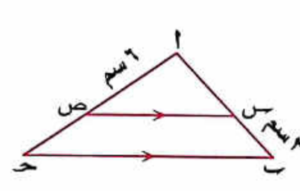
(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) $\frac{٩}{٤}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$

(د) $\frac{٣}{٥}$

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ‾س ص // ‾بجـ ، $\frac{\text{أ س + أ ص}}{\text{أ ب + أ جـ}} = \frac{٣}{٥}$

فإن : أ س = ... سم

(أ) ٣

(ب) ٦

(جـ) ٤,٥

(د) ٤

(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ‾دهـ // ‾بجـ

فإن : س = ...

(أ) ٤

(ب) ٩

(جـ) ١٢

(د) ٣

(١١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(١٢) في الشكل المقابل :

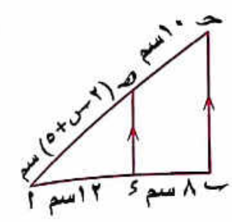
إذا كان : $\overline{أب} // \overline{حـء}$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤,٥ (د) ٦

(١٣) 📖 في الشكل المقابل :



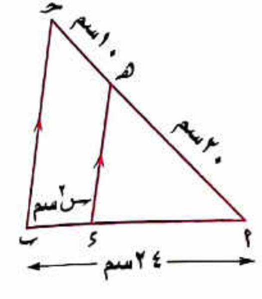
إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ...

(أ) ١٢ (ب) ٧

(جـ) ٥ (د) ٤

(١٤) 📖 في الشكل المقابل :



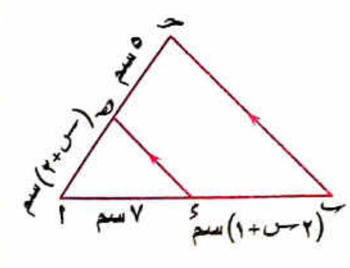
Δ أبحـ فيه : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ...

(أ) ٢$\sqrt{٢}$ (ب) ± ٣

(جـ) ٤ (د) ± ٢$\sqrt{٢}$

(١٥) 📖 في الشكل المقابل :



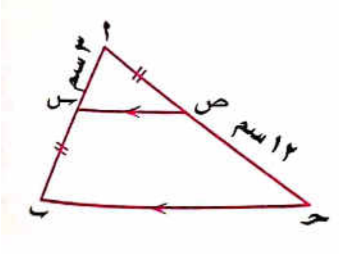
Δ أبحـ فيه : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ...

(أ) -٥,٥ أ، ٣ (ب) -٥,٥

(جـ) ٣ (د) ٢,٥

(١٦) في الشكل المقابل :

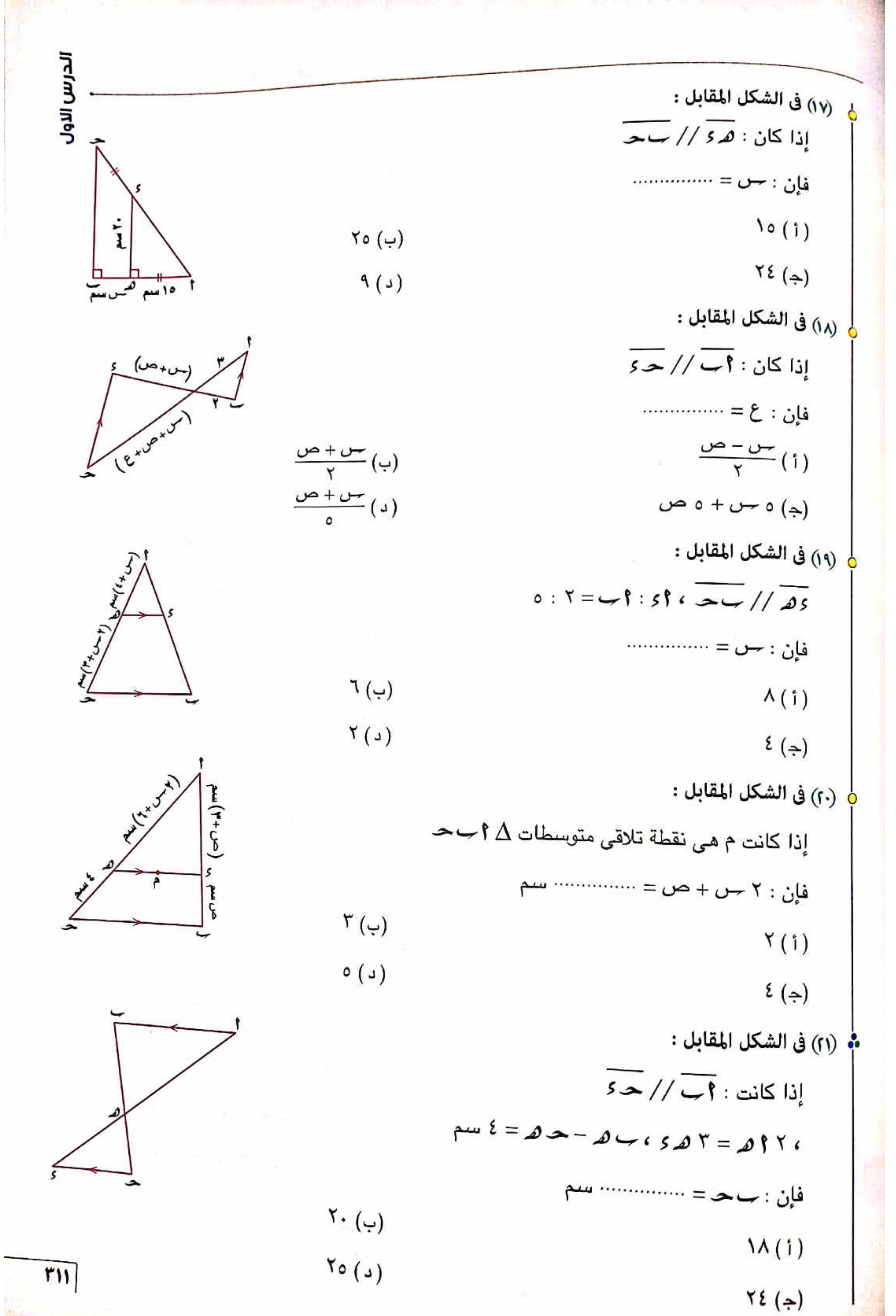


إذا كان : $\overline{سص} // \overline{بحـ}$

فإن : أحـ = ... سم

(أ) ١٥ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠



(١٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ‾هـ ء‾ // ‾ب حـ‾

فإن : س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٥

(جـ) ٢٤ (د) ٩

(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ‾أ ب‾ // ‾حـ ء‾

فإن : ع = ...

(أ) $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$ (ب) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$

(جـ) ٥ س + ٥ ص (د) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥}$

(١٩) فى الشكل المقابل :

‾ء هـ‾ // ‾ب حـ‾ ، أ ء : أ ب = ٢ : ٥

فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٢

(٢٠) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م هى نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

فإن : ٢ س + ص = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ‾أ ب‾ // ‾حـ ء‾

، ٢ أ هـ = ٣ ء هـ ، ب هـ − حـ هـ = ٤ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٢٥

(٢٢) في الشكل المقابل :

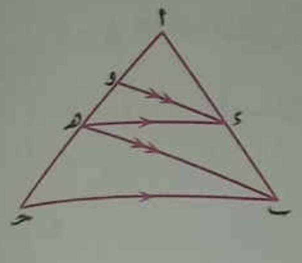
أء // ب هـ // و جـ

فإن : ى و = ... سم

(أ) ٣,٦ (ب) ٤,٨ (جـ) ٦,٣ (د) ٣,٧٥



(٢٣) في الشكل المقابل :



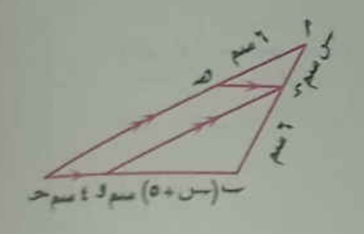
إذا كانت : ء و // ب هـ ، ء هـ // ب جـ

فإن : أ و × أ جـ = ...

(أ) أ هـ (ب) $(\text{أ هـ})^2$

(جـ) $(\text{ء هـ})^2$ (د) و هـ × هـ جـ

(٢٤) في الشكل المقابل :



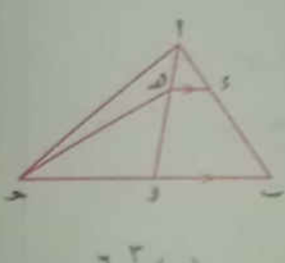
إذا كان : ء هـ // ب جـ ، ء و // أ جـ

فإن : طول هـ جـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٨

(جـ) ٦ (د) ٩

(٢٥) في الشكل المقابل :



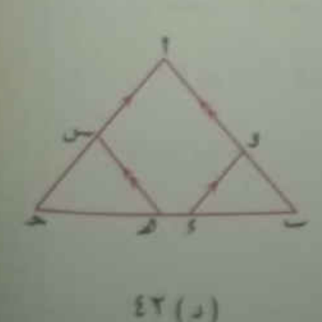
هـ ء // و ب ، م (△ أ هـ جـ) = ٩ سم^2

، م (△ جـ و هـ) = ١٦ سم^2 ، أ ب = ١٥ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٩,٦ (ب) ٥,٤ (جـ) $8\frac{4}{7}$ (د) $6\frac{3}{7}$

(٢٦) في الشكل المقابل :



إذا كان : و ء // أ جـ ، س هـ // أ ب

، ب ء : ء هـ : هـ جـ = ٤ : ٢ : ٥

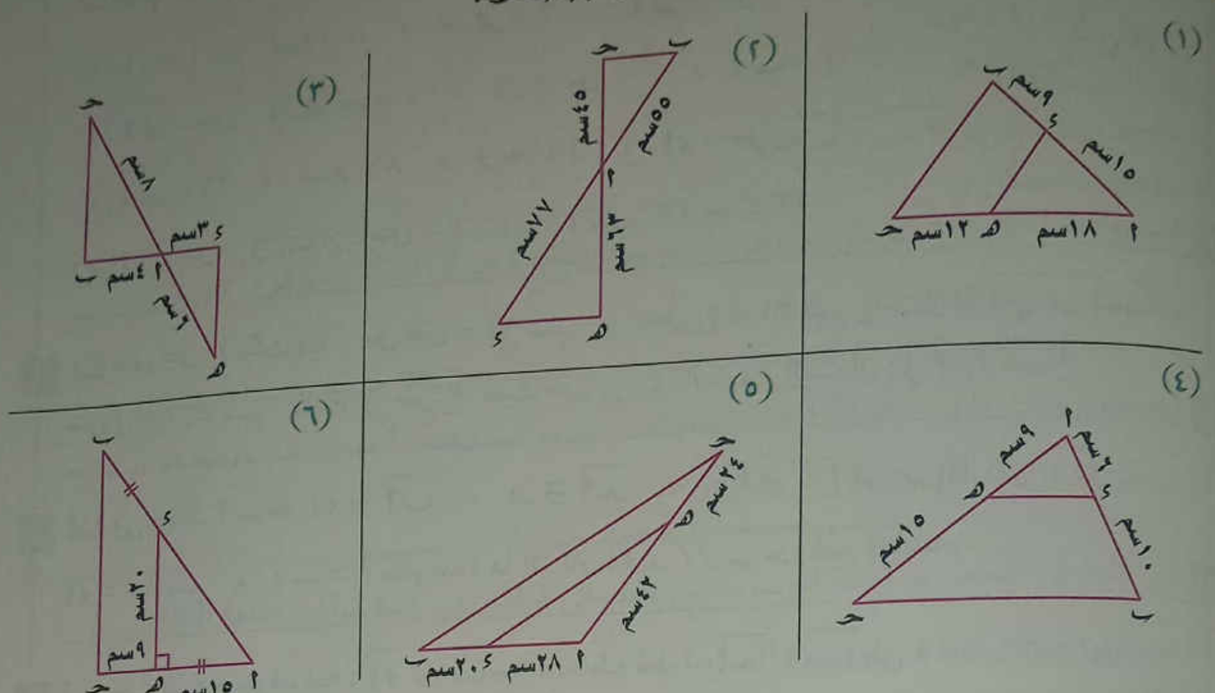
، أ ب = أ جـ = ٣٣ سم

فإن : أ و + أ س = ... سم

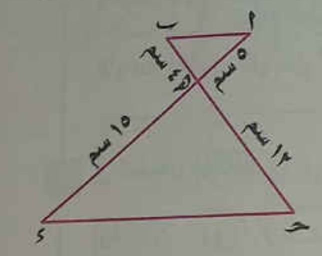
(أ) ٢١ (ب) ٣٣ (جـ) ٣٩ (د) ٤٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في كل من الأشكال التالية ، حدد ما إذا كان $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$:



٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أ ء} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ ، أ هـ = ٥ سم

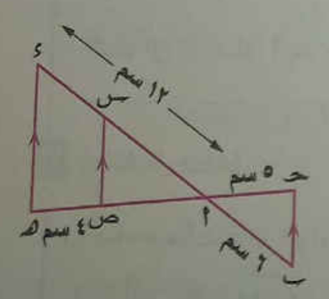
، ب هـ = ٤ سم ، حـ هـ = ١٢ سم ، ء هـ = ١٥ سم

أثبت أن : $\overline{أ ب} \parallel \overline{حـ ء}$

٣ $\overleftrightarrow{س ص} \cap \overleftrightarrow{ع ل} = \{م\}$ ، حيث $\overline{س ع} \parallel \overline{ل ص}$ ، فإذا كان : س م = ٩ سم

، ص م = ١٥ سم ، ع ل = ٣٦ سم أوجد : طول $\overline{ع م}$ «١٣,٥ سم»

٤ في الشكل المقابل :



$\overline{حـ هـ} \cap \overline{ب ء} = \{أ\}$ ، س ∈ $\overline{أ ء}$ ، ص ∈ $\overline{أ هـ}$

حيث $\overline{س ص} \parallel \overline{ب حـ} \parallel \overline{هـ ء}$

فإذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٥ سم

، أ ء = ١٢ سم ، هـ ص = ٤ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ء س}$ «١٠ سم ، ٤,٨ سم»

٥ لكل مما يأتى :

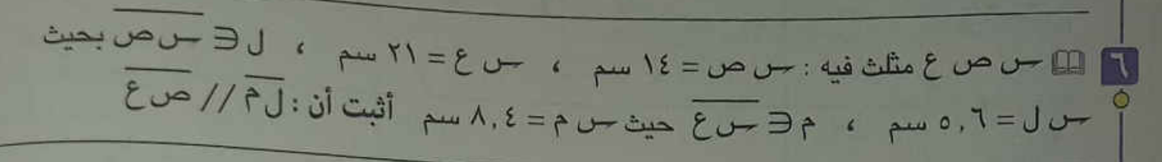
استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س (الأطوال بالسنتيمترات) :


(١) أ ء = ٤ ، ب ء = ٨ ، حـ هـ = ٦ ، أ هـ = س

(٢) أ هـ = س ، هـ حـ = ٥ ، أ ء = س − ٢ ، ء ب = ٣

(٣) أ ب = ٢١ ، ب و = ٨ ، و حـ = ٦ ، أ ء = س

(٤) أ ء = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ ء ب = ٣ و حـ = ١٢


٦ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١٤ سم ، س ع = ٢١ سم ، ل ∈ س ص بحيث س ل = ٥,٦ سم ، م ∈ س ع حيث س م = ٨,٤ سم أثبت أن : ل م // ص ع

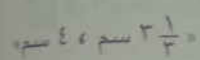
٧ فى المثلث أ ب حـ ، ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ حـ ، ٥ أ هـ = ٤ هـ حـ إذا كان :

أ ء = ١٠ سم ، ء ب = ٨ سم حدد ما إذا كان : ء هـ // ب حـ فسِّر إجابتك.

٨ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، تقاطع قطراه أ حـ ، ب ء فى م فإذا كان :

أ م = ٢,٥ سم ، ء ب = ٧ $\frac{1}{3}$ سم ، م حـ = ٣ سم

فأوجد : طول كل من م ء ، م ب

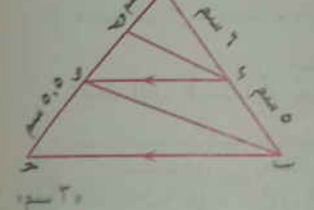

«٣ $\frac{1}{3}$ سم ، ٤ سم»

٩ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ء و // ب حـ ، أ ء = ٦ سم

، ب ء = ٥ سم ، أ هـ = ٣,٦ سم ، و حـ = ٥,٥ سم

أوجد : طول هـ و ثم أثبت أن : ء هـ // ب و



«٣ سم»

١٠ أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ فإذا كان :

أ هـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ حـ = ١٠ سم ، هـ ء = ٧,٨ سم

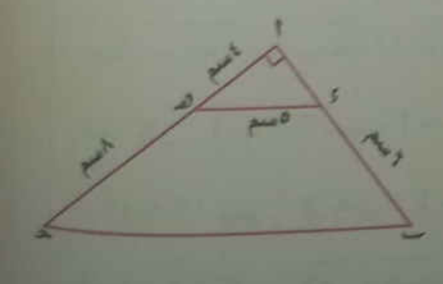
أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

١١ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

(١) أثبت أن : ء هـ // ب حـ

(٢) أوجد : طول ب حـ



«١٥ سم»

١٢ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : س ص // ب حـ

فإذا كان : ب س = ٣ سم ، أ ص = ٦ سم

، وكان $\frac{\text{أ س + أ ص}}{\text{أ ب + أ حـ}} = \frac{٣}{٥}$

فأوجد : طول كل من أ س ، حـ ص

«٤٫٥ سم ، ٤ سم»

١٣ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أ ب ، رسم ء هـ // ب حـ ويقطع أ حـ في هـ ثم رسم هـ و // حـ ء ويقطع أ ب في و أثبت أن : $(\text{أ ء})^2$ = أ و × أ ب

١٤ أ ب حـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ أ حـ ، رسم هـ و // حـ ب ويقطع أ ب في و ، ورسم هـ ن // حـ ء ويقطع أ ء في ن أثبت أن : و ن // ب ء

١٥ أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي ضلعه الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

١٦ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب أ ، هـ ∉ أ ب ، رسم هـ حـ فقطع أ ء في و ، ب ء في م

أثبت أن : $(\text{حـ م})^2$ = م و × م هـ

١٧ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ حـ ب ، هـ ∉ حـ ب ، رسم ء هـ فقطع أ ب في ن

ثم رسم ب ى // هـ ء فقطع حـ ء في ى أثبت أن : $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{ى ء}}$

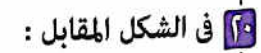
١٨ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أ ب حيث ٣ أ ء = ٢ ء ب ، هـ ∈ أ حـ حيث ٥ حـ هـ = ٣ أ حـ

، رسم أ س يقطع ب حـ في س فإذا كان : أ و = ٨ سم ، أ س = ٢٠ سم

، حيث و ∈ أ س أثبت أن : النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة.

١٩ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ بحيث $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ أ ء بحيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ء}} = \frac{٣}{٧}$ ، رسم حـ هـ

فقطع أ ب في س ، رسم ء ص // حـ س فقطع أ ب في ص أثبت أن : أ س = ب ص

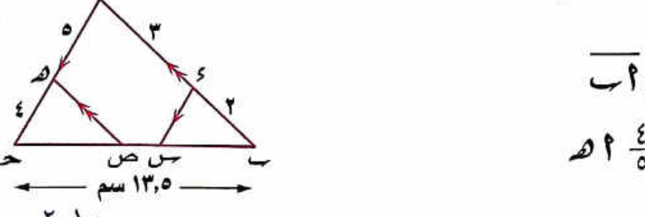


٢٠ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ء س // أ حـ ، هـ ص // أ ب

، ب حـ = ١٣٫٥ سم ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، هـ حـ = $\frac{٤}{٥}$ أ هـ

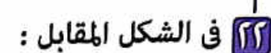
أوجد : طول س ص



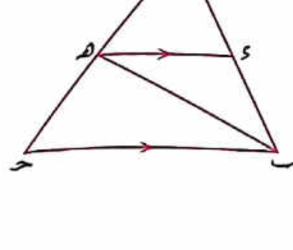
«٢٫١ سم»

٢١ أ ب حـ مثلث ، ء منتصف ب حـ ، م ∈ أ ء ، رسم م هـ // أ ب ويقطع ب حـ في هـ ، رسم م و // أ حـ ويقطع ب حـ في و **أثبت أن :** ء منتصف هـ و ، وإذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

فأثبت أن : هـ و = $\frac{1}{3}$ ب حـ



٢٢ في الشكل المقابل :



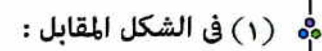
أ ب حـ مثلث فيه : ء هـ // ب حـ

أثبت أن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ}}$

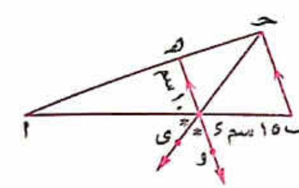
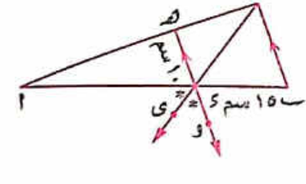


ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) في الشكل المقابل :

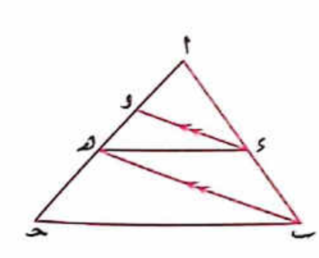



إذا كانت : ء هـ // ب حـ ، ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ و ء ى)

وكان : ء هـ = ١٠ سم ، ب ء = ١٥ سم فإن : أ ء = ... سم

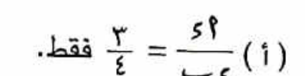
(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت : ء و // ب هـ لإثبات أن ء هـ // ب حـ يكون كافيًا

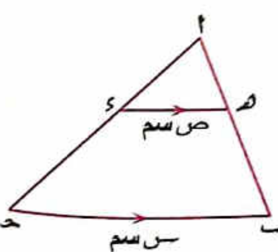
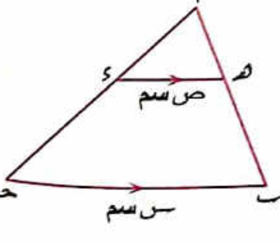
الحصول على ....



(أ) $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{3}{4}$ فقط. (ب) أ و × أ حـ = $(\text{أ هـ})^2$ فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٣) في الشكل المقابل :

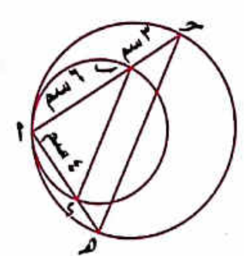
إذا كانت : ء هـ // ب حـ ، ء هـ = ص سم ، ب حـ = س سم

وكان : ٢ $س^2$ − ٣ س ص − ٥ $ص^2$ = ٠ وكان : أ ب = ١٠ سم

فإن : هـ ب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

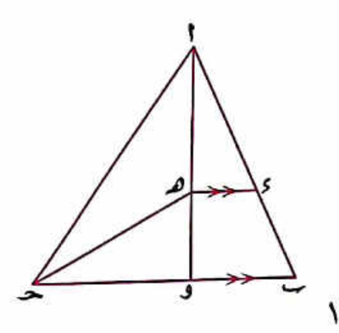
(٤) فى الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل فى أ فإن : هـ ء = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت : مساحة (Δ أ هـ حـ) = ١٥ سم^{2}

، مساحة (Δ و هـ حـ) = ٩ سم^{2} ، أب = ١٦ سم

فإن : أء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ءهـ // بحـ

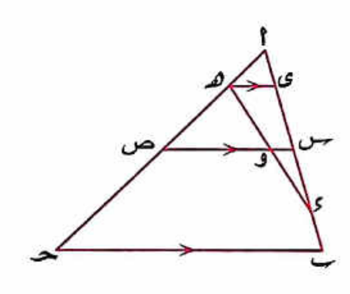
وكانت مساحة (Δ هـ بحـ) = ٩ سم^{2}

فإن : مساحة (Δ أءهـ) = ... سم^{2}

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

---

٢ فى الشكل المقابل :



أبحـ مثلث ، س منتصف أب

، ص منتصف أحـ ، ء ∈ بس ، هـ ∈ أص بحيث $\frac{أء}{ءب} = \frac{حـهـ}{هـأ}$

، ىهـ // سص // بحـ

أثبت أن : و منتصف ءهـ

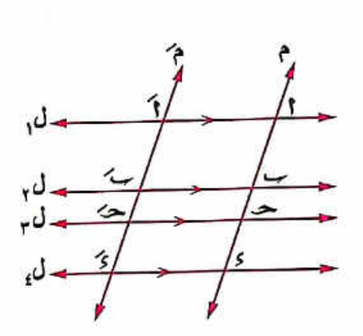
---

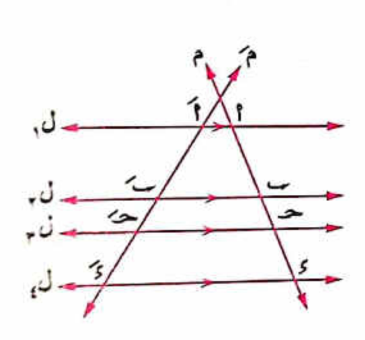
٣ أبحـء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف أم ، و منتصف محـ ، رسم ءهـ يقطع أب فى س ، ورسم ءو يقطع بحـ فى ص **أثبت أن :** سص // أحـ

الدرس 2 نظرية تاليس

نظرية ٢ (نظرية تاليس العامة)

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



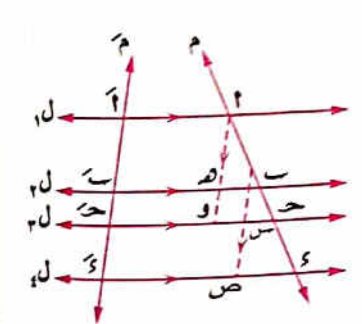


ففى الشكلين السابقين :

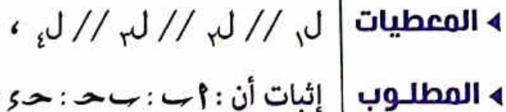
إذا كان : ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ قاطعين لهم

فإن : $\frac{أب}{أَبَ} = \frac{بحـ}{بَحـَ} = \frac{حـ ء}{حـَ ءَ} = \frac{أحـ}{أَحـَ}$

وفيما يلى إثبات صحة هذه النظرية :

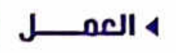


◂ المعطيات ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ قاطعان لهم

◂ المطلوب 

إثبات أن : أب : بحـ : حـ ء = أَبَ : بَحـَ : حـَ ءَ

◂ العمل ارسم $\overleftrightarrow{أو}$ // مَ ، ويقطع ل٢ فى هـ ، ل٣ فى و



، $\overleftrightarrow{بص}$ // مَ ، ويقطع ل٣ فى س ، ل٤ فى ص

البرهان

∵ أأَ // هـ بَ ، أهـ // أَبَ

∴ أهـ بَ أَ متوازى أضلاع ويكون : أهـ = أَبَ

بالمثل : هـ و = بَ حَ ، ب س = بَ حَ ، س ص = حَ ءَ

فى Δ أ حـ و : ∵ ب هـ // حـ و ∴ أب / ب حـ = أهـ / هـ و

ويكون : أب / ب حـ = أَبَ / بَ حَ ، أب / أَبَ = ب حـ / بَ حَ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل Δ ب ء ص :

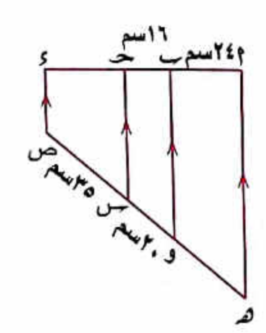
∴ ب حـ / حـ ء = بَ حَ / حَ ءَ ، ب حـ / بَ حَ = حـ ء / حَ ءَ (إبدال الوسطين) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : أب / أَبَ = ب حـ / بَ حَ = حـ ء / حَ ءَ

∴ أب : ب حـ : حـ ء = أَبَ : بَ حَ : حَ ءَ (وهو المطلوب)

فى الشكل السابق لاحظ أن :

• أحـ / حـ ء = أَحَ / حَ ءَ • أحـ / حـ ب = أَحَ / حَ بَ • ب ء / أ ء = بَ ءَ / أَ ءَ وهكذا



فمثلاً فى الشكل المقابل :

إذا كان : أهـ // ب و // حـ س // ء ص

وكان : أب = ٢٤ سم ، ب حـ = ١٦ سم

، و س = ٢٠ سم ، س ص = ٣٥ سم فإن : أب / هـ و = ب حـ / و س = حـ ء / س ص

أى أن ٢٤ / هـ و = ١٦ / ٢٠ = حـ ء / ٣٥ ومنها :

هـ و = (٢٠ × ٢٤) / ١٦ = ٣٠ سم ، حـ ء = (١٦ × ٣٥) / ٢٠ = ٢٨ سم

مثال ١

فى الشكل المقابل :

ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ قاطعان لهم

استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب :

طول كل من س ص ، حـ ء

الحل

∵ $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2 \parallel \text{ل}_3 \parallel \text{ل}_4$ ، م ، مَ قاطعان لهم.

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{سص}} = \frac{\text{حء}}{\text{عن}} = \frac{\text{أح}}{\text{سع}}$

∴ $\frac{١,٤}{\text{سص}} = \frac{\text{حء}}{٢,٤} = \frac{١,٤ + ٢,١}{٣} = \frac{٣,٥}{٣}$

∴ $\text{سص} = \frac{١,٤ \times ٣}{٣,٥} = ١,٢$ سم **(المطلوب أولًا)**

، $\text{حء} = \frac{٢,٤ \times ٣,٥}{٣} = ٢,٨$ سم **(المطلوب ثانيًا)**

مثال ٢

في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أه}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ح ع}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء ن}}$

احسب قيمة كل من س ، ص

العددية علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أه}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ح ع}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ه و}}$ قاطعان لهم.

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ه و}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ع ن}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٣} = \frac{٢\text{ص} - ٥}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$

∴ $٤\text{س} = ٣\text{س} + ٩$ ∴ $\text{س} = ٩$

، $٨\text{ص} - ٢٠ = ٣\text{ص}$ ∴ $٥\text{ص} = ٢٠$ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

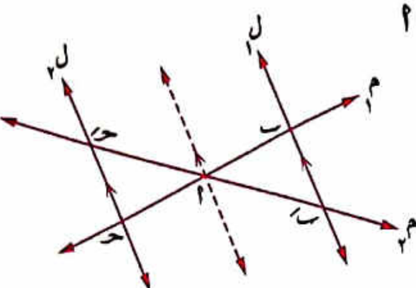
أ ب ح مثلث ، $\overline{\text{أح}} \parallel \overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{سص}}$ ، أء = ٩ سم

، س ب = ٣ سم ، ب ص = ٢ سم ، ه ص = ٤ سم

أوجد : ح ه ، ء س

حالتان خاصتان

(١) إذا كان : $ل_١ \parallel ل_٢$ ، $م_١$ ، $م_٢$ قاطعين لهما متقاطعين فى النقطة أ



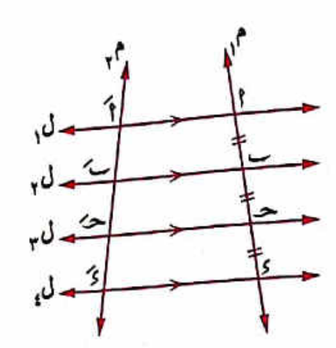
فإن : $\frac{أب}{أحـ} = \frac{أبَ}{أحـَ}$

وبالعكس إذا كان : $\frac{أب}{أحـ} = \frac{أبَ}{أحـَ}$

فإن : $\overleftrightarrow{ببَ} \parallel \overleftrightarrow{حـحـَ}$

(٢) **نظرية تاليس الخاصة :**

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك فى الطول.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $ل_١ \parallel ل_٢ \parallel ل_٣ \parallel ل_٤$ ، قطعها المستقيمان $م_١$ ، $م_٢$

وكان : أب = ب حـ = حـ ء فإن : أَبَ = بَحـَ = حـَءَ

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

$\overline{أء} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{و حـ}$

، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{ءو}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى



استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب : طول كل من $\overline{ىو}$ ، $\overline{ىأ}$

الحل

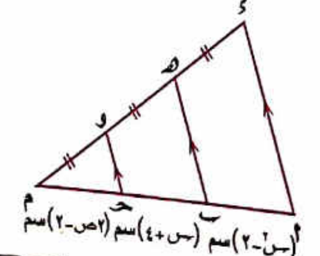
∵ $\overline{أء} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{و حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{ءو}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى

∴ $\frac{ى و}{ى حـ} = \frac{ى هـ}{ى ب} = \frac{ى ء}{ى أ}$ ∴ $\frac{ى و}{٥} = \frac{٣}{٢,٤} = \frac{١٠}{ى أ}$

∴ $ى و = \frac{٦ \times ٣}{٢,٤} = ٧,٥$ سم (المطلوب أولاً)

، $ى أ = \frac{٢,٤ \times ١٠}{٣} = ٨$ سم (المطلوب ثانيًا)

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

$\overline{أء} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{حـ و}$ ، ء هـ = هـ و = و م

أوجد : قيم س ، ص علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

الحـل

∵ $\overline{أ ء} // \overline{ب هـ} // \overline{حـ و}$ ، ء هـ = هـ و = و م

∴ أ ب = ب حـ = حـ م

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ س = −٢ أ ، س = ٣

، عند س = −٢ : ∴ ب حـ = ٢ سم

، عند س = ٣ : ∴ ب حـ = ٧ سم

، ∵ ب حـ = حـ م

∴ عند ب حـ = ٢ سم : ∴ ٢ ص − ٢ = ٢ ومنها ص = ٢

، عند ب حـ = ٧ سم : ∴ ٢ ص − ٢ = ٧ ومنها ص = ٤,٥

∴ س^{٢} − ٢ = س + ٤

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

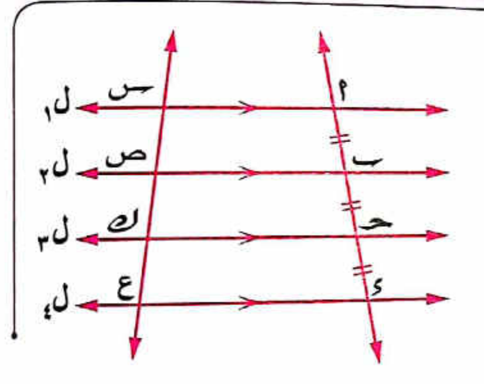
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

إذا كان : س ك = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{ص ك}$





اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب : ب حـ : حـ ء = ...

(أ) أ هـ : و حـ : م ء (ب) هـ ب : ب و : و م

(جـ) هـ ب : ب حـ : حـ ء (د) هـ ب : هـ و : هـ م

(٢) فى الشكل المقابل :

أ ى = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧,٥

(جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣) فى الشكل المقابل :

ء أ = ٢١ سم ، م حـ = ٥ سم ، و ب = ٤ سم

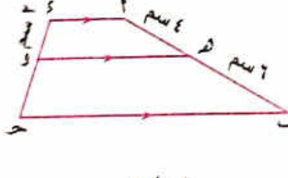
فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء // هـ و // ب حـ ، أ هـ = ٤ سم

، هـ ب = ٦ سم ، ء و = ٢ سم فإن طول حـ و = ... سم



(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

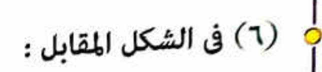
(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : حـ ء // هـ و // س ص ، حـ هـ = ٢٠ سم ، ء و = ١٥ سم

، و ص = ٣٣ سم فإن : طول حـ س = ... سم

(أ) ٤٨ (ب) ٦٤

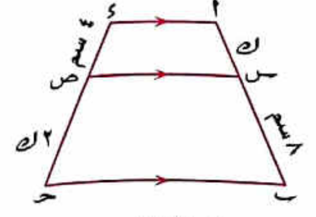
(جـ) ٤٤ (د) ٢١



(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء // س ص // ب حـ

فإن : أ س = ... سم

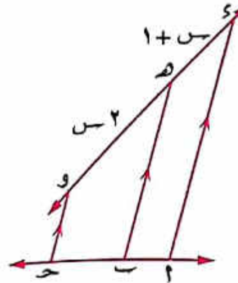


(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء // ب هـ // حـ و ، أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

، ء هـ = س + ١ سم ، هـ و = ٢ س سم فإن : س = ... سم



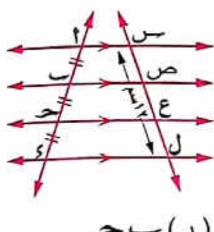
(أ) ٣ (ب) ٤

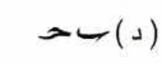
(جـ) ٥ (د) ٨

(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = ب حـ = حـ ء ، س ل = ١٢ سم

فإن : س ع = ...

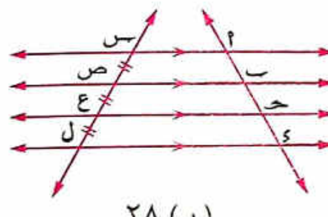


(أ) ٤ سم (ب) ص ل (جـ) أ حـ  (د) ب حـ

(٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : ب ء = ١٤ سم

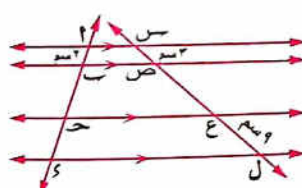
فإن : أ حـ = ... سم



(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٨

(١٠) في الشكل المقابل :

حـ ء = ... سم

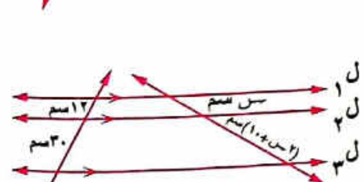


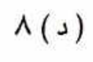
(أ) ١٢ (ب) ٦

(جـ) ١٤ (د) ٥

(١١) في الشكل المقابل :

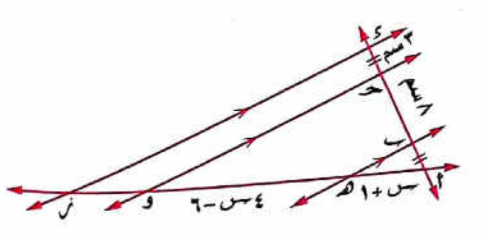
س = ... سم



(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥   (د) ٨

(١٢) في الشكل المقابل :

س = ... سم



(أ) ٢ (ب) ٣,٥

(جـ) ٥ (د) ٦,٥

(١٣) فى الشكل المقابل :

$س = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٨ (د) ٢

(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $س < ٢$ فإن : ....

(أ) ص = ٣ (ب) ص > ٣

(جـ) ص < ٣ (د) ص ≥ ٣

(١٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٢٣ (ب) ١٨ (جـ) ٤١ (د) ٥١

(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧

(جـ) ١١ (د) ١٢

(١٧) فى الشكل المقابل :

$\frac{ب هـ}{ء ن} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٨) فى الشكل المقابل :

م م‌َ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٨

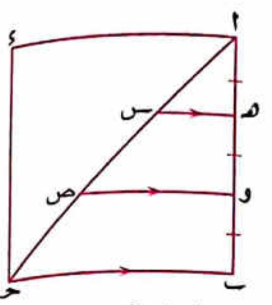
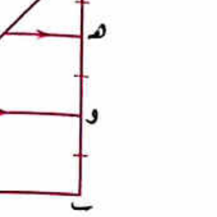
(جـ) ١٢ (د) ١٦

(١٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ب حـ = ٣٥ سم ، $\frac{حـ و}{و م} = \frac{١}{٢}$ فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٢٠) فى الشكل المقابل :

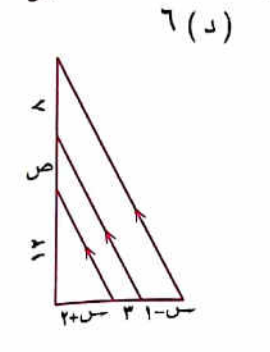
أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ٦ سم

، أ هـ = و هـ = و ب

فإن مساحة الشكل س ص و هـ = ... سم^٢

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٢١) فى الشكل المقابل :



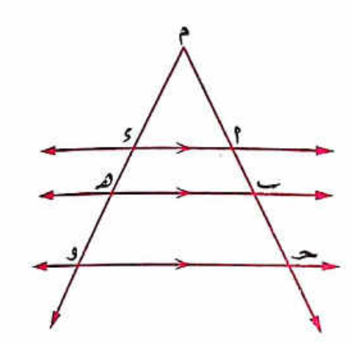
(س ، ص) = ...

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (٤ ، ٦)

(جـ) (٧ ، ٤) (د) (١١ ، ٧)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل :



(١) $\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{ء هـ}{.........}$ (٢) $\frac{أ حـ}{ب حـ} = \frac{.........}{هـ و}$

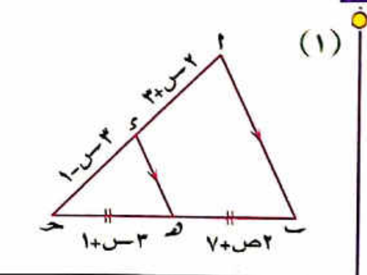
(٣) $\frac{م أ}{أ ب} = \frac{م ء}{.........}$ (٤) $\frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{.........}{ء هـ}$

(٥) $\frac{م ب}{أ ب} = \frac{.........}{ء هـ}$ (٦) $\frac{م حـ}{أ حـ} = \frac{م و}{.........}$

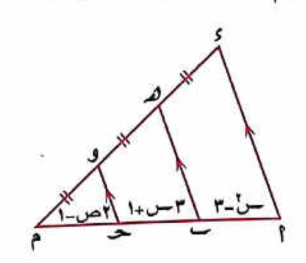
(٧) $\frac{ب حـ}{م ب} = \frac{هـ و}{.........}$ (٨) $\frac{ء و}{م و} = \frac{أ حـ}{.........}$

٢ فى كل من الأشكال التالية ، احسب قيم س ، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

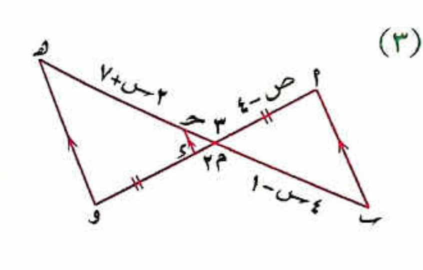
(١)



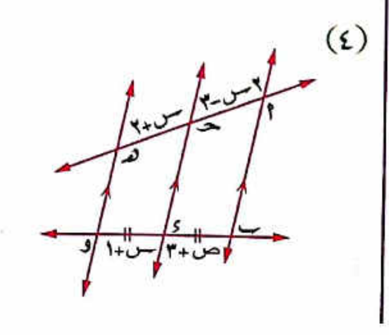
(٢)



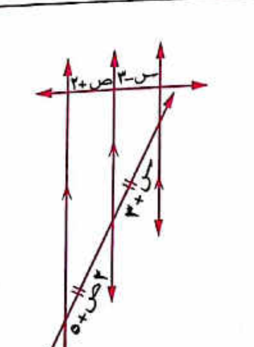
(٣)



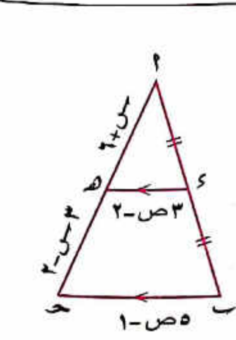
(٤)



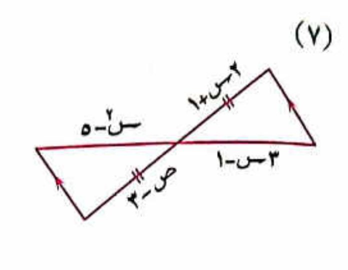
(٥)



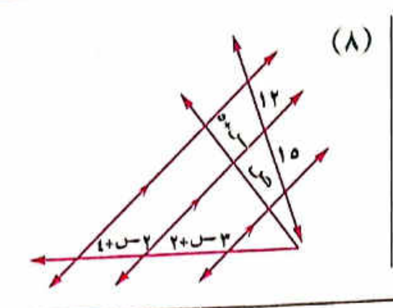
(٦)



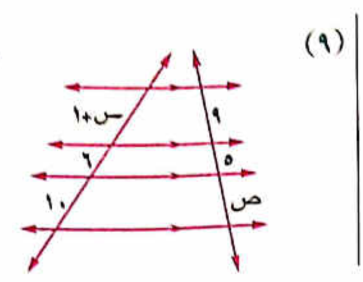
(٧)



(٨)



(٩)



٣ في الشكل المقابل :

ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ مستقيمان قاطعان لهم

فإذا كان : أب = ١,٦ سم ، ب حـ = ٢,٤ سم

، ص ع = ٣,٦ سم ، ع ن = ٤,٨ سم

فاحسب : طول كل من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$

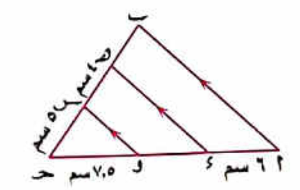
«٢,٤ سم ، ٣,٢ سم»

٤ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{وس}}$ وكان : أء = ٦ سم ، هـ س = ٤ سم

، و حـ = ٧,٥ سم ، حـ س = ٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ءو}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$

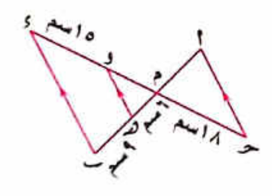


«٦ سم ، ٤ سم»

٥ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ ء}}$ = {م} ، هـ ∈ $\overline{\text{م ب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{ء ب}}$

أوجد : (١) طول $\overline{\text{م و}}$ (٢) طول $\overline{\text{أم}}$



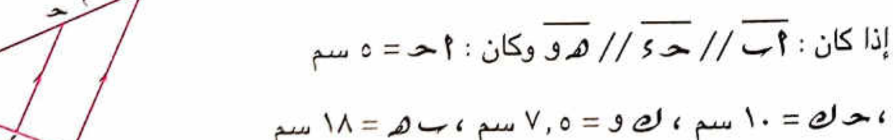
«١٠ سم ، ١٠,٨ سم»

٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ وكان : أحـ = ٥ سم

، حـ ك = ١٠ سم ، ك و = ٧,٥ سم ، ب هـ = ١٨ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء ك}}$ ، $\overline{\text{ك هـ}}$

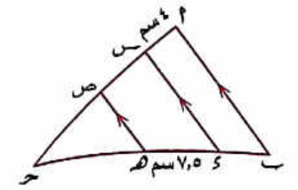


«٤ سم ، ٨ سم ، ٦ سم»

٧ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ} ، س ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{حـ ء}}$

، وكان $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{أحـ}}$ أثبت أن : أس × هـ ء = حـ ص × هـ ب

٨ في الشكل المقابل :



$\overline{أب} // \overline{حـ ء} // \overline{هـ و} // \overline{س ص} // \overline{ع ل}$

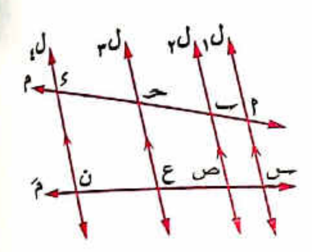
، أ حـ = ٢ سم ، ب ء = ٢,٥ سم

، و ص = ٤,٥ سم ، و ل = ٧,٥ سم ، حـ ع = ١٢ سم

أوجد : طول كل من $\overline{هـ س}$ ، $\overline{س ع}$ ، $\overline{حـ هـ}$ ، $\overline{ء و}$

«٣,٦ سم ، ٢,٤ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{أب} // \overline{ء س} // \overline{هـ ص}$ ، أ س : س ص : ص حـ = ٢ : ٣ : ٥

فإذا كان : ء هـ = ٧,٥ سم ، أ س = ٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ هـ}$ ، $\overline{أ حـ}$

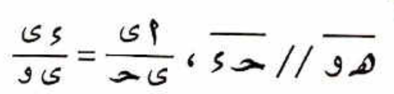
«٥ سم ، ١٢,٥ سم ، ٢٠ سم»

١٠ أ ب حـ مثلث ، ء ، هـ ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftarrow{ء س}$ ، $\overleftarrow{هـ ص}$ يوازيان $\overline{ب حـ}$ ويقطعان $\overline{أ حـ}$ في س ، ص على الترتيب فإذا كان : أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ ، ء هـ = ٣ أ ء ، أ حـ = ٢٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{أ س}$ ، $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص حـ}$

«٤ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم»

١١ في الشكل المقابل :



ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ مستقيمان قاطعان لها فإذا كان :

$\frac{أب}{ب حـ} = \frac{١}{٢}$ ، ب حـ = $\frac{٤}{٥}$ حـ ء وكان س ن = ١٦,٥ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ع}$ ، $\overline{ع ن}$

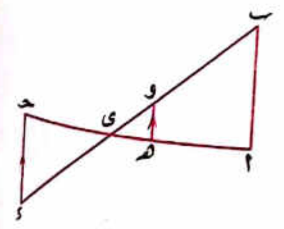
«٣ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

١٢ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث $\frac{أء}{ء ب} = \frac{٣}{٥}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$ وتقع خارج المثلث بحيث أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، رسم $\overleftarrow{ء س}$ ، $\overleftarrow{هـ ص}$ يوازيان $\overline{ب حـ}$ ويقطعان $\overleftrightarrow{أ حـ}$ في س ، ص على الترتيب فإذا كان : أ ص = ١٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{أ س}$ ، $\overline{أ حـ}$

«١٠,٥ سم ، ٢٨ سم»

١٣ في الشكل المقابل :



$\overline{هـ و} // \overline{حـ ء}$ ، $\frac{أ ى}{ى حـ} = \frac{ء ى}{ى و}$

أثبت أن : $(ى حـ)^٢$ = ى أ × ى هـ

14 ر أ ط ب شبه منحرف فيه : $\overline{رأ} // \overline{بط}$ ، م منتصف $\overline{رب}$ ، رسم مستقيم يمر بالنقطة م ، يوازى $\overline{بط}$ ويقطع القطر $\overline{أب}$ فى ن ، ويقطع القطر $\overline{رط}$ فى هـ ، والضلع $\overline{أط}$ فى و

(١) بيِّن أن النقط ن ، هـ ، و منتصفات القطع المستقيمة $\overline{أب}$ ، $\overline{رط}$ ، $\overline{أط}$

(٢) أثبت أن : م و = $\frac{١}{٢}$ (ر أ + ب ط)

---

15 أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{أب} // \overline{حـء}$ ، تقاطع قطراه فى م ، نصفت $\overline{بحـ}$ فى هـ ، ورسم $\overleftrightarrow{هـو} // \overline{بأ}$ ، ويقطع $\overline{بء}$ فى س ، $\overline{أحـ}$ فى ص ، $\overline{أء}$ فى و

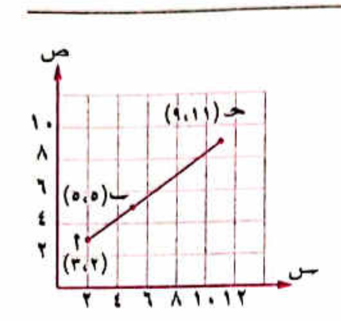
أثبت أن : (١) هـ ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب (٢) $\frac{أص}{حـم} = \frac{بس}{ءم}$

---

16 تفكير ناقد :

أوجد من الشكل $\frac{أب}{بحـ}$ بعدة طرق مختلفة ، كلما أمكنك ذلك.

هل حصلت على نفس الناتج ؟



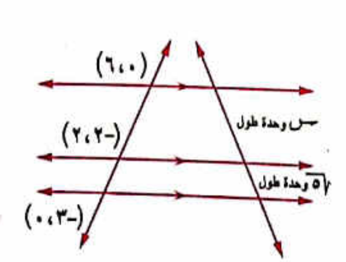
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ٥٧$

فإن : س + ص = ... سم



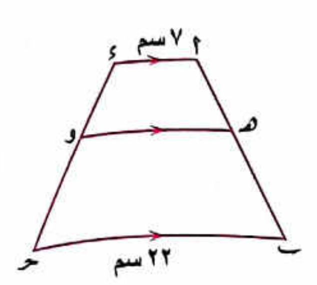
(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$

(جـ) ٣ $\sqrt{٥}$ (د) ٤ $\sqrt{٥}$



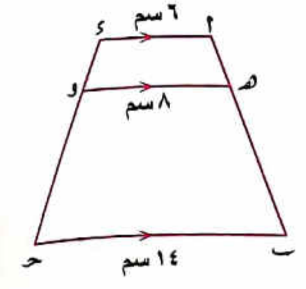
(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٢}{٣}$

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥



(٤) فى الشكل المقابل :

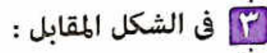
$\frac{أهـ}{هـب} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$

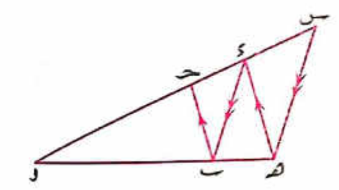
(جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٣}$

٢ أب حـ مثلث ، م منتصف الضلع $\overline{بحـ}$ فرضت نقطة ن على $\overline{أم}$ ، رسم $\overleftrightarrow{نهـ}$ // $\overline{أب}$ ويقطع $\overline{بحـ}$ فى هـ ، ورسم $\overleftrightarrow{نى}$ // $\overline{أحـ}$ ويقطع $\overline{بحـ}$ فى ى **أثبت أن :** م منتصف $\overline{هـى}$

، وإذا كانت ن ملتقى متوسطات المثلث أب حـ **فأثبت أن :** ب هـ = هـ ى = ى حـ = $\frac{١}{٣}$ ب حـ



٣ فى الشكل المقابل :



$\overline{هـء}$ // $\overline{بحـ}$ ، $\overline{ءب}$ // $\overline{هـس}$

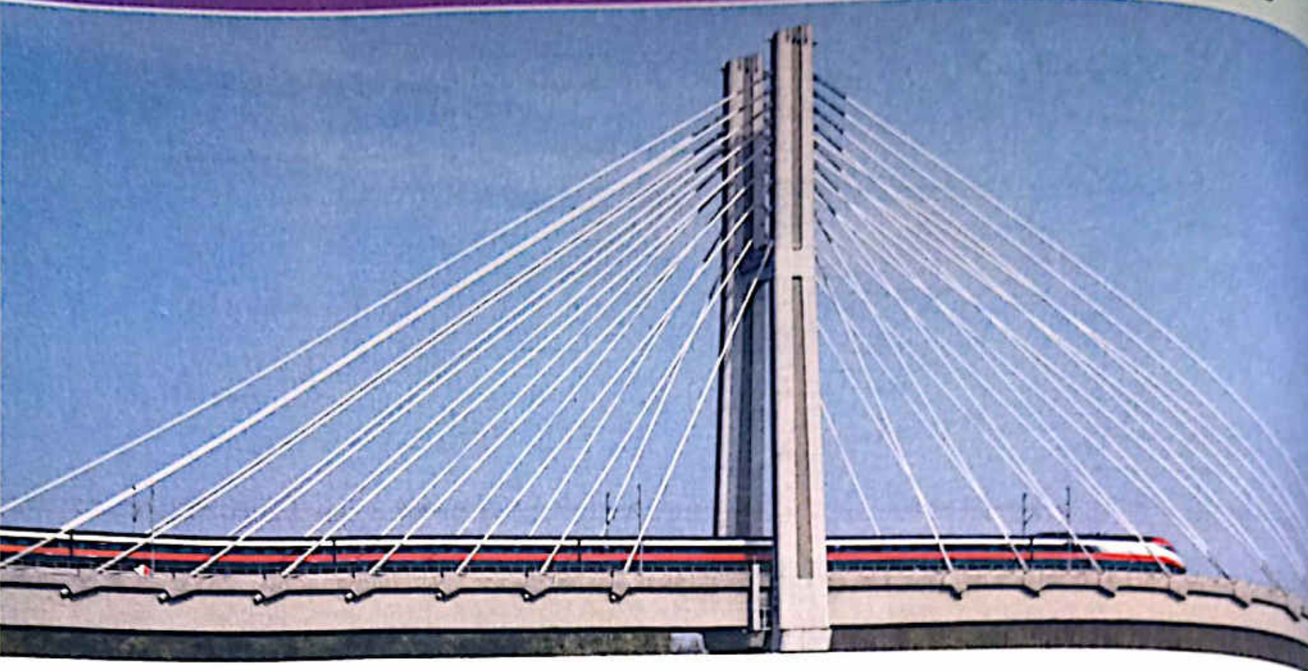
أثبت أن : $\left(\frac{وب}{وهـ}\right)^٢ = \frac{وحـ}{وس}$

٤ أب حـ ء متوازى أضلاع ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ فقطع $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أب}$ فى س ، هـ على الترتيب ، رسم $\overline{ءو}$ فقطع $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ فى ص ، و على الترتيب فإذا كان : أ س = حـ ص

فأثبت أن : $\overline{هـو}$ // $\overline{سص}$

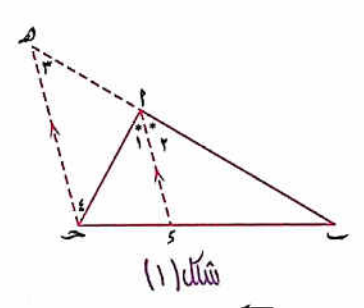


منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

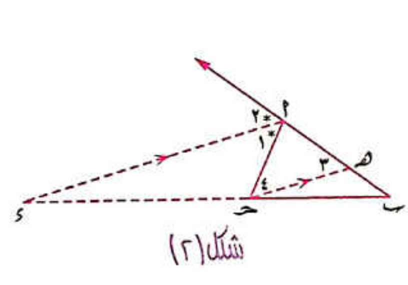


نظرية ٣

إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين.



شكل (١)



شكل (٢)

المعطيات أ ب حـ مثلث ، $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ (من الداخل فى شكل (١) ، من الخارج فى شكل (٢))

المطلوب إثبات أن : $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$

العمل ارسم $\overleftarrow{حـ هـ}$ // $\overleftrightarrow{أء}$ ويقطع $\overleftarrow{ب أ}$ فى هـ

البرهان ∵ $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٢

، ∵ $\overline{حـ هـ}$ // $\overline{أء}$ ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٤ (بالتبادل)

، ∠ ٣ ≡ ∠ ٢ (بالتناظر)

، ∵ ∠ ١ ≡ ∠ ٢ ∴ ∠ ٣ ≡ ∠ ٤

∴ $\overline{أ هـ} ≡ \overline{أ حـ}$ (١)

، ∵ $\overline{حـ هـ}$ // $\overline{أء}$ ∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ هـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ (وهو المطلوب)

مثال ١

أ ب حـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ هي على الترتيب ٤ ، ٥ ، ٦ من السنتيمترات ، نصفت زاوية أ بمنصف قطع $\overline{بحـ}$ في ء أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{ءحـ}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ

∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{بأ}{أحـ}$

∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{بء}{٥ - بء} = \frac{٢}{٣}$

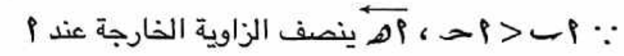
∴ ٣ بء = ١٠ − ٢ بء ∴ ٥ بء = ١٠

∴ بء = ٢ سم ، ءحـ = ٥ − ٢ = ٣ سم (وهو المطلوب)

مثال ٢

أ ب حـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ هي على الترتيب ٦ ، ٥ ، ٩ من السنتيمترات ، نصفت الزاوية الخارجة للمثلث عند أ بمنصف قطع $\overleftrightarrow{بحـ}$ في هـ أوجد : طول كل من $\overline{بهـ}$ ، $\overline{هـحـ}$

الحل



∵ أب < أحـ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ هـ ∈ $\overleftrightarrow{حـب}$ ، هـ ∉ $\overline{بحـ}$ ، $\frac{بهـ}{هـحـ} = \frac{بأ}{أحـ}$

∴ $\frac{بهـ}{هـحـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{بهـ}{٥ + بهـ} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ بهـ = ١٠ + ٢ بهـ ∴ بهـ = ١٠ سم ، هـحـ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

مثال ٣

أ ب حـ مثلث ، س منتصف $\overline{بحـ}$ ، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع $\overline{أب}$ في ء ، نصفت ∠ أ س حـ بمنصف قطع $\overline{أحـ}$ في هـ أثبت أن : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$

الحل

في △ أ س ب : ∵ $\overleftrightarrow{سء}$ ينصف ∠ أ س ب

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أس}{سب}$ (١)

، في △ أ س حـ : ∵ $\overleftrightarrow{سهـ}$ ينصف ∠ أ س حـ

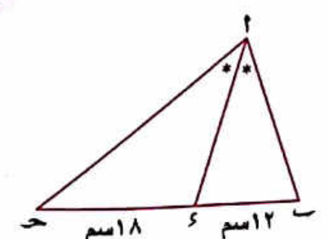
∴ $\frac{أهـ}{هـحـ} = \frac{أس}{سحـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) وملاحظة أن : س ب = س حـ ∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـحـ}$

∴ في △ أ ب حـ : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ (وهو المطلوب)

مثال ٤

في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أ د}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى د

بحيث : ب د = ١٢ سم ، د جـ = ١٨ سم فإذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٨٠ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ب}$

الحل

فى Δ أ ب جـ : ∵ $\overleftrightarrow{أ د}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب د}{د جـ} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ محيط Δ أ ب جـ = ٨٠ سم ، ب جـ = ١٢ + ١٨ = ٣٠ سم

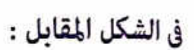
∴ أ ب + أ جـ = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠ سم

، ∵ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ ب + أ جـ}{أ جـ} = \frac{٢ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{٥٠}{أ جـ} = \frac{٥}{٣}$ ∴ أ جـ $= \frac{٣ \times ٥٠}{٥} =$ ٣٠ سم

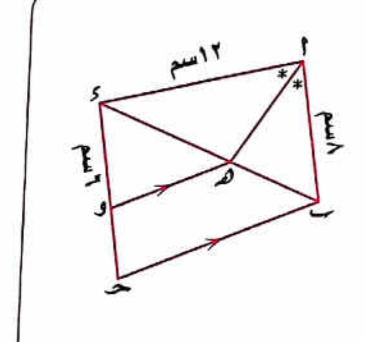
∴ أ ب = ٥٠ − ٣٠ = ٢٠ سم

(وهو المطلوب)



حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



أ ب جـ د شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، أ د = ١٢ سم

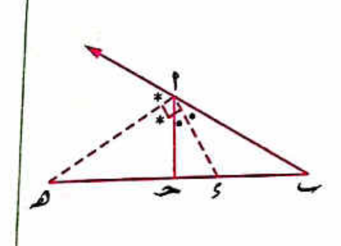
، $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب د}$ فى هـ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$

ويقطع $\overline{د جـ}$ فى و ، فإذا كان د و = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{د جـ}$

ملاحظات هامة

١ **المنصفان الداخلى والخارجى لأى زاوية من زوايا المثلث يكونان متعامدين**



ففى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ هما المنصفان

للزاوية أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ على الترتيب فإن :

$\frac{ب د}{د جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ، $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{ب هـ}{هـ جـ}$

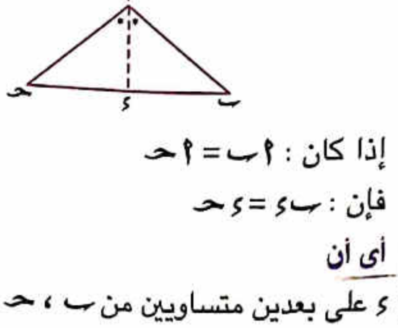
∴ القاعدة $\overline{ب جـ}$ تنقسم من الداخل فى د

ومن الخارج فى هـ بنفس النسبة (أ ب : أ جـ)

ويلاحظ أن المنصفين $\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ متعامدان **أى أن** ق (∠ د أ هـ) = ٩٠°

[٢] **إذا كان :** $\overleftrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى د فإن د تأخذ أحد الأوضاع الآتية :

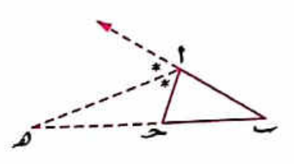




إذا كان : أ ب > أ جـ	إذا كان : أ ب = أ جـ	إذا كان : أ ب < أ جـ
فإن : ب د > د جـ	فإن : ب د = د جـ	فإن : ب د < د جـ
أى أن	**أى أن**	**أى أن**
د أقرب إلى جـ منها إلى ب	د على بعدين متساويين من ب ، جـ	د أقرب إلى ب منها إلى جـ

[٣] **إذا كان :** $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب جـ عند أ حيث هـ ∉ $\overline{ب جـ}$

فإن هـ تأخذ أحد الأوضاع الآتية :





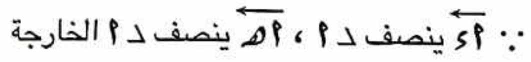
إذا كان : أ ب > أ جـ	إذا كان : أ ب = أ جـ	إذا كان : أ ب < أ جـ
فإن : ب هـ > هـ جـ	فإن : $\overleftrightarrow{أهـ}$ // $\overline{ب جـ}$	فإن : ب هـ < هـ جـ
أى أن	**أى أن** المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث متساوى الساقين يوازى القاعدة	**أى أن**
هـ ∈ $\overrightarrow{جـ ب}$		هـ ∈ $\overrightarrow{ب جـ}$

مثال ٥

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٧ سم ، رُسم $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى د ،
رسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ أوجد : طول $\overline{د هـ}$

الحل

فى Δ أ ب جـ :



∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ أ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة



∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{ب د + د جـ}{د جـ} = \frac{٤ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{ب جـ}{د جـ} = \frac{٧}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{د جـ} = \frac{٧}{٣}$ ∴ د جـ = ٣ سم

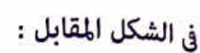
(١)

ومن (١) : ∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ} - \text{هـ حـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٤ - ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

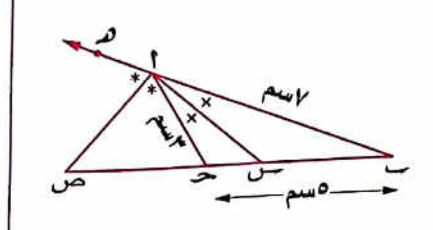
∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ حـ هـ = ٢١ سم

∴ ء هـ = ء حـ + حـ هـ = ٣ + ٢١ = ٢٤ سم

(وهو المطلوب)



حاول بنفسك



في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أص}}$ ينصف ∠ حـ أ هـ

، أ ب = ٧ سم ، أ حـ = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

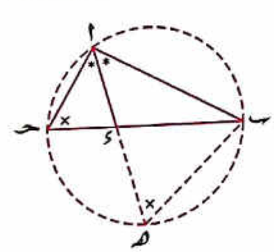
أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث

تمرين مشهور

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ في Δ أ ب حـ من الداخل ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء

فإن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$



◂ المعطيات أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ من الداخل

، $\overrightarrow{\text{أء}} \cap \overline{\text{ب حـ}} = \{\text{ء}\}$

◂ المطلوب إثبات أن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

◂ العمل ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب حـ وتقطع $\overrightarrow{\text{أء}}$ في هـ ، ارسم $\overline{\text{ب هـ}}$

◂ البرهان ∵ ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ هـ أ ب) (معطى)

، ق (∠ هـ) = ق (∠ حـ) (محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ أ هـ ب وينتج أن : $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

∴ أ ء × أ هـ = أ ب × أ حـ

∴ أ ء × (أ ء + ء هـ) = أ ب × أ حـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − أ ء × ء هـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − ب ء × ء حـ

أي أن أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

(وهو المطلوب)

! تذكر أن

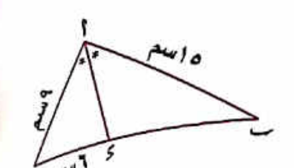
أ ء × ء هـ = ب ء × ء حـ

مثال ٦

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٥ سم ، أ حـ = ٩ سم ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{ب حـ}$ في ء

فإذا كان : ء حـ = ٦ سم أوجد : طول $\overline{أ ء}$

الحل



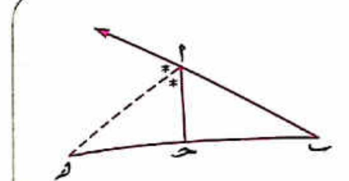
∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$

∴ $\frac{ب ء}{٦} = \frac{١٥}{٩}$ ∴ ب ء = $\frac{١٥ \times ٦}{٩}$ = ١٠ سم

∴ أ ء = $\sqrt{أ ب \times أ حـ - ب ء \times ء حـ} = \sqrt{١٥ \times ٩ - ١٠ \times ٦} = \sqrt{٧٥} = ٥\sqrt{٣}$ سم (وهو المطلوب)

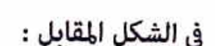
ملاحظة

في الشكل المقابل :



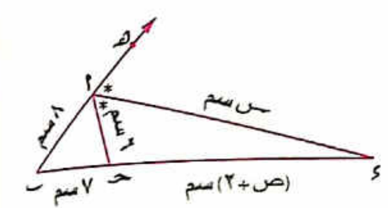
إذا كان : $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ حـ من الخارج ويقطع $\overleftrightarrow{ب حـ}$ في هـ

فإن : أ هـ = $\sqrt{ب هـ \times هـ حـ - أ ب \times أ حـ}$



مثال ٧

في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم ، أ حـ = ٦ سم

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ الخارجة أوجد : قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ الخارجة ∴ $\frac{ب ء}{حـ ء} = \frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{٧ + ص + ٢}{ص + ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{ص + ٩}{ص + ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ ص + ٢٧ = ٤ ص + ٨

∴ ص = ١٩ ∴ ء حـ = ٢١ سم ، ب ء = ٢٨ سم

، ∵ أ ء = $\sqrt{ب ء \times حـ ء - ب أ \times أ حـ} = \sqrt{٢٨ \times ٢١ - ٨ \times ٦} = \sqrt{٥٤٠} = ٦\sqrt{١٥}$ سم

∴ س = $٦\sqrt{١٥}$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٢٧ سم ، أ حـ = ١٥ سم ، رسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ في ء

فإذا كان : ب ء = ١٨ سم فأوجد : طول $\overline{أ ء}$



على منصف الزاوية والأجزاء المتناسبة



من أسئلة الكتاب المدرس • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

حء = ... سم

(أ) ٤,٥ (ب) ٥ (جـ) ٤,٩ (د) ٦

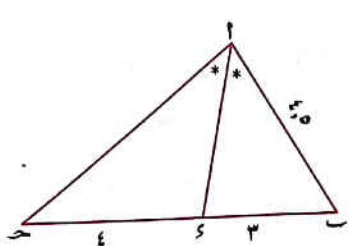
(٢) في الشكل المقابل :

بء = ... سم

(أ) ٤ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٤,٥ (د) ٤٥

(٣) في الشكل المقابل :

أحـ = ...

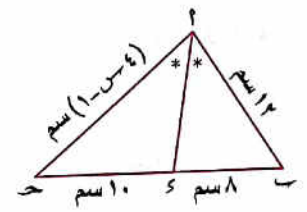


(أ) ٦ (ب) ٤,٨

(جـ) ٧ (د) ٨

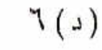
(٤) في الشكل المقابل :

س = ...



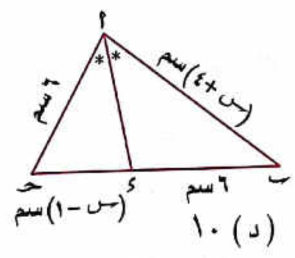
(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) ٤,٥ (د) ٦



(٥) في الشكل المقابل :

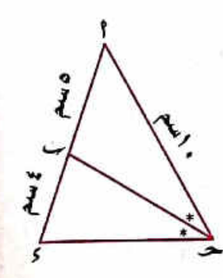
س = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٦) في الشكل المقابل :

حب = ... سم



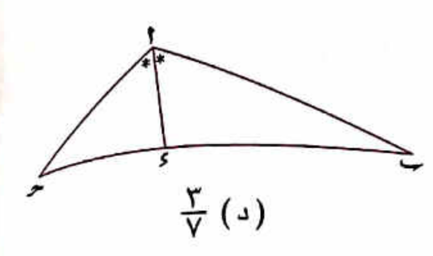
(أ) ٨ (ب) $٤\sqrt{٢}$

(جـ) $٢\sqrt{١٥}$ (د) ٦

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{جـ د}$ ينصف ∠ جـ ، أ جـ = ٣ سم

، ب جـ = ٧,٥ سم فإن أ د : ب د = ...

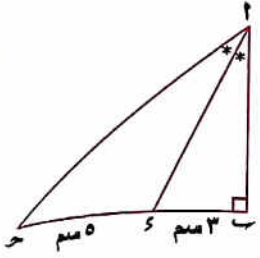


(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ : ٥ (د) ٥ : ٢

(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب : أ جـ : ب جـ = ٥ : ٣ : ٧

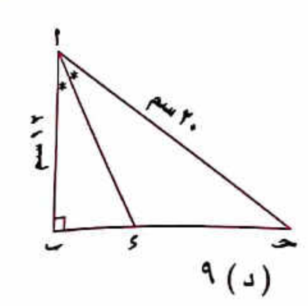
فإن ب د : د جـ = ...



(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٧}$

(٩) في الشكل المقابل :

أ ب = ... سم



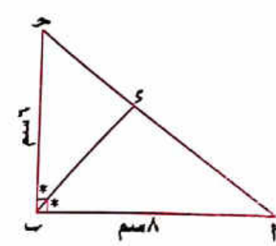
(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(١٠) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ د}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، ∠ ب قائمة ، أ ب = ١٢ سم

، أ جـ = ٢٠ سم

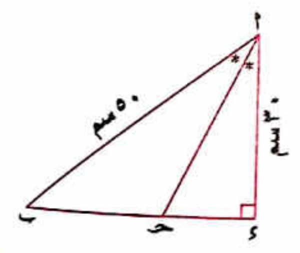
فإن : جـ د = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٩

(١١) في الشكل المقابل :

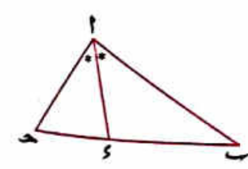
أ د = ... سم



(أ) $٥\frac{٥}{٧}$ (ب) $٦\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٢) في الشكل المقابل :

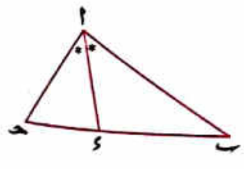
محيط Δ أ ب جـ ≃ .... سم



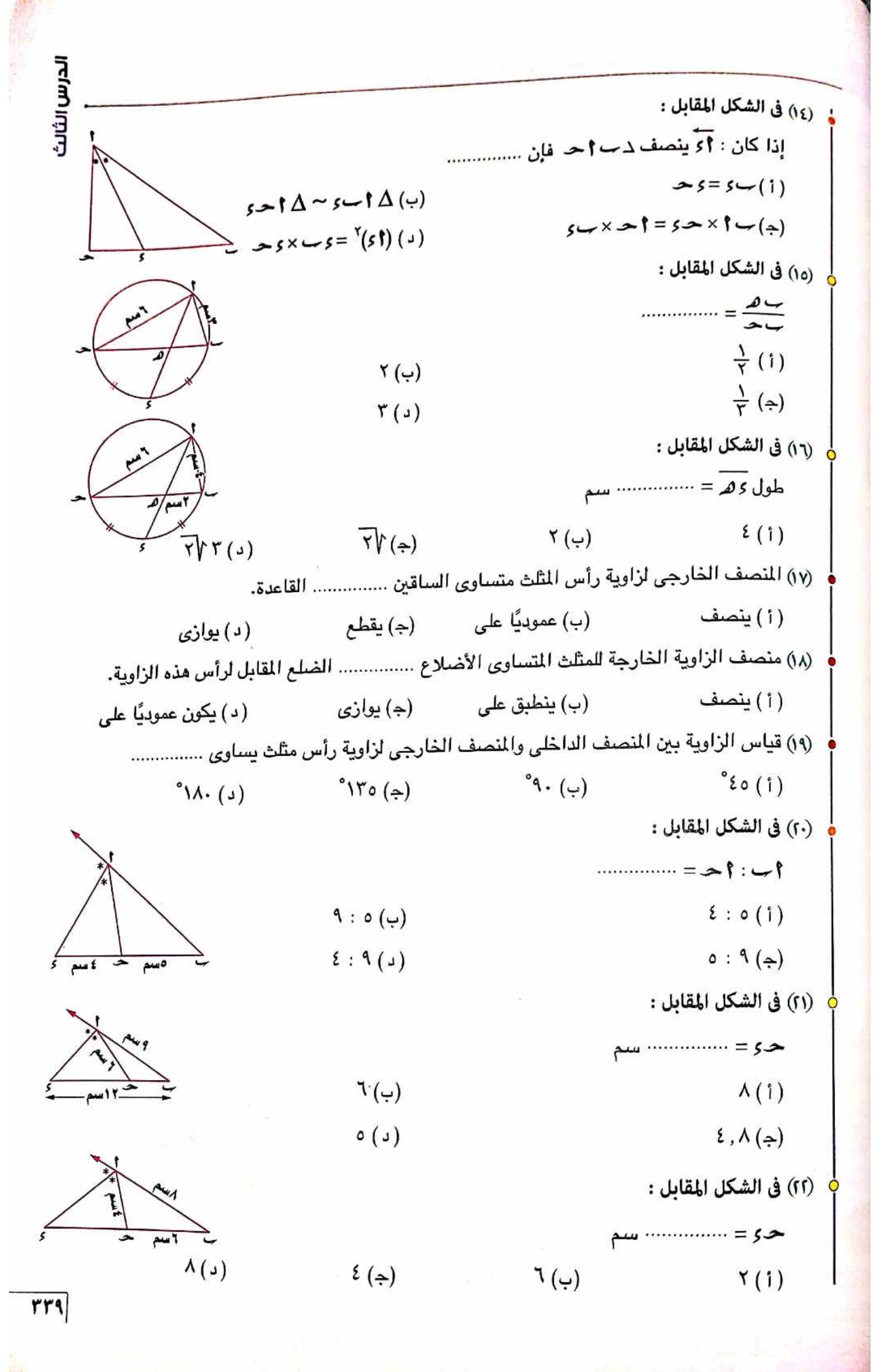
(أ) ١٢٣,٥ (ب) ٣٧٥ (جـ) ٩٨,٥ (د) ١٠٨,٥

(١٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أ د}$ ينصف ∠ أ فإن : أ ب × جـ د = ...



(أ) أ جـ × ب د (ب) $(أ د)^٢$ (جـ) أ د × ب د (د) أ جـ × أ ب



(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أد}$ ينصف ∠ب أ جـ فإن ....

(أ) ب د = د جـ

(ب) Δ أ ب د ~ Δ أ جـ د

(جـ) ب أ × جـ د = أ جـ × ب د

(د) $(أد)^٢$ = د ب × د جـ

(١٥) فى الشكل المقابل :

$\frac{ب هـ}{ب جـ}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(١٦) فى الشكل المقابل :

طول $\overline{د هـ}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $٣\sqrt{٢}$

(١٧) المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث متساوى الساقين .... القاعدة.

(أ) ينصف (ب) عموديًا على (جـ) يقطع (د) يوازى

(١٨) منصف الزاوية الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع .... الضلع المقابل لرأس هذه الزاوية.

(أ) ينصف (ب) ينطبق على (جـ) يوازى (د) يكون عموديًا على

(١٩) قياس الزاوية بين المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٨٠°

(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ب : أ جـ = ...

(أ) ٥ : ٤ (ب) ٥ : ٩

(جـ) ٩ : ٥ (د) ٩ : ٤

(٢١) فى الشكل المقابل :

جـ د = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦

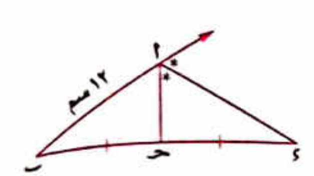
(جـ) ٤,٨ (د) ٥

(٢٢) فى الشكل المقابل :

جـ د = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٣) فى الشكل المقابل :

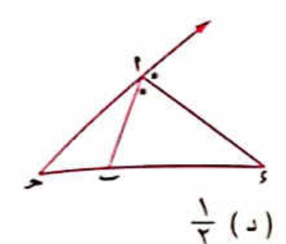


$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ هـ ، أ حـ = (س + ٥) سم ، أ ب = ٦ سم

، ب حـ = ٣ سم ، ب ء = ٩ سم فإن : س = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٦

(٢٤) فى الشكل المقابل :

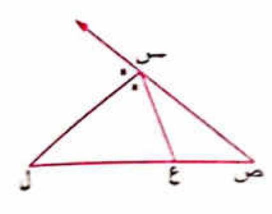


أ حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٨

(٢٥) فى الشكل المقابل :

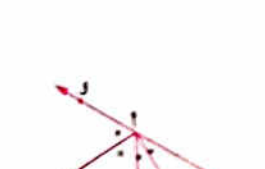


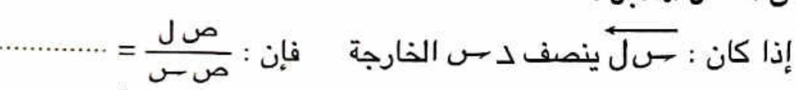
إذا كان أ ب : أ حـ = ٢ : ٣

فإن ب ء : ب حـ = ...

(أ) ٢ : ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٦) فى الشكل المقابل :



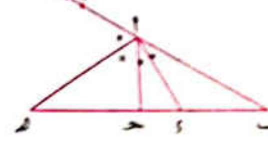


إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ينصف ∠ س الخارجة فإن : $\frac{\text{ص ل}}{\text{ص س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ص ع}}{\text{ع ل}}$ (ب) $\frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$

(جـ) $\frac{\text{ل ع}}{\text{ع س}}$ (د) $\frac{\text{س ع}}{\text{س ص}}$

(٢٧) مستعينًا بالشكل المقابل :



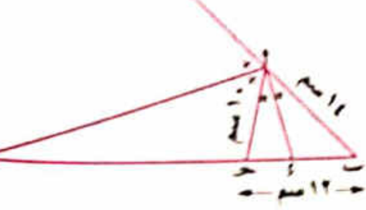
جميع العبارات التالية صحيحة عدا ....

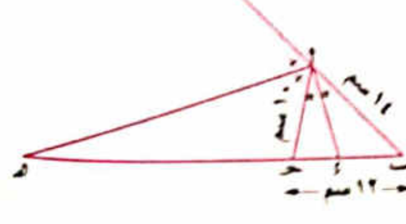
(أ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ (ب) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أ هـ}}$ (د) ∠ ء أ هـ قائمة.

(٢٨) فى الشكل المقابل :





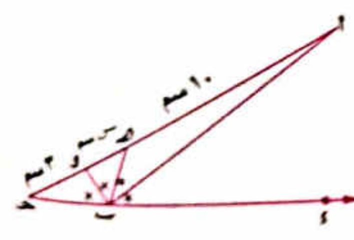


ء هـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٠ (د) ٣٥

(٢٩) فى الشكل المقابل :







س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤



(٣٠) فى الشكل المقابل :

حـ و = ... سم

(أ) ٣　　(ب) ٤

(جـ) ٥　　(د) ٦

(٣١) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أحـ}$ منصف للزاوية الداخلة للمثلث ٲ ب ء عند ∠ ٲ

، $\overleftrightarrow{أهـ} \perp \overleftrightarrow{أحـ}$ ، ب حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٣ سم

فإن : ب هـ : هـ ء = ...

(أ) ٧ : ٤　　(ب) ٧ : ٣　　(جـ) ٣ : ٤　　(د) ٤ : ٣

(٣٢) فى الشكل المقابل :

△ ٲ ب حـ فيه $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ المنصفان الداخلى والخارجى

للزاوية عند الرأس ٲ على الترتيب، ق (∠ ١) = ٣٦°

فإن : ق (∠ ٢) = ...°

(أ) ٣٦　　(ب) ٤٠　　(جـ) ٥٤　　(د) ١٠٨

(٣٣) فى الشكل المقابل :

ٲ ب = ٤ سم ، ٲ حـ = ٥ سم ، $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ٲ

فإن : م (△ ٲ ب ء) : م (△ ٲ حـ ء) = ...

(أ) ١٦ : ٢٥　　(ب) ٢٥ : ١٦

(جـ) ٤ : ٥　　(د) ٥ : ٢

(٣٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : م (△ ٲ ب حـ) = ٧٥ سم٢

فإن : م (△ ٲ ء ب) = ... سم٢

(أ) ٣٠　　(ب) $٢٣ \frac{١}{١٣}$

(جـ) $٥١ \frac{١٢}{١٣}$　　(د) ٤٥

(٣٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٲ حـ − ٲ ب = ٦ سم

فإن : ٲ حـ = ... سم

(أ) ١٣　　(ب) ١٤　　(جـ) ١٥　　(د) ١٦

(٣٦) فى الشكل المقابل :

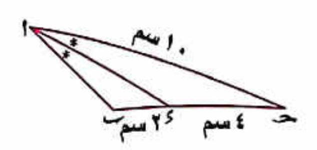
إذا كان : ا ب × ا حـ = ٨ ، ب ء × ء حـ = ٤

وكان : $\overleftarrow{اء}$ ينصف ∠ ب ا حـ

فإن : ا ء = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٧) فى الشكل المقابل :

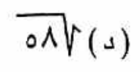


إذا كان : $\overleftarrow{اء}$ منصف داخلى للزاوية ب ا حـ

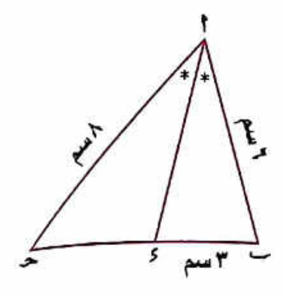
، ا حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ٤ سم ، ء ب = ٢ سم

فإن : طول $\overline{اء}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٤٢}$ (د) $\sqrt{٥٨}$



(٣٨) فى الشكل المقابل :



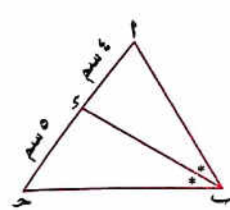
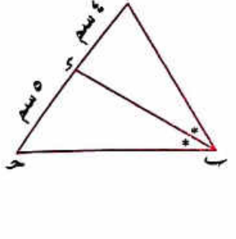
إذا كان : $\overleftarrow{اء}$ ينصف ∠ ا

فإن : ا ء = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦

(جـ) ٢١ (د) $\frac{٦ \times ٨}{٧}$

(٣٩) فى الشكل المقابل :

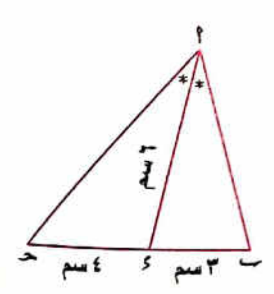
إذا كان : محيط △ ا ب حـ = ٢٧ سم

فإن : ب ء = ... سم

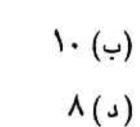
(أ) ٨ (ب) ١٠

(جـ) ٢ $\sqrt{١٥}$ (د) ٣ $\sqrt{١٥}$

(٤٠) فى الشكل المقابل :



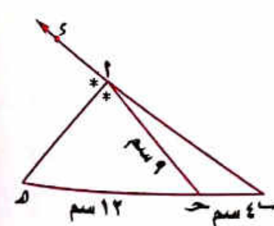
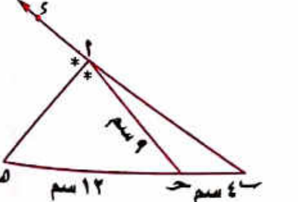
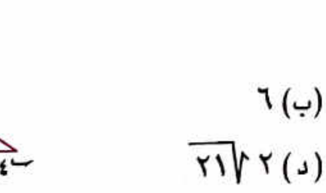
ا حـ = ... سم



(أ) ١٢ (ب) ١٠

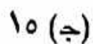
(جـ) ٩ (د) ٨

(٤١) فى الشكل المقابل :

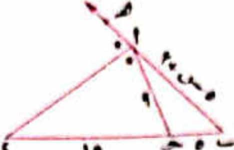
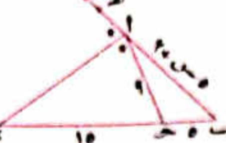
طول $\overline{اهـ}$ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{١٥}$ (ب) ٦



(جـ) ١٥ (د) ٢ $\sqrt{٢١}$

(٤٢) في الشكل المقابل :

٤ء = ...

(أ) ٢ (ب) ٤

(جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ (د) ٨ $\sqrt{٣}$

(٤٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{٤ء}}$ ينصف ∠ ٤ من الداخل ، $\overleftrightarrow{\text{٤هـ}}$ ينصف ∠ ٤ من الخارج

، ٤ء = ٣ سم ، ٤هـ = ٤ سم

فإن : ءهـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤٤) في الشكل المقابل :

ءحـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٣ $\sqrt{٦}$ (د) ٣

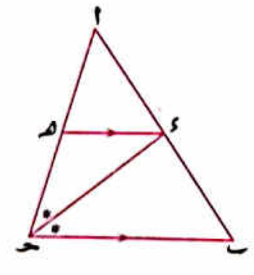
(٤٥) في الشكل المقابل :

٤ء = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٤ $\sqrt{٥}$

(جـ) ٦ $\sqrt{٥}$ (د) ٩ $\sqrt{٢}$

(٤٦) في الشكل المقابل :

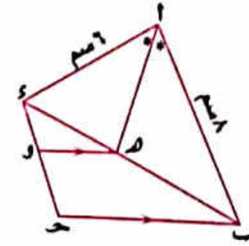


$\frac{\text{٤هـ}}{\text{هـحـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ءهـ}}{\text{بحـ}}$ (ب) $\frac{\text{٤ء}}{\text{٤ب}}$

(جـ) $\frac{\text{٤حـ}}{\text{حـب}}$ (د) $\frac{\text{٤ب}}{\text{حـب}}$

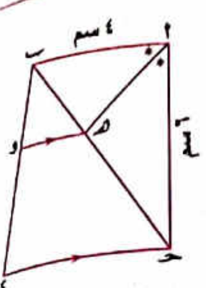
(٤٧) في الشكل المقابل :



$\frac{\text{ءو}}{\text{وحـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٨}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

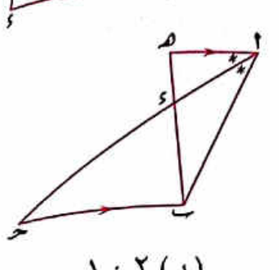


(٤٨) في الشكل المقابل :

$\frac{هـ و}{حـ ء}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$



(٤٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ حـ = ٣ أ ء

فإن أ ب : أ هـ = ...

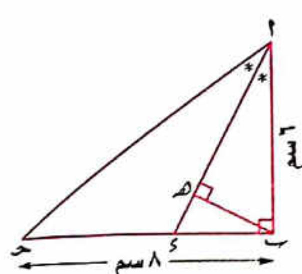
(أ) ٣ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ١

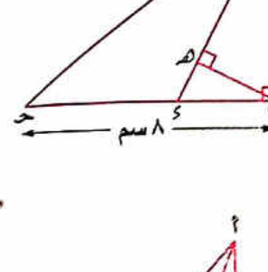
(٥٠) في الشكل المقابل :

هـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٢



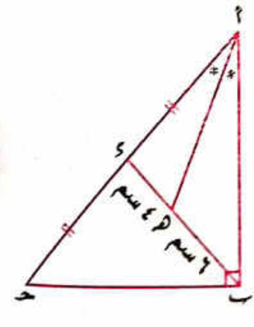


(٥١) في الشكل المقابل :

طول $\overline{ءهـ}$ = ... سم

(أ) $\frac{٥}{٢}\sqrt{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}\sqrt{٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}\sqrt{٣}$



(٥٢) في الشكل المقابل :

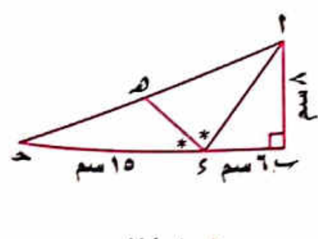
ق(∠ ب) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ ء

، ب هـ = ٦ سم ، هـ ء = ٤ سم

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... سم .

(أ) ١٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٠ (د) ٨



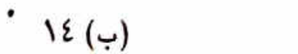
(٥٣) في الشكل المقابل :

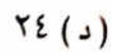
$\overline{أب} \perp \overline{بحـ}$ ، $\overrightarrow{ءهـ}$ ينصف ∠ أ ء حـ

فإن مساحة (△ أ ء هـ) = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ٤٠ (د) ٢٤







(٥٤) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{حء}$ ينصف (∠ أحب) ، أء = هـب = ٨ سم

، $\frac{حب}{حأ} = \frac{٥}{٤}$

فإن : ءهـ = ... سم

(أ) ٨　　(ب) ٦

(جـ) ١٢　　(د) ١٠

(٥٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{حس}$ ينصف ∠ ح ، $\overleftarrow{سهـ}$ // $\overline{بح}$

، $\frac{بء}{أء} = \frac{٣}{٢}$　فإن : سهـ = ... سم .

(أ) ٦　　(ب) ٤　　(جـ) ٨　　(د) ١٠

(٥٦) فى الشكل المقابل :

$\frac{أو}{وح}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$　　(ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$　　(د) $\frac{١}{٢}$

(٥٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أح = ٦ سم ، أب = ٤ سم

فإن : $\frac{بء}{بح}$ = ...

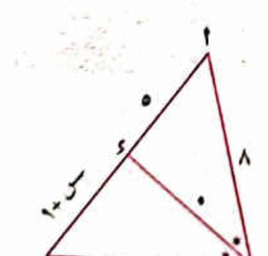
(أ) $\frac{٢}{٣}$　　(ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\frac{٢}{٥}$　　(د) $\frac{٥}{٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

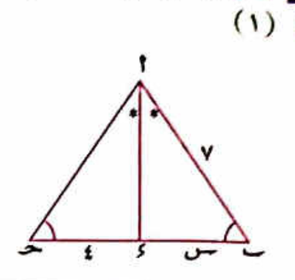
(١)



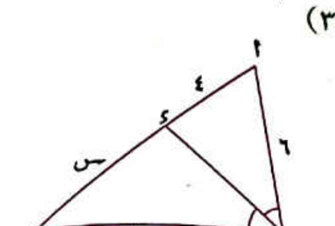
(٢)

٢ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) ثم أوجد محيط Δ أ ب حـ :

(١)



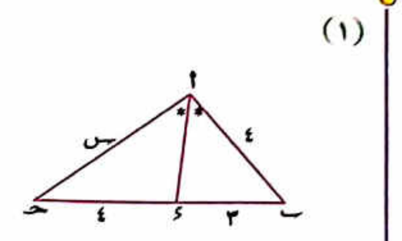
(٢)



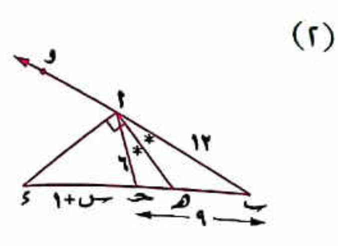
(٣)

٣ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول أء :

(١)



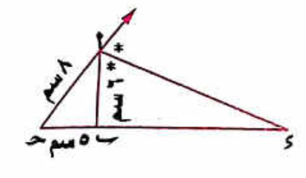
(٢)



٤ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، رسم ب ء ينصف ∠ أ ب حـ ويقطع أ حـ في ء
فإذا كان : أ ء = ٢,٤ سم فأوجد : طول أ حـ «٦ سم»

٥ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٧ سم
، رُسم أ ء ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ب حـ في ء أوجد : طول كل من ب ء ، ء حـ «٤ سم ، ٣ سم»

٦ في الشكل المقابل :

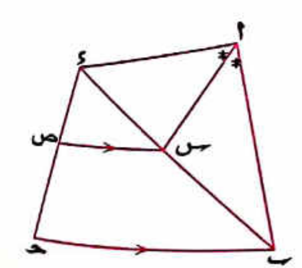


المثلث أ ب حـ فيه : أ ء ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ
، ويقطع حـ ب في ء فإذا كان : أ ب = ٦ سم
، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ٥ سم أوجد : طول كل من ب ء ، أ ء «١٥ سم ، ٦ $\sqrt{7}$ سم»

٧ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ٦ سم ، نصفت الزاوية الخارجة عند
أ بالمنصف أ ء الذي قطع ب حـ في ء أوجد : طول كل من حـ ء ، أ ء «٨ سم ، $\sqrt{14}$ سم»

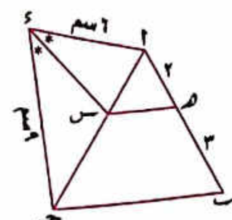
٨ أ ب حـ مثلث محيطه ٢٧ سم ، رسم ب ء ينصف ∠ ب ويقطع أ حـ في ء ، إذا كان أ ء = ٤ سم
، حـ ء = ٥ سم أوجد : طول كل من أ ب ، ب حـ ، ب ء «٨ سم ، ١٠ سم ، ٢ $\sqrt{15}$ سم»

٩ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي ، رسم أ س ينصف ∠ أ
ويقطع ب ء في س ثم رسم س ص // ب حـ
قاطعًا حـ ء في ص أثبت أن : $\frac{ء ص}{ص حـ} = \frac{أ ء}{أ ب}$

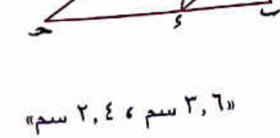
١٠ فى الشكل المقابل :



$\overline{أ ب ح ء}$ شكل رباعى فيه : $\overleftrightarrow{ء س}$ ينصف ∠ ء ، أ هـ : هـ ب = ٢ : ٣ ، أ ء = ٦ سم ، ء ح = ٩ سم

أثبت أن : $\overline{هـ س}$ // $\overline{ب ح}$

١١ فى الشكل المقابل :



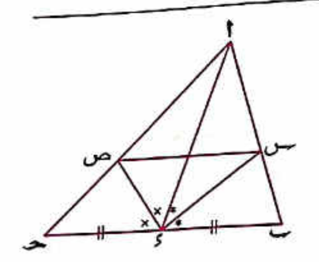
$\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ ح ، $\overline{هـ ء}$ // $\overline{أ ح}$

أثبت أن : $\frac{ب هـ}{هـ أ} = \frac{ب أ}{أ ح}$ وإذا كان : أ ح = ٩ سم ، أ ب = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$

«٣,٦ سم ، ٢,٤ سم»

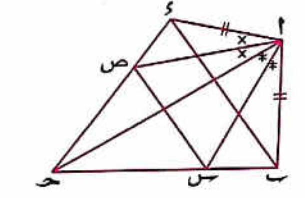
١٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{أ ء}$ متوسط فى △ أ ب ح ، $\overleftrightarrow{ء س}$ ينصف ∠ أ ء ب ، $\overleftrightarrow{ء ص}$ ينصف ∠ أ ء ح

أثبت أن : $\overline{س ص}$ // $\overline{ب ح}$

١٣ فى الشكل المقابل :



أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء

، $\overrightarrow{أ س}$ ينصف ∠ ب أ ح ويقطع $\overline{ب ح}$ فى س

، $\overrightarrow{أ ص}$ ينصف ∠ ء أ ح ويقطع $\overline{ح ء}$ فى ص أثبت أن : $\overline{س ص}$ // $\overline{ب ء}$

١٤ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسم $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب ح}$ فى ء ، إذا كان طول $\overline{ب ء}$ = ٢٤ سم ، ب أ : أ ح = ٣ : ٥ فأوجد : محيط △ أ ب ح «١٩٢ سم»

١٥ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ح = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم ، رسم $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب ح}$ فى ء ، ورسم $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب ح}$ فى هـ

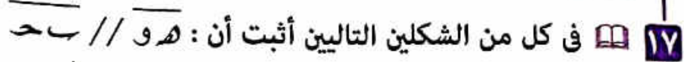
أوجد : طول كل من $\overline{ء هـ}$ ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{أ هـ}$ «٨ سم ، ٢ $\sqrt{٦}$ سم ، ٢ $\sqrt{١٠}$ سم»

١٦ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم ، ح أ = ٦ سم ، رسم $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب ح}$ فى ء ، ورسم $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ح ب}$ فى هـ

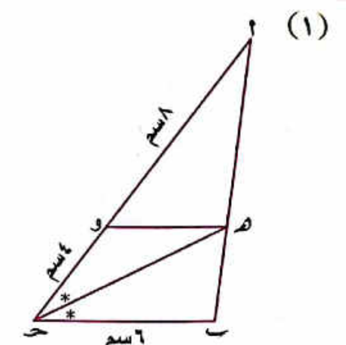
(١) أثبت أن : أب متوسط فى المثلث أحـ هـ

(٢) أوجد النسبة بين مساحة المثلث أ ء هـ ومساحة المثلث أحـ هـ «$\frac{٢}{٣}$»

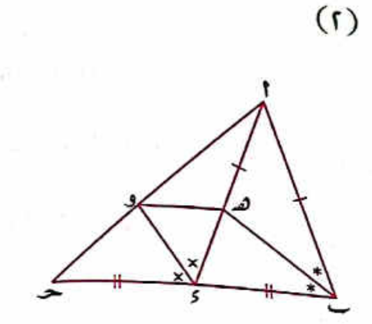
١٧ فى كل من الشكلين التاليين أثبت أن : هـ و // ب حـ



(١)



(٢)



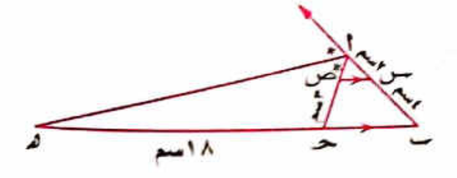
١٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب > أ حـ ، ء ∈ أ ب بحيث ب ء = أ حـ ، رسم أ هـ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ء حـ فى هـ ثم رسم هـ و // ب أ ويقطع أ حـ فى و أثبت أن : ء و // ب حـ

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ أ ء ، رسم حـ س فقطع ب أ فى ص ، ونُصفت ∠ ء حـ س بالمنصف حـ ع فقطع أ ء فى ع أثبت أن : $\frac{أ ص}{ص س} = \frac{ء ع}{ع س}$

٢٠ أ ب حـ مثلث ، أ ء ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ب حـ فى ء ، نصفت الزاويتان ب أ ء ، حـ أ ء بالمنصفين أ هـ ، أ و يقطعان ب حـ فى هـ ، و على الترتيب. أثبت أن : $\frac{ب هـ}{هـ ء} \times \frac{و ء}{و حـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$

٢١ أ ب حـ مثلث ، نصفت ∠ أ ، ∠ ب ، ∠ حـ بالمنصفات أ ء ، ب هـ ، حـ و فقطعت ب حـ ، أ حـ ، أ ب فى ء ، هـ ، و على الترتيب أثبت أن : $\frac{ب ء}{ء حـ} \times \frac{حـ هـ}{هـ أ} \times \frac{أ و}{و ب} = ١$

٢٢ فى الشكل المقابل :



س ص // ب حـ ، أ س = ٢ سم

، س ب = ٤ سم ، ص حـ = ٣ سم أوجد : طول أ ص

، إذا كان : أ هـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ ويقطع ب حـ فى هـ

حيث حـ هـ = ١٨ سم أوجد : طول ب حـ

«١.٥ سم ، ٦ سم»

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ب ء ، أ ء = ء حـ ، أ هـ ينصف ∠ ب أ ء ويقطع ب ء فى هـ ، ء و ينصف ∠ ب ء حـ ويقطع ب حـ فى و أثبت أن : هـ و // ء حـ

٢٤ في الشكل المقابل :

$\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أس}$ ينصف ∠ء أ هـ

أثبت أن : (١) $\frac{ءس}{سهـ} = \frac{ءب}{هـحـ}$

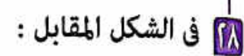
(٢) $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{أب}{أحـ}$

---

٢٥ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، رسم $\overleftrightarrow{أس}$ ينصف ∠ب أ ء ويقطع $\overline{بء}$ في س ، $\overleftrightarrow{ءص}$ ينصف ∠أ ء حـ ويقطع $\overline{أحـ}$ في ص أثبت أن : $\overline{سص} // \overline{أء}$

---

٢٦ $\overline{أب}$ وتر في دائرة ، ء ∈ $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر بحيث $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$ ، هـ منتصف $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر ، رسمت $\overline{ءهـ}$ فقطعت $\overline{أب}$ في حـ أوجد : النسبة بين م (Δ أ ء هـ) ، م (Δ ب ء هـ) «$\frac{٢}{٣}$»



---

٢٧ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، حـ تنتمي إلى الدائرة ، رسم مماس للدائرة عند حـ فقطع $\overleftrightarrow{أب}$ في هـ وقطع المماس لها عند أ في ء أثبت أن : $\frac{أم}{مهـ} = \frac{ءحـ}{ءهـ}$

---

٢٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، $\overline{بء}$ مماسة للدائرة عند ب

أثبت أن : ء ب × ب أ = ء أ × ب حـ

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

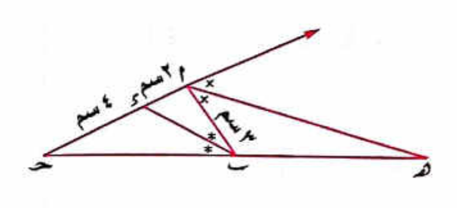
$\frac{أهـ}{هـء} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) $\frac{٢}{٣}$

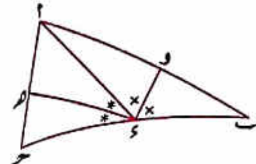
(٢) في الشكل المقابل :

ب هـ = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

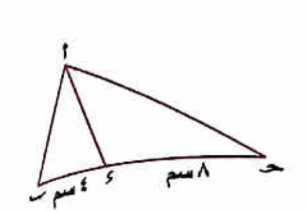


(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ٣ أ هـ = ٤ هـ حـ ، ٢ أ و = ٣ و ب ، ب حـ = ١٧ سم

فإن : ء حـ = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

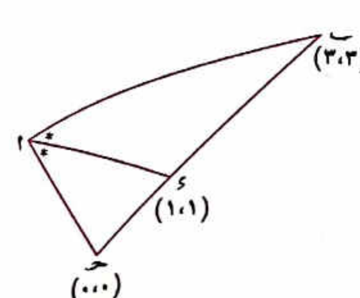


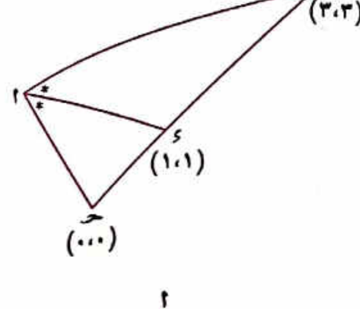
(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠ء أ ب) = ٢ ق (∠ء أ حـ)

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩



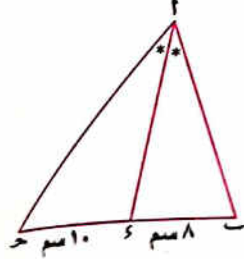


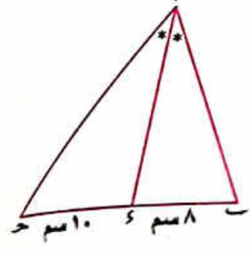
(٥) فى الشكل المقابل :

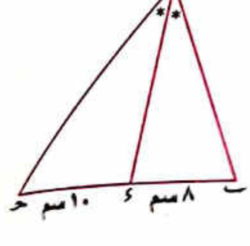
$\frac{أ حـ}{أ ب}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$







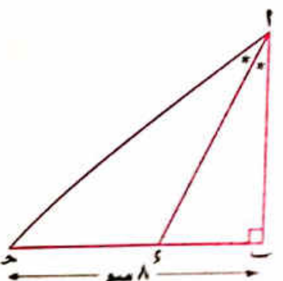
(٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ب أ حـ

أى الشروط الآتية يكفى لإيجاد طول $\overline{أ ب}$ ؟

(أ) أ حـ − أ ب = ٥ سم (ب) محيط Δ أ ب حـ = ٥٤ سم

(جـ) أ ء = ٤ $\sqrt{١٥}$ سم (د) جميع ما سبق.



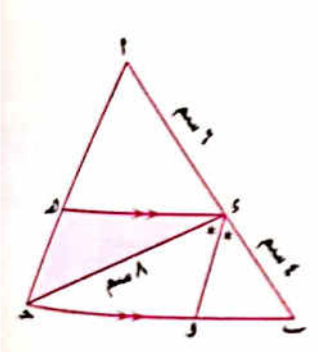
(٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ء حـ})} = \frac{٣}{٥}$

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٠



(٨) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : مساحة (Δ ء ب و) = ١٠ سم^{٢}

فإن : مساحة (Δ ء هـ حـ) = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٤



(٩) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة م عند ب ، ق(⌢ب س) = ق(⌢س ص)

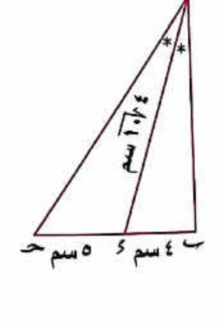
، ب ء = ٢ $\sqrt{٣}$ سم ، أ ء = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : أ ص = ... سم

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

(١٠) في الشكل المقابل :

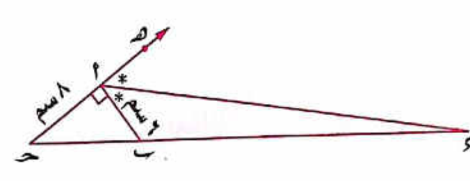


محيط △ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٣٢

(جـ) ٢٨ (د) ٢٤

(١١) في الشكل المقابل :

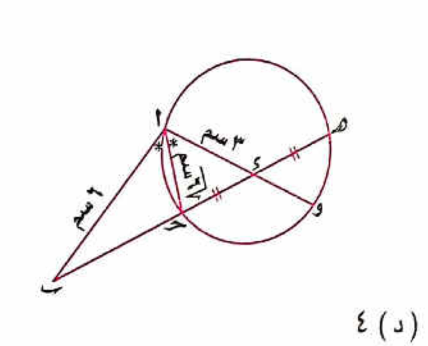


مساحة △ أ ب ء = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨

(جـ) ٥٤ (د) ٧٢

(١٢) في الشكل المقابل :

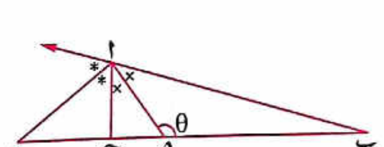


$\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ، ء منتصف $\overline{\text{هـ حـ}}$ ، أ حـ = $\sqrt{٦}$ سم

، أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم فإن : ء و = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

(١٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ء = ٨ سم ، أ هـ = ٦ سم

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

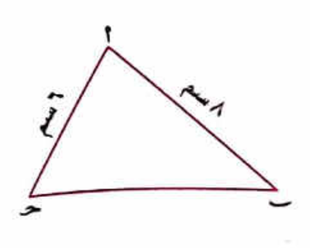
(١٤) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{د و}}{\text{ب جـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٥) فى الشكل المقابل :



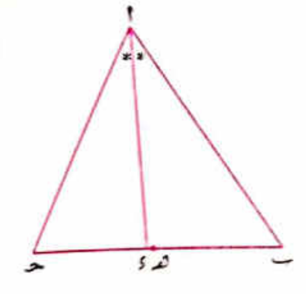
إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

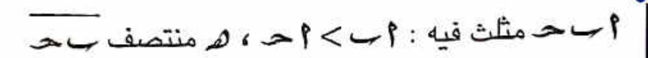
فإن : ب جـ = ... سم

(أ) ٣ $\sqrt{١٠}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢١}$ (جـ) ١٢ (د) ١٠

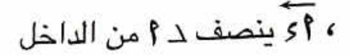
---

٢ فى الشكل المقابل :





أ ب جـ مثلث فيه : أ ب > أ جـ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

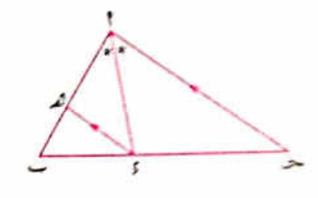


، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ أ من الداخل

أثبت أن : $\frac{\text{هـ د}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب} - \text{أ جـ}}{\text{أ ب} + \text{أ جـ}}$

---

٣ فى الشكل المقابل :



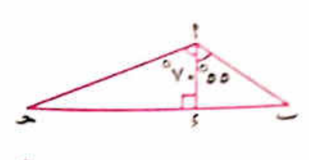
أ ب جـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الداخل

، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى هـ

أثبت أن : د هـ = $\frac{\text{أ ب} \times \text{أ جـ}}{\text{أ ب} + \text{أ جـ}}$

---

٤ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ × ب د = ٣٦ سم^{٢}

أوجد : مساحة (△ أ ب جـ)

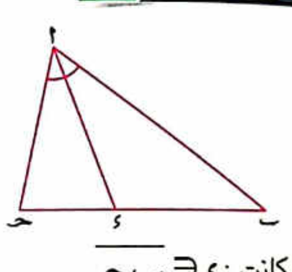
«١٨٠ سم^{٢}»



تابع منصف الزاوية والأجزاء المتناسبة
«عكس نظرية ③»



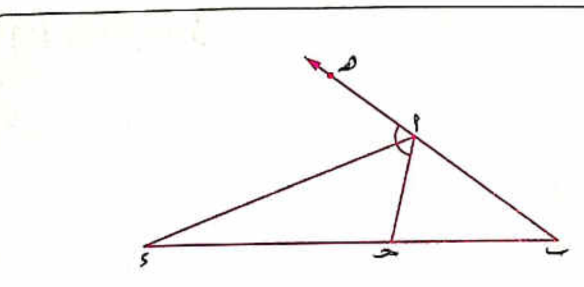
عكس نظرية ٣



إذا كانت : ء ∈ $\overline{ب ح}$

بحيث : $\frac{ب ء}{ء ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$

فإن : $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ ح



إذا كانت : ء ∈ $\overleftrightarrow{ب ح}$ ، ء ∉ $\overline{ب ح}$

بحيث : $\frac{ب ء}{ء ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$

فإن : $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن Δ أ ب ح

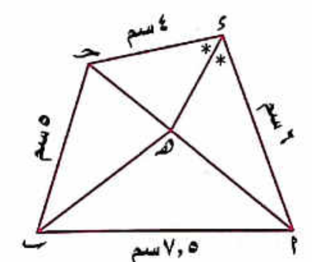
مثال ١

في الشكل المقابل :

أ ب ح ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٧,٥ سم ، ب ح = ٥ سم

، ح ء = ٤ سم ، أ ء = ٦ سم ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ينصف ∠ أ ء ح ويقطع $\overline{أ ح}$ في هـ

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب ح



الحل

في Δ أ ء ح : ∵ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ينصف ∠ أ ء ح

∴ $\frac{أ هـ}{هـ ح} = \frac{أ ء}{ء ح} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\frac{أ ب}{ب ح} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أ هـ}{هـ ح} = \frac{أ ب}{ب ح}$

∴ في Δ أ ب ح : $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب ح

(وهو المطلوب)

مثال ٢

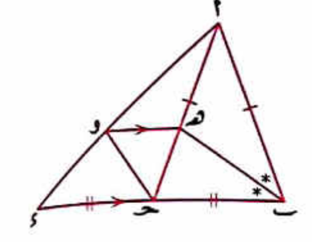
أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث ب حـ = حـ ء

، نصفت ∠ أ ب حـ بمنصف قطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، رسم $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ فى و

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ينصف ∠ أ حـ ء



الحل



فى Δ أ ب حـ :

∵ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

لكن : أ ب = أ حـ ، ب حـ = حـ ء (معطى)

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$ (١)

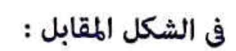
، فى Δ أ حـ ء : ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$

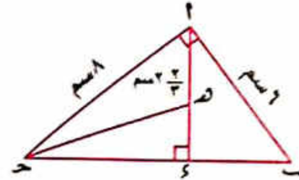
∴ فى Δ أ حـ ء : $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ ينصف ∠ أ حـ ء **(وهو المطلوب)**



مثال ٣



فى الشكل المقابل :



المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم ، أ هـ = $2\frac{2}{3}$ سم

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء

الحل

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ∴ (ب حـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

∴ ب حـ = ١٠ سم ، ∵ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ Δ ء أ حـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء حـ}}{٨} = \frac{٨}{١٠}$ ∴ ء حـ = ٦,٤ سم

، ∵ Δ ء ب أ ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$ ∴ $\frac{٦}{١٠} = \frac{\text{أ ء}}{٨}$

∴ أ ء = ٤,٨ سم ∴ ء هـ = ٤,٨ − $2\frac{2}{3}$ = $2\frac{2}{15}$ سم

، ∵ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{٨}{٦,٤} = \frac{٥}{٤}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{2\frac{2}{3}}{2\frac{2}{15}} = \frac{٥}{٤}$

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٠ سم ، أ ء = ٦ سم ، ء حـ = ٩ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث أ هـ = ٨ سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى س

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

حقيقة

منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

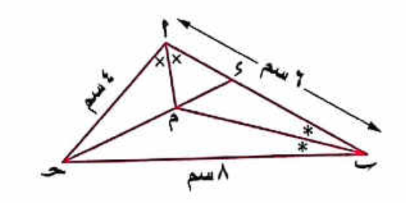
ففى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ منصفات زوايا Δ أ ب حـ تتقاطع فى نقطة م



مثال ٤

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم

، $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

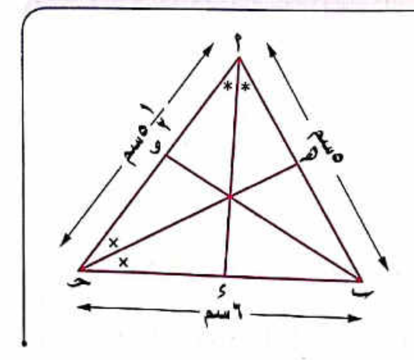
∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا Δ أ ب حـ ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ فى Δ أ ب حـ : $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أ ء}}{٦ - \text{أ ء}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ أ ء = ٦ − أ ء ∴ ٣ أ ء = ٦ ∴ أ ء = ٢ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = $٥\frac{١}{٢}$ سم

، ب حـ = ٦ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

أوجد : طول $\overline{\text{أ و}}$

تمارين 8

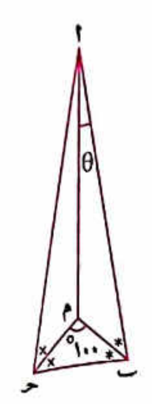
على عكس نظرية ③

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



$\theta =$ ....

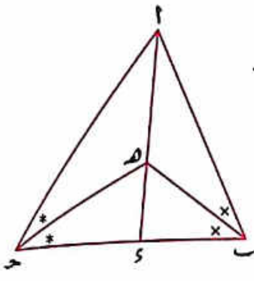
(أ) °١٠

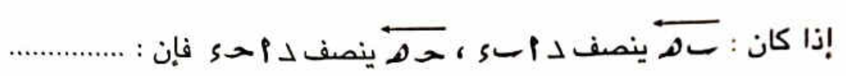
(ب) °٢٠

(جـ) °٤٠

(د) °٨٠

(٢) فى الشكل المقابل :



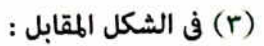


إذا كان : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ء ، $\overrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء فإن : ....

(أ) ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

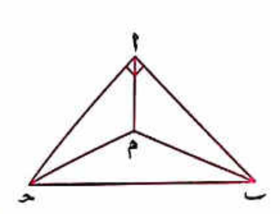
(ب) هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

(جـ) هـ تقسم $\overline{\text{أ ء}}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ



(د) $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

(٣) فى الشكل المقابل :

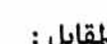


$\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، م هى نقطة تقاطع

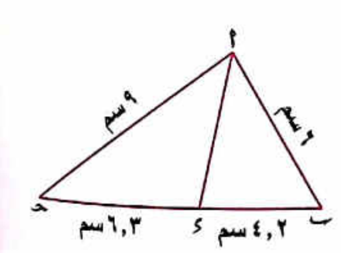
منصفات الزوايا الداخلة للمثلث أ ب حـ

فإن : ق (∠ ب م حـ) = ...

(أ) °١٠٠ (ب) °١٢٠ (جـ) °١٣٥ (د) °١٤٥



(٤) فى الشكل المقابل :



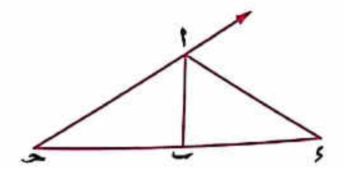
أى مما يأتى صحيح :

(أ) Δ ب أ ء ~ Δ ب حـ أ

(ب) أ ب × أ حـ = ب ء × ء حـ

(جـ) ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

(د) $\text{أ ء} = \sqrt{\text{ب ء} \times \text{ء حـ} - \text{أ ب} \times \text{أ حـ}}$



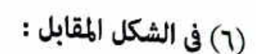
(٥) في الشكل المقابل :

أي مما يأتي يكون كافيًا لإثبات أن $\overleftarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجة عن

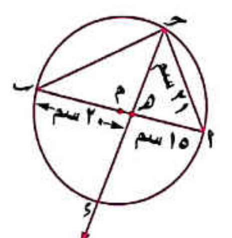
Δ أ ب حـ عند الرأس أ ؟

(أ) $\frac{أء}{أحـ} = \frac{ءب}{بحـ}$ (ب) $\frac{أب}{أحـ} = \frac{بء}{بحـ}$

(جـ) $\frac{أب}{أحـ} = \frac{حـء}{ءب}$ (د) أب × ءحـ = أحـ × ءب



(٦) في الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{أب}$ قطر فيها ، هـ $\in \overline{أب}$

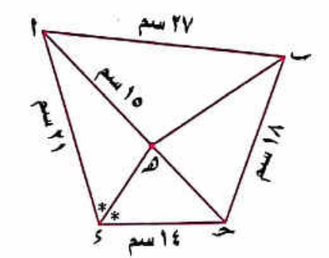
، أهـ = ١٥ سم ، ب هـ = ٢٠ سم

، أحـ = ٢١ سم ، $\overleftarrow{حـ هـ}$ يقطع الدائرة في ء

فإن : ق $(\overset{\frown}{أء})$ = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٢٢,٥ (د) ٦٠

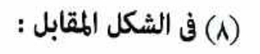
(٧) في الشكل المقابل :



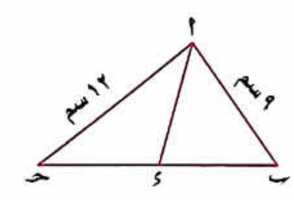
أي مما يأتي خطأ ؟

(أ) حـ هـ = ١٠ سم (ب) $\overleftarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب حـ

(جـ) ب هـ = $٤\sqrt{٢١}$ سم (د) ء هـ = $١٢\sqrt{٢}$ سم



(٨) في الشكل المقابل :



إذا كان : م $(\Delta$ أ ب ء$)$ = ٣٠ سم^{٢} ، م $(\Delta$ أ حـ ء$)$ = ٤٠ سم^{٢}

فإن : $\overleftarrow{أء}$ ....

(أ) عمودي على $\overline{ب حـ}$ (ب) ينصف ∠ ب أ حـ

(جـ) يمر بمنتصف $\overline{ب حـ}$ (د) كل ما سبق.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم ، ب حـ = ١٠,٥ سم ، ء $\in \overline{ب حـ}$

حيث ب ء = ٤,٢ سم **أثبت أن :** $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

٢ أ ب حـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ هي على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٣,٦ من السنتيمترات

، ء $\in \overleftarrow{ب حـ}$ بحيث حـ ء = ٦ سم

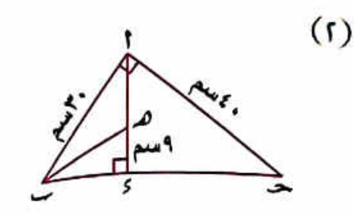
أثبت أن : $\overleftarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب حـ عند أ

٣ في كل من الشكلين الآتيين أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

(١)



(٢)



٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٦ سم ، أ ء = ٤ سم

، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في هـ

(١) أوجد : قيمة النسبة $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$ (٢) أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ ب حـ ء

«$\frac{٣}{٢}$»

٥ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث

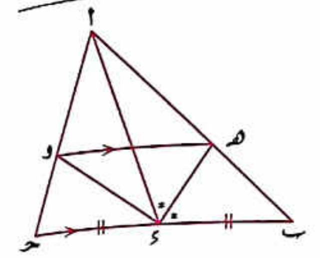
٢ أ هـ = ٣ هـ ء ، رسم $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في و أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

٦ في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ أ ء ب ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن :

(١) $\overleftarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ أ ء حـ (٢) $\overline{\text{هـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ء و}}$



٧ أ ب حـ مثلث ، س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب س = ٦ سم ، أ س = ٩ سم

، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ء ، أخذت نقطة هـ على $\overline{\text{أ حـ}}$

بحيث : أ هـ = ٦ سم علمًا بأن : أ حـ = ١٠ سم

(١) أوجد : قيمة $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ (٢) أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

(٣) أثبت أن : $\overleftarrow{\text{س هـ}}$ ينصف ∠ أ س حـ

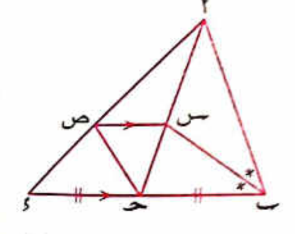
«$\frac{٣}{٢}$»

٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب حـ = حـ ء

، $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

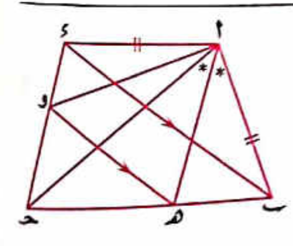
أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ ينصف ∠ أ حـ ء



٩ في الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

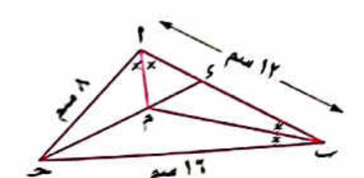
أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ و}}$ ينصف ∠ حـ أ ء



١٠ ⍰ ا ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث حـ ء = ا ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ // $\overline{\text{ء ا}}$ ويقطع $\overline{\text{ا ب}}$ في هـ
، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ا حـ}}$ في و

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ ا ب حـ

١١ في الشكل المقابل :



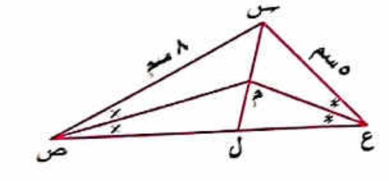
ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ١٢ سم ، ا حـ = ٨ سم

، ب حـ = ١٦ سم ، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ا ب حـ

، $\overrightarrow{\text{ا م}}$ ينصف ∠ ب ا حـ أوجد : طول $\overline{\text{ا ء}}$

«٤ سم»

١٢ في الشكل المقابل :

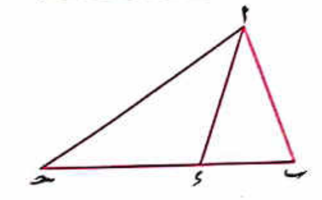


$\overrightarrow{\text{ع م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص م}}$ منصفا ∠ ع ، ∠ ص على الترتيب

، س ص = ٨ سم ، س ع = ٥ سم

أثبت أن : ٨ ل ع = ٥ ل ص

١٣ في الشكل المقابل :



إذا كان ا حـ : ء حـ : ا ب : ب ء = ١٥ : ١٠ : ٩ : ٦

فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ ب ا حـ

١٤ ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٥ سم ، ا حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

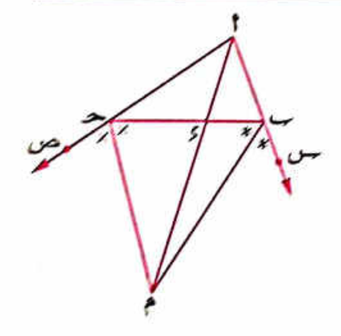
بحيث : ب ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ بحيث $\overline{\text{ا هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ء}}$

(١) **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ ب ا حـ

(٢) **أوجد :** طول $\overline{\text{ب هـ}}$

«٩ سم»

١٥ في الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ حـ ب س

، $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ ينصف ∠ ب حـ ص

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ا م}}$ ينصف ∠ ب ا حـ

١٦ أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه أب ، ب جـ ، جـ أ هي على الترتيب ٦ ، ١٢ ، ٩ من السنتيمترات ، ء ∈ أب

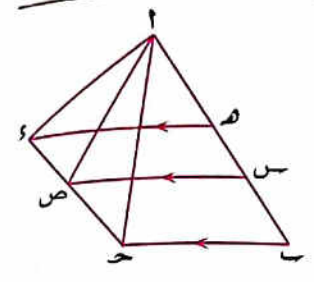
بحيث : أ ء = ٢ سم ، رسم ء هـ // ب جـ ويقطع أ جـ في هـ

أوجد : طول أ هـ ثم أثبت أن : ب هـ ينصف ∠ أ ب جـ «٣ سم»

---

١٧ في الشكل المقابل :





هـ ء // س ص // ب جـ

، أ ء × ب س = أ جـ × هـ س

أثبت أن : أ ص ينصف ∠ جـ أ ء

---

١٨ دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، رسم مستقيم يوازي م ن فقطع الدائرة م في ب ، جـ

، والدائرة ن في ء ، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع ب م ، هـ ن في النقطة و

أثبت أن : و أ ينصف ∠ م و ن

---

١٩ أ ب قطر في دائرة ، أ جـ وتر فيها ، رسم جـ ء مماسًا للدائرة عند جـ فقطع أ ب في ء إذا كانت

هـ ∈ أ ب بحيث $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$

أثبت أن : (١) جـ أ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ء هـ عند جـ

(٢) $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم

، ب جـ = ١٠ سم ، ء ∈ ب جـ بحيث ب ء = ٤ سم

، رسم ب هـ ⊥ أ ء ويقطع أ ء ، أ جـ في هـ ، و على الترتيب.

(١) أثبت أن : أ ء ينصف ∠ ب أ جـ

(٢) أوجد : م (△ أ ب و) : م (△ جـ ب و)

«٢»



تطبيقات التناسب فى الدائرة



قوة النقطة بالنسبة لدائرة

تعريف

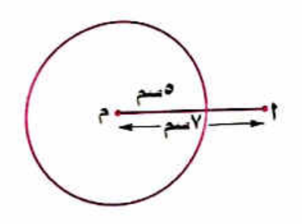
قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى $ق_م(أ)$

حيث : $ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2$

فمثلاً فى الشكل المقابل :

إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

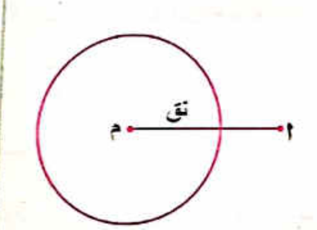
بحيث : م أ = ٧ سم فإن : $ق_م(أ) = ٧^2 - ٥^2 = ٢٤$



ملاحظة ١

يمكن تحديد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة م عن طريق معرفة $ق_م(أ)$ فإذا كان :

- $ق_م(أ) > ٠$ فإن : أ تقع خارج الدائرة.
- $ق_م(أ) = ٠$ فإن : أ تقع على الدائرة.
- $ق_م(أ) < ٠$ فإن : أ تقع داخل الدائرة.



مثال ١

إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تقع فى مستويها فحدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى كل حالة مما يأتى ثم احسب بعدها عن مركز الدائرة فى كل حالة :

١ $ق_م(أ) = ١٣$ ٢ $ق_م(أ) =$ صفر ٣ $ق_م(أ) = -١١$

الحــل

∵ طول قطر الدائرة = ١٢ سم ∴ نق = ٦ سم

١ ∵ ق‍م (أ) = ١٣ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة.

، ∵ ق‍م (أ) = (م أ)^{٢} − نق^{٢} ∴ ١٣ = (م أ)^{٢} − ٣٦ ∴ م أ = ٧ سم

٢ ∵ ق‍م (أ) = صفر ∴ أ تقع على الدائرة. ∴ م أ = ٦ سم

٣ ∵ ق‍م (أ) = −١١ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة. ، ∵ ق‍م (أ) = (م أ)^{٢} − نق^{٢}

∴ −١١ = (م أ)^{٢} − ٣٦ ∴ م أ = ٥ سم

حاول بنفسك

حدد موضع كل من النقط أ ، ب ، حـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان :

١ ق‍م (أ) = ١١ **٢** ق‍م (ب) = صفر **٣** ق‍م (حـ) = −١٦

ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة م

ملاحظة ٢

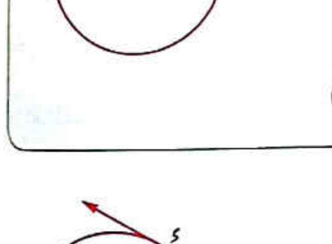
إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م

فإن : ق‍م (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢}

= (أ م − نق) (أ م + نق)

= أ ب × أ حـ = (أ ء)^{٢}

∴ طول القطعة المستقيمة المماسة المرسومة من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{\text{ق‍م (أ)}}$



◄ **فمثلاً فى الشكل المقابل :**

إذا كانت أ نقطة تقع خارج الدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ يمس الدائرة فى ء

فإذا كان : أ ب = ٤ سم فإنه يمكن إيجاد ق‍م (أ)



بإحدى الطرق الآتية :

- **باستخدام التعريف :** ق‍م (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} = (١٠)^{٢} − (٦)^{٢} = ٦٤
- **باستخدام الملاحظة السابقة :** ق‍م (أ) = أ ب × أ حـ = ٤ × ١٦ = ٦٤

ومما سبق يمكن إيجاد : أ ء حيث أ ء = $\sqrt{\text{ق‍م (أ)}}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

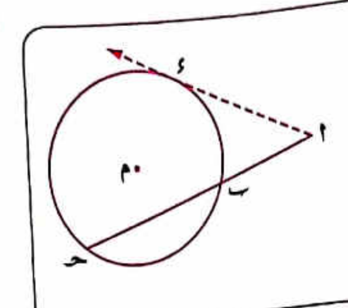
لاحظ أنه

فى الشكل المقابل :

إذا كانت : أ نقطة خارج الدائرة

، $\overline{أحـ}$ تقطع الدائرة فى ب ، حـ

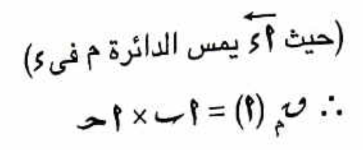
فإن : ق م (أ) = أ ب × أ حـ



ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة حيث :

ق م (أ) = $(أء)^2$ (حيث $\overleftrightarrow{أء}$ يمس الدائرة م فى ء)

، ∵ $(أء)^2$ = أ ب × أ حـ ∴ ق م (أ) = أ ب × أ حـ

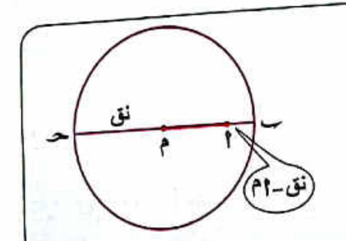


ملاحظة ٣

إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن :

ق م (أ) = $(أ م)^2$ − $نق^2$ = (أ م − نق) (أ م + نق)

= − (نق − أ م) (أ م + نق) = − أ ب × أ حـ

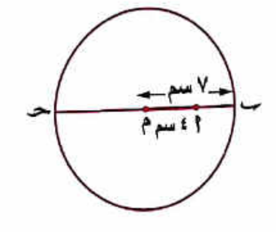


◀ فمثلًا فى الشكل المقابل :

إذا كانت : أ نقطة تقع داخل الدائرة التى طول

نصف قطرها ٧ سم وتبعد عن مركزها ٤ سم

فإن : ق م (أ) = − أ ب × أ حـ = −٣ × ١١ = −٣٣



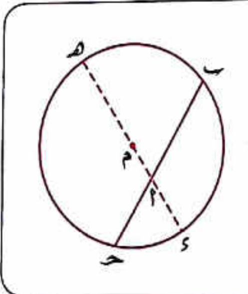
لاحظ أنه

فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{ب حـ}$ وترًا فى الدائرة م

، أ ∈ $\overline{ب حـ}$

فإن : ق م (أ) = − أ ب × أ حـ

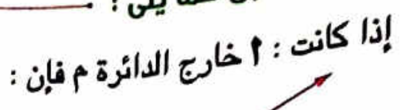


ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة كما يلى :

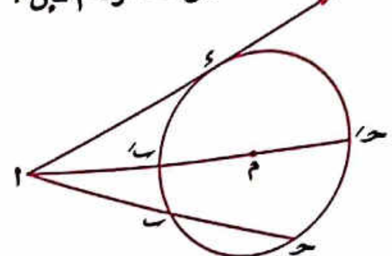
ق م (أ) = − أ ء × أ هـ (حيث $\overline{ءهـ}$ قطر)

، ∵ أ ء × أ هـ = أ ب × أ حـ ∴ ق م (أ) = − أ ب × أ حـ

يمكن تلخيص ما سبق كما يلى :

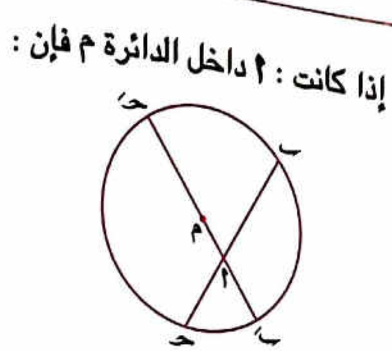


إذا كانت : أ خارج الدائرة م فإن :



ق م (أ) = أب × أحـ = أبَ × أحـَ = (أء)^2

إذا كانت : أ داخل الدائرة م فإن :



ق م (أ) = - أب × أحـ = - أبَ × أحـَ

مثال ٢

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٧ سم ، رسم من أ مستقيم يقطع الدائرة فى حـ ، ء بحيث حـ ∈ أء فإذا كان : حـ أ = ٥ سم فاحسب : طول الوتر حـ ء

الحل

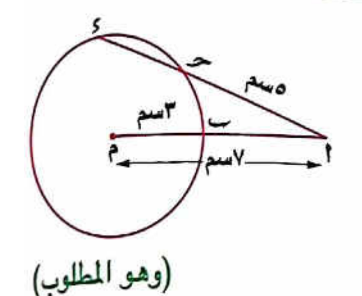
∵ ق م (أ) = (أ م)^2 - نق^2 = ٤٩ - ٩ = ٤٠

، ∵ ق م (أ) = أحـ × أء

∴ ٤٠ = ٥ × أء

∴ أء = ٨ سم

∴ حـ ء = أء - أحـ = ٨ - ٥ = ٣ سم



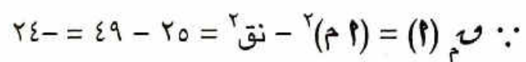
(وهو المطلوب)

مثال ٣

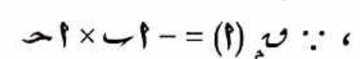
دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر ب حـ يمر بالنقطة أ بحيث أب = ٣ أحـ

احسب : [١] طول الوتر ب حـ [٢] بُعد الوتر ب حـ عن مركز الدائرة.

الحل

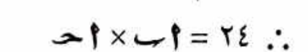


∵ ق م (أ) = (أ م)^2 - نق^2 = ٢٥ - ٤٩ = -٢٤



، ∵ ق م (أ) = - أب × أحـ

∴ -٢٤ = - أب × أحـ



∴ ٢٤ = أب × أحـ

، ∵ أب = ٣ أحـ

∴ ٢٤ = ٣ أحـ × أحـ

∴ (أحـ)^2 = ٨

∴ أحـ = $\sqrt{8}$ = ٢ $\sqrt{2}$ سم

، ∵ أب = ٣ أحـ

∴ أب = ٦ $\sqrt{2}$ سم

∴ ب حـ = أحـ + أب = ٨ $\sqrt{2}$ سم (المطلوب أولاً)

، وبفرض أن بُعد الوتر ب حـ عن مركز الدائرة هو م ء حيث : م ء ⊥ ب حـ

، ∵ $\overline{مء} \perp \overline{بحـ}$ ∴ ء منتصف $\overline{بحـ}$

∴ $ق_م(ء) = (ءم)^2 - نق^2 = -بء \times ءحـ$

∴ $(ءم)^2 - ٤٩ = -٤\sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٢}$

∴ $(ءم)^2 = ١٧$

∴ $ءم = \sqrt{١٧} \simeq ٤,١$ سم (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك

الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم ، أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم ، رُسم الوتر $\overline{بحـ}$ حيث $أ \in \overline{بحـ}$ ، أب = ٢ أحـ

احسب : [١] طول الوتر $\overline{بحـ}$ [٢] بُعد الوتر $\overline{بحـ}$ عن مركز الدائرة.

ملاحظة هامة

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين

فإذا كان : $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ فإن أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

فمثلًا إذا كان : $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ ، $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$ فإن : $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن

مثال ٤

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، $حـ \in \overleftrightarrow{بأ}$ ، $حـ \notin \overline{بأ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{حـء}$ فقطع الدائرة م فى ء ، هـ حيث : حـء = ٩ سم ، ءهـ = ٧ سم ، ورسم $\overleftrightarrow{حـو}$ يمس الدائرة ن عند و

[١] أثبت أن : حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

[٢] إذا كان : أب = ١٠ سم أوجد : طول كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{حـو}$

الحل

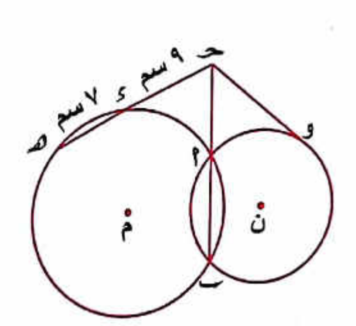
∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ $ق_م(أ) = ق_ن(أ) =$ صفر

، بالمثل : $ق_م(ب) = ق_ن(ب) =$ صفر

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن ، ∵ $حـ \in \overleftrightarrow{أب}$

∴ النقطة حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن (المطلوب أولًا)



، ∵ $ق_م(حـ) = حـء \times حـهـ = ٩ \times ١٦ = ١٤٤$

، ق$_{م}$ (حـ) = حـ أ × حـ ب

∴ ١٤٤ = حـ أ (حـ أ + ١٠)

∴ ١٤٤ = (حـ أ)^{٢} + ١٠ حـ أ

∴ (حـ أ)^{٢} + ١٠ حـ أ − ١٤٤ = ٠

∴ (حـ أ − ٨) (حـ أ + ١٨) = ٠

∴ حـ أ = ٨ سم

، ∵ حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

∴ ق$_{ن}$ (حـ) = ق$_{م}$ (حـ) ، ق$_{ن}$ (حـ) = (حـ و)^{٢}

∴ (حـ و)^{٢} = ١٤٤

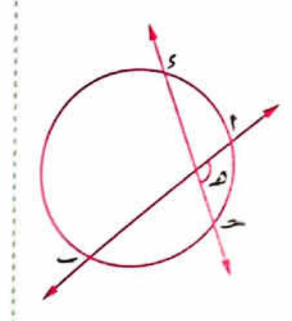
∴ حـ و = ١٢ سم **(المطلوب ثانيًا)**

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

تذكر أن :

[١] إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.

فى الشكل المقابل :



أ ب ↔ ، حـ ء ↔ قاطعان للدائرة حيث أ ب ↔ ∩ حـ ء ↔ = {هـ}

فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ حـ) + ق (⌒ب ء)]

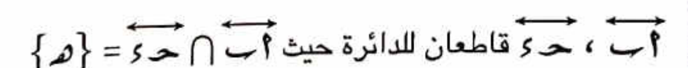
فمثلا إذا كان : ق (⌒أ حـ) = ٥٠° ، ق (⌒ب ء) = ١٧٠°

فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [٥٠° + ١٧٠°] = ١١٠°

[٢] إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.



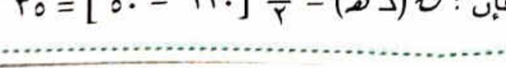
فى الشكل المقابل :



أ ب ↔ ، حـ ء ↔ قاطعان للدائرة حيث أ ب ↔ ∩ حـ ء ↔ = {هـ}

فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ حـ) − ق (⌒ب ء)]

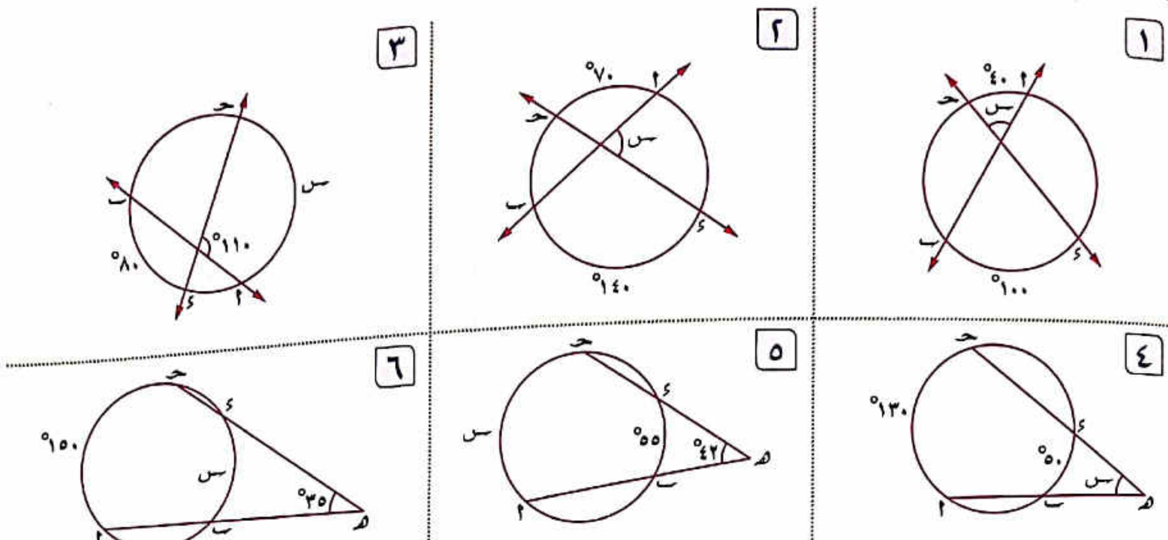
فمثلا إذا كان : ق (⌒أ حـ) = ١٢٠° ، ق (⌒ب ء) = ٥٠°



فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [١٢٠° − ٥٠°] = ٣٥°

مثال ٥

فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س :



الحل

١ س = ½ [٤٠° + ١٠٠°] = ٧٠°

٢ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ، ق(أ⌢ج) + ق(⌢ب ء) = ٧٠° + ١٤٠° = ٢١٠°

∴ ق(⌢أ ء) + ق(⌢ب ج) = ٣٦٠° − ٢١٠° = ١٥٠° ∴ س = ½ × ١٥٠° = ٧٥°

٣ ∵ ½ [س + ٨٠°] = ١١٠° ∴ س + ٨٠° = ٢٢٠° ∴ س = ١٤٠°

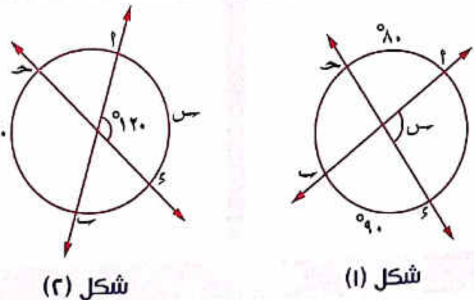
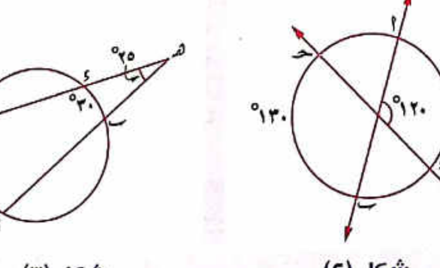
٤ س = ½ [١٣٠° − ٥٠°] = ٤٠°

٥ ∵ ½ [س − ٥٥°] = ٤٢° ∴ س − ٥٥° = ٨٤° ∴ س = ١٣٩°

٦ ∵ ½ [١٥٠° − س] = ٣٥° ∴ ١٥٠° − س = ٧٠° ∴ س = ٨٠°

حاول بنفسك

أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

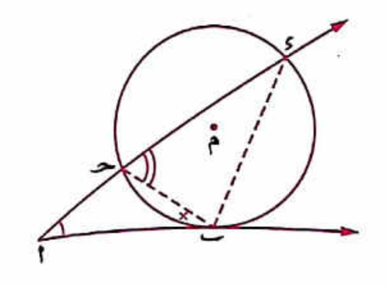



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

تمرين مشهور

القاطع والمماس لدائرة (أو المماسان لدائرة) المتقاطعان فى نقطة خارجها ، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.

الحالة الأولى تقاطع القاطع والمماس لدائرة



◂ المعطيات $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ∩ الدائرة م = {حـ ، ء}

◂ المطلوب إثبات أن : ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\frown$ب ء) − ق ($\frown$ب حـ)]

◂ العمل نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

◂ البرهان ∵ ∠ ب حـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ أ ب حـ)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب حـ ء) − ق (∠ أ ب حـ)

، ∵ ∠ ب حـ ء محيطية.   ∴ ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب ء)

، ∵ ∠ أ ب حـ مماسية.   ∴ ق (∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب حـ)

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب ء) − $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب حـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق ($\frown$ب ء) − ق ($\frown$ب حـ)]   (وهو المطلوب)

الحالة الثانية تقاطع مماسين لدائرة

◂ المعطيات $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ مماسان للدائرة م عند ب ، حـ

◂ المطلوب إثبات أن : ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\frown$ب س حـ) − ق ($\frown$ب حـ)]

◂ العمل نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$

◂ البرهان ∵ ∠ ب حـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ ب)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب حـ ء) − ق (∠ ب)

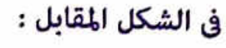
، ∵ ∠ ب حـ ء مماسية.   ∴ ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب س حـ)

، ∵ ∠ ب مماسية.   ∴ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب حـ)

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب س حـ) − $\frac{1}{2}$ ق ($\frown$ب حـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق ($\frown$ب س حـ) − ق ($\frown$ب حـ)]   (وهو المطلوب)

مثال ٦

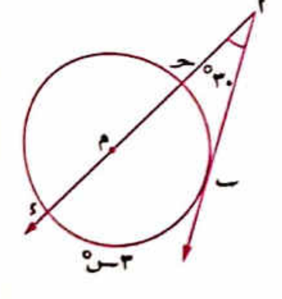


في الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة م عند ب ، ق (∠ أ) = ٣٠°

، $\overrightarrow{\text{أم}}$ يقطع الدائرة في حـ ، ء ، ق ($\frown$ب ء) = ٣ س°

أوجد : قيمة س



الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{أى}$ قاطع لها

∴ $\frac{1}{2}$[ق ($\overset{\frown}{بى}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)] = ٣٠°

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بى}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)]

∴ ق ($\overset{\frown}{بى}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) = ٦٠° (١)

، ∵ $\overline{حـى}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق ($\overset{\frown}{بى}$) + ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) = ١٨٠° (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ ق ($\overset{\frown}{بى}$) = ٢٤٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{بى}$) = ١٢٠°

، ∵ ق ($\overset{\frown}{بى}$) = ٣ س°

∴ ٣ س° = ١٢٠°

∴ س = ٤٠°

(وهو المطلوب)

مثال ٧

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسين للدائرة م

عند ب ، حـ على الترتيب ، ق (∠ أ) = ص°

، ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأصغر = ١٤٠°

، ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأكبر = (٣ س + ١٠)° **فأوجد :** قيمتى س ، ص

الحل

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ١٤٠° + (٣ س + ١٠)° = ٣٦٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأصغر + ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأكبر = ٣٦٠°

∴ ٣ س° + ١٥٠° = ٣٦٠°

∴ ٣ س° = ٢١٠°

∴ س = ٧٠

∴ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأكبر = (٣ × ٧٠° + ١٠°) = ٢٢٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأكبر − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) الأصغر]

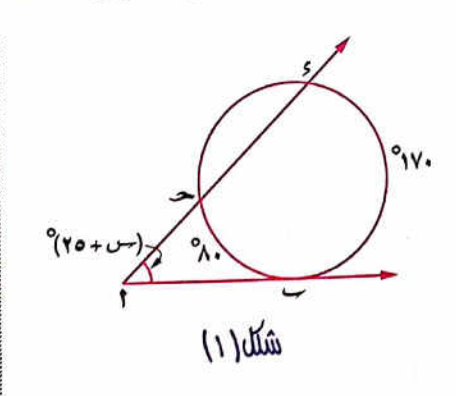
∴ ص° = $\frac{1}{2}$ [٢٢٠° − ١٤٠°] = ٤٠°

∴ ص = ٤٠

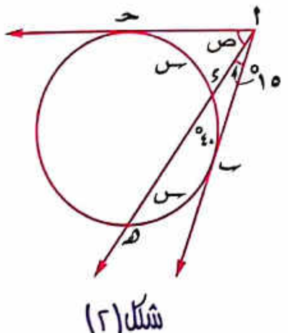
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

باستخدام معطيات الشكل ، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس :



شكل (١)



شكل (٢)

على تطبيقات التناسب فى الدائرة



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٤ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) −٧

(٢) إذا كانت ن دائرة طول قطرها ١٦ سم ، ب نقطة فى مستويها بحيث ن ب = ٥ سم

فإن : $ق_ن$ (ب) = ...

(أ) ٣٩ (ب) −٣٩ (جـ) $\sqrt{٣٩}$ (د) −٢٣١

(٣) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة فإن : أ تقع ....

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٤) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة تقع فى مستويها بحيث $ق_م$ (أ) = ٠ فإن : أ تقع ....

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٥) إذا كان : $ق_م$ (أ) = ٥$^{-١}$ فإن : أ تقع .... الدائرة م

(أ) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) مركز

(٦) $ق_م$ (أ) = نق فإن النقطة أ تقع ....

(أ) خارج الدائرة. (ب) على الدائرة.

(جـ) داخل الدائرة. (د) على مركز الدائرة.

(٧) إذا كانت قوة نقطة بالنسبة لدائرة م تساوى −٦٢٥ ، بُعد هذه النقطة عن مركز الدائرة يساوى ١٥ سم

فإن طول قطر هذه الدائرة يساوى .... سم

(أ) ٤٠٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥$\sqrt{٣٤}$ (د) ١٠$\sqrt{٣٤}$

(٨) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٦ سم ، $ق_م$ (أ) = −١٣

فإن مساحة هذه الدائرة = ... سم^٢ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٥٤ (ب) ٤٤ (جـ) ١٤٤ (د) ٧

(٩) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستويها تبعد عن مركز الدائرة ٢٥ سم فإن طول القطعة المماسة المرسومة من أ للدائرة م يساوى .... سم

(أ) ٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

(١٠) إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تقع فى مستويها وكانت قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة م = ١٣ فإن بعد النقطة أ عن مركز الدائرة هى .... سم

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٣,٥ (د) ٦

(١١) إذا كان : $ق_م$ (أ) = ٩ فإن هذا يعنى أن ....

(أ) النقطة أ تقع على الدائرة التى مركزها م

(ب) النقطة أ تقع داخل الدائرة التى مركزها م

(جـ) طول نصف قطر الدائرة التى مركزها م يساوى ٩ وحدة طول.

(د) طول القطعة المستقيمة المماسة المرسومة من نقطة أ للدائرة التى مركزها م يساوى ٣ وحدة طول.

(١٢) إذا كانت : أ نقطة خارج دائرة م فإن طول القطعة المماسة المرسومة من أ للدائرة م يساوى ....

(أ) $(أ م)^2$ (ب) $(ق_م (أ))^2$ (جـ) $ق_م$ (أ) (د) $\sqrt{ق_م (أ)}$

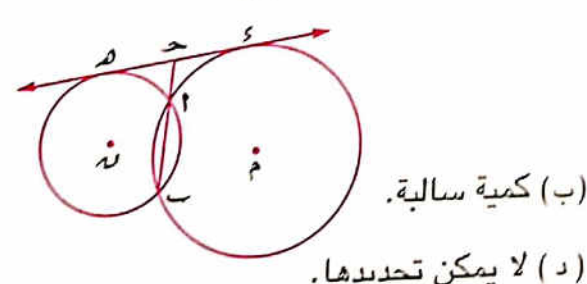
(١٣) إذا كان : م ، ن دائرتان متقاطعتان وكان : $ق_م$ (أ) = ٥ ، ٢ $ق_ن$ (أ) = ١٠

فإن النقطة أ ∈ ....

(أ) الدائرة م (ب) الدائرة ن

(جـ) $\overleftrightarrow{م ن}$ (د) المحور الأساسى للدائرتين.

(١٤) فى الشكل المقابل :

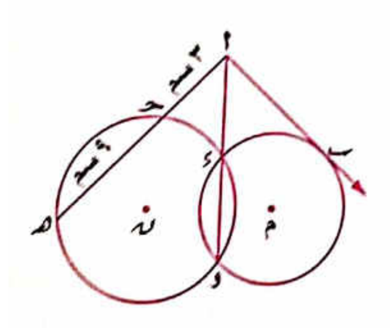


$ق_م$ (حـ) − $ق_ن$ (حـ) = ...

(أ) كمية موجبة. (ب) كمية سالبة.

(جـ) صفر. (د) لا يمكن تحديدها.

(١٥) فى الشكل المقابل :



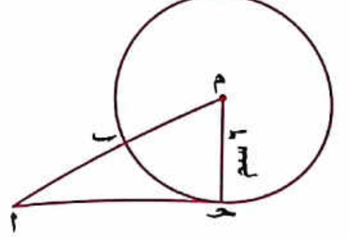
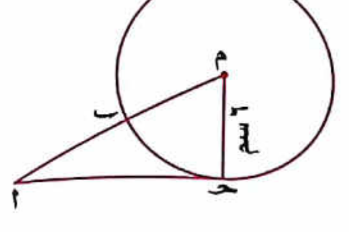
إذا كان : أ حـ = ٣ سم ، حـ هـ = ٩ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) $٣\sqrt{٣}$ (ب) ٢٧

(جـ) ٣٦ (د) ٦

(١٦) في الشكل المقابل :

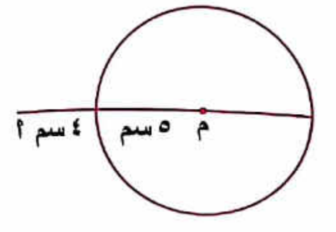
$\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ تمس الدائرة م في حـ ، م حـ = ٦ سم

، ق م (أ) = ٦٤

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٧) في الشكل المقابل :

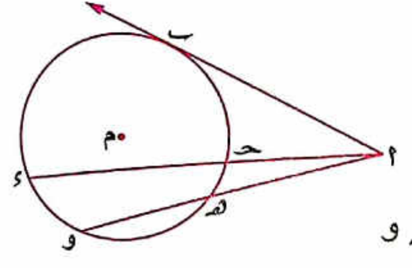


ق م (أ) = ...

(أ) ٨١ (ب) ٢٥

(جـ) ٥٦ (د) ١٦

(١٨) في الشكل المقابل :



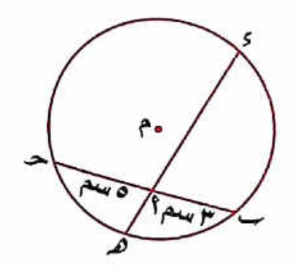
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس

فإن : $(\text{أ ب})^2$ = ...

(أ) أ حـ × حـ ء (ب) أ هـ × هـ و

(جـ) ق م (أ) (د) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}}$

(١٩) في الشكل المقابل :

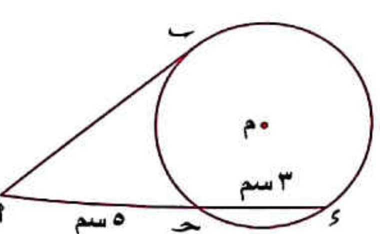


ق م (أ) = ...

(أ) ١٥ (ب) −١٥

(جـ) ٢٤ (د) −٢٤

(٢٠) في الشكل المقابل :



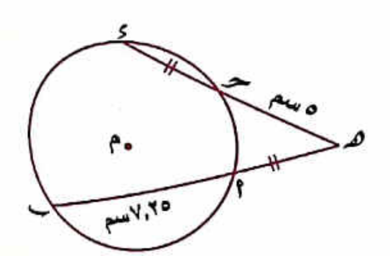
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند ب ، ء حـ = ٣ سم ، حـ أ = ٥ سم

فإن : ق م (أ) = ...

(أ) ٢٥ (ب) $(\text{أ ب})^2$ − نق^2

(جـ) ٤٠ (د) $(\text{أ م})^2$ − $(\text{أ ب})^2$

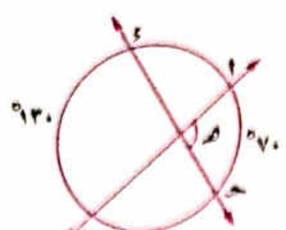
(٢١) في الشكل المقابل :



ق م (هـ) = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٩

(جـ) ٢٥ (د) ٤٥



(٢٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق(⌒أ حـ) = ٧٠° ، ق(⌒ء ب) = ١٣٠°

فإن : ق(∠ء هـ ب) = ... °

(أ) ١٠٠ (ب) ٩٠

(جـ) ١١٠ (د) ١٢٠

(٢٣) في الشكل المقابل :

ق(⌒أ حـ) = ق(⌒أ ء) = ٢ ق(⌒ب ء) ، ق(⌒ب حـ) = ١٠٠°

فإن : θ = ... °

(أ) ٧٨ (ب) ٦٥

(جـ) ٥٢ (د) ٨٤

(٢٤) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{أ ب} \perp \overline{حـ ء}$

فإن : ق(⌒أ حـ) + ق(⌒ب ء) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٥) في الشكل المقابل :

ص = ... °

(أ) ١٨٠ (ب) ١٨

(جـ) ١٠ (د) ١٥

(٢٦) في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$

فإن : ع = ... °

(أ) ٩٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٥٠ (د) ٨٠

(٢٧) في الشكل المقابل :

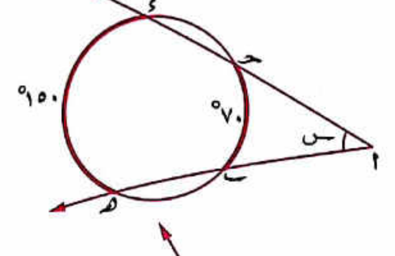
دائرة مركزها م

، ق(∠هـ و ب) = ...

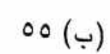
(أ) ٣٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

(٢٨) فى الشكل المقابل :



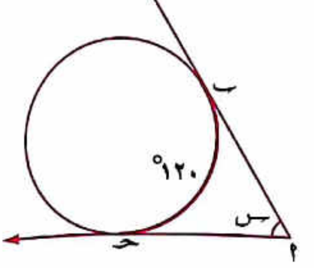
س = ...°



(أ) ١١٠ (ب) ٥٥

(جـ) ٨٠ (د) ٤٠

(٢٩) فى الشكل المقابل :

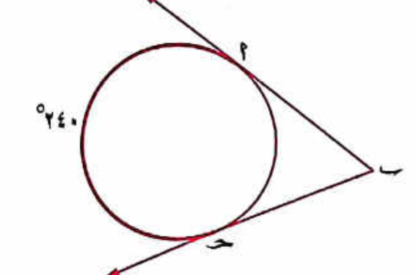


س = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ١٨٠ (د) ٢٤٠

(٣٠) فى الشكل المقابل :



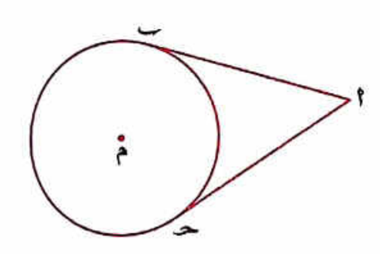
$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماسان

فإن : ق (∠ب) = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٦٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٢٠

(٣١) فى الشكل المقابل :



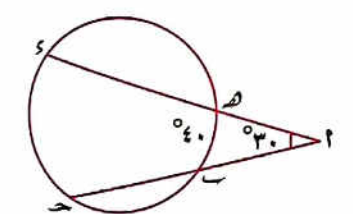
إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان

، ق ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ١٣٠° + س

فإن : ق (∠أ) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٦٥° − س (جـ) ٥٠° − س (د) ١٣٠° − $\frac{\text{س}}{٢}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :



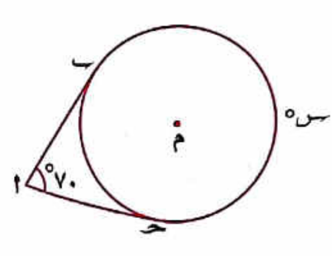
ق (∠أ) = ٣٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) = ٤٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٧٠° (د) ١٠٠°

(٣٣) فى الشكل المقابل :



ق (∠أ) = ٧٠° ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان

، ق ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) الأكبر = س°

فإن : س = ...

(أ) ٢٥٠° (ب) ١١٠° (جـ) ٥٠٠° (د) ٢١٥°

(٣٤) في الشكل المقابل :

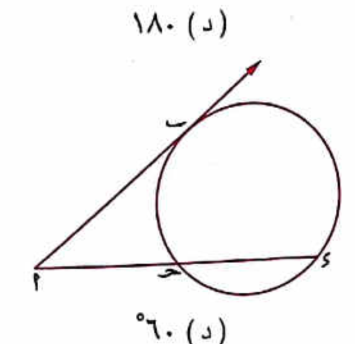
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

، ق (∠ أ) = ٤٥° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٥٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٨٠

(٣٥) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ يمس الدائرة عند ب ، ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = (٢ س + ٥٠°)

، ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ٢ س

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٢٥° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

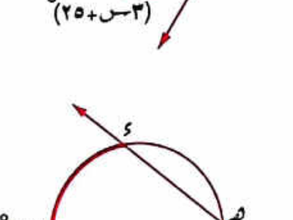
(٣٦) في الشكل المقابل :

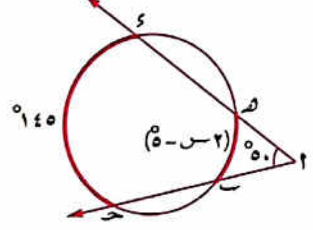
س = ...°

(أ) ٢٥ (ب) ٤٥

(جـ) ٦٥ (د) ٧٠

(٣٧) في الشكل المقابل :



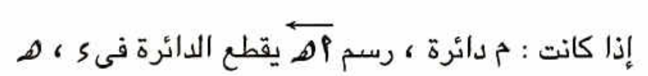


س = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥

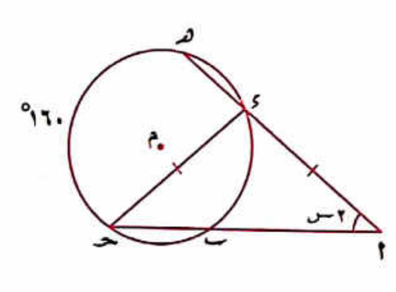
(جـ) ١٠٠ (د) ٧٥

(٣٨) في الشكل المقابل :

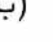
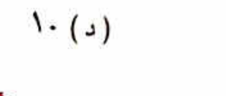


إذا كانت : م دائرة ، رسم $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة في ء ، هـ

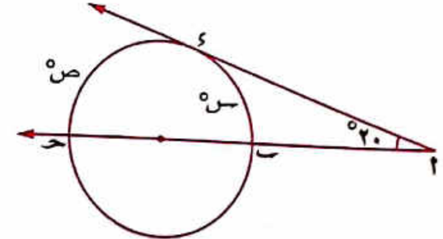
، رسم $\overleftrightarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ ، أء = ءحـ



فإن : قيمة س = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠  (د) ١٠ 

(٣٩) في الشكل المقابل :

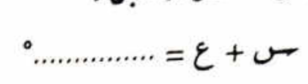


(س ، ص) = ...

(أ) (٦٠ ، ١٢٠) (ب) (١٢٠ ، ٦٠)

(جـ) (٧٠ ، ١١٠) (د) (١١٠ ، ٧٠)

(٤٠) فى الشكل المقابل :

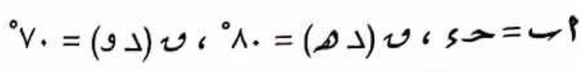


س + ع = ...°

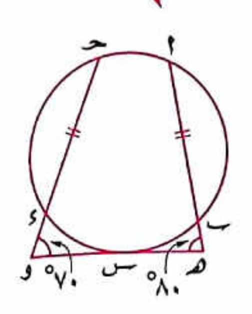
(أ) ٥٠ (ب) ٧٥

(جـ) ١٢٥ (د) ٢٥٠

(٤١) فى الشكل المقابل :



أب = حء ، ق(د هـ) = ٨٠° ، ق(د و) = ٧٠°



فإن : ق(⌒سء) − ق(⌒سب) = ...

(أ) ٥° (ب) ١٠°

(جـ) ١٥° (د) ٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق :

(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

(٢) النقطة حـ حيث حـ م = ٧ سم ، نق = ٧ سم

(٣) النقطة ء حيث ء م = $\sqrt{17}$ سم ، نق = ٤ سم

٢ حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، حـ بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة فى كل من الحالات الآتية :

(١) $ق_م$ (أ) = −٣٦ (٢) $ق_م$ (ب) = ٩٦ (٣) $ق_م$ (حـ) = صفر

٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوى ٤٠٠ أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

«١٥ سم»

٤ إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م ، أء مماسة للدائرة عند ء بحيث أء = ٨ سم فأوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م

«٦٤»

٥ فى الشكل المقابل :

أب تمس الدائرة م عند ب ، أم تقطع الدائرة م فى نقطة حـ

إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٢ سم

، $ق_م$ (أ) = ٨١

فأوجد : (١) طول أب (٢) طول أحـ

«٩ سم ، ٣ سم»

٦ الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ب ح}}$

حيث : أ ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ ، أ ب = ٣ أ ح

احسب : (١) طول الوتر $\overline{\text{ب ح}}$ (٢) بعد الوتر $\overline{\text{ب ح}}$ عن مركز الدائرة. «٤٨ سم ، ١٩,٦ سم»

٧ الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم ، النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة ، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة فى نقطتين ح ، ء حيث ح ب = ح ء

احسب طول الوتر $\overline{\text{ح ء}}$ وبعده عن النقطة ن «$٢\sqrt{١٠}$ سم ، $٣\sqrt{٦}$ سم»

٨ فى الشكل المقابل :

م دائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها ، $\overline{\text{ح ب}}$ تمس الدائرة م فى ب ، $\overline{\text{ح أ}}$ تقطع الدائرة م فى ء بحيث :

ح ء = ١٦ سم ، ء أ = ٩ سم

أوجد : (١) طول نصف قطر الدائرة.

(٢) مساحة المثلث أ ب ح

«٧,٥ سم ، ١٥٠ سم^2»

٩ فى الشكل المقابل :

أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة فى ء ، ب

، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ يقطع الدائرة فى هـ ، و ، $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ يمس الدائرة عند ح

، أ ء = ٨ سم ، هـ و = ١٨ سم

(١) إذا كان : $ق_م$ (أ) = ١٤٤ فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$

(٢) إذا كان : س ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث ء س = ٤ سم

فأوجد : $ق_م$ (س)

«١٢ سم ، ١٠ سم ، ٦ سم ، -٢٤»

١٠ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن

، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ يقطع الدائرة م فى ح ، ء ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ يقطع الدائرة ن فى هـ ، و على الترتيب.

(١) أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن

(٢) إذا كان : $ق_م$ (ب) = ٣٦ ، ب ح = ٤ سم ، هـ و = ٩ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ح ء}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$

«٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم»

١١ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، $\overleftrightarrow{هـ ء}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند ء ، هـ

على الترتيب ، $\overleftrightarrow{ب أ} \cap \overleftrightarrow{ء هـ} = \{حـ\}$

(١) **أثبت أن :** $\overleftrightarrow{ب حـ}$ محور أساسي للدائرتين.

(٢) إذا كان : أ ب = ١٢ سم ، ق ن (حـ) = ٦٤

أوجد : طول كل من $\overline{حـ أ}$ ، $\overline{حـ ء}$

«٤ سم ، ٨ سم»

١٢ في الشكل المقابل :

الدائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب

حيث : $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} \cap \overleftrightarrow{هـ و} = \{س\}$

، س ء = ٢ ء حـ ، هـ و = ١٠ سم ، ق ن (س) = ١٤٤

(١) **أثبت أن :** $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

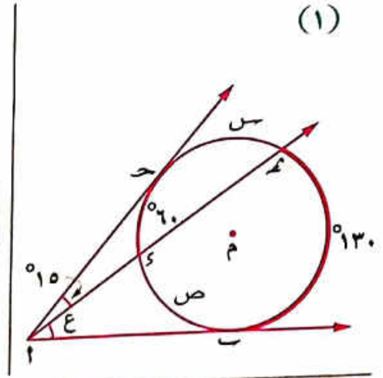
(٢) **أوجد :** طول كل من $\overline{س حـ}$ ، $\overline{س و}$

(٣) **أثبت أن :** الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري.

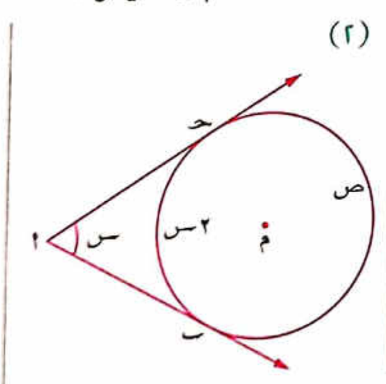
«٦ $\sqrt{٦}$ سم ، ٨ سم»

١٣ مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :

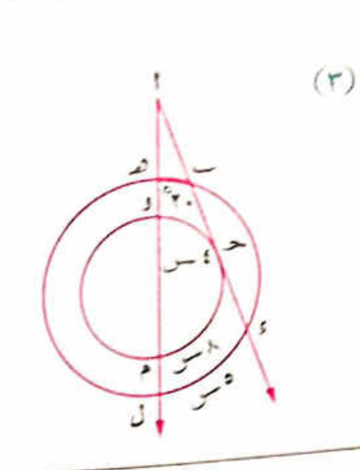
(١)



(٢)



(٣)



١٤ في الشكل المقابل :

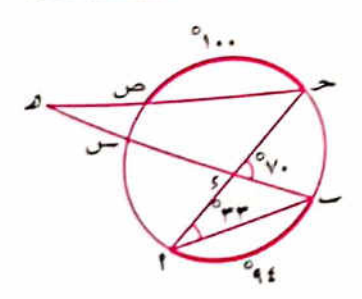
ق (∠ب أ حـ) = ٣٣° ، ق (∠ب ء حـ) = ٧٠°

، ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٩٤° ، ق ($\overset{\frown}{حـ ص}$) = ١٠٠°

أوجد قياس كل من :

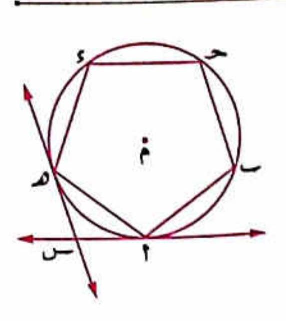
(١) $\overset{\frown}{س ص}$ (٢) $\overset{\frown}{أ س}$

(٣) ∠ب هـ حـ



«٢٦٠° ، ٧٤° ، ٢٠°»

١٥ في الشكل المقابل :



- أ ب حـ ء هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م

، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}} = \{\text{س}\}$

أوجد : (١) ق $(\overset{\frown}{\text{أ هـ}})$

(٢) ق (∠ أ س هـ)

«٧٢° ، ١٠٨°»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

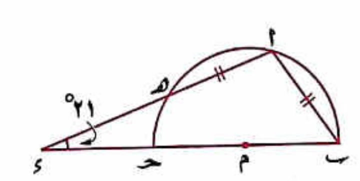
(١) في الشكل المقابل :

θ = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٥٥ (د) ٦٠

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : أ هـ = أ ب ، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطراً ، ق (∠ ء) = ٢١°

فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤ (جـ) ١٠٦ (د) ١١٠

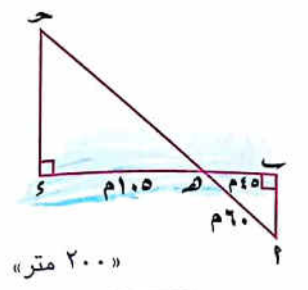
تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 لتحديد الموقع حـ ،

قام الماسحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع حـ عن الموقع أ ؟



«٢٠٠ متر»

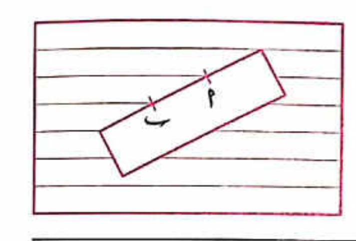
---

٢ 📖 قام فريق مكافحة التلوث

بتحديد موقع بقعة زيت على أحد

الشواطئ كما فى الشكل المقابل.

احسب طول بقعة الزيت.



«١١٠ أمتار»

---

٣ 📖 أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعه على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ ، ب هل تقسيم يوسف للشريط صحيح ؟ فسر إجابتك. استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.

---

٤ 📖 تنقل عبوات الأسمدة

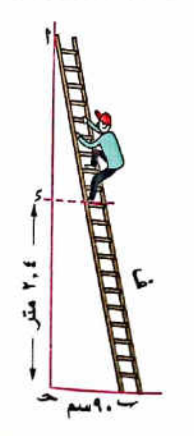
من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.

فإذا كانت ء ، هـ ، و مساقط النقط أ ، ب ، حـ على الأفقى بنفس الترتيب ، أب = ١,٢ م ، ء هـ = ٨٠ سم ، هـ و = ١٢ مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

«١٩ مترًا»

---

٥ 📖 $\overline{أب}$ سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠ سم. فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤ متر من الأرض.

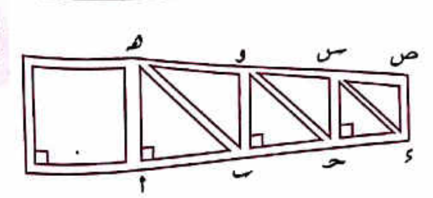


«٢,٤٦ مترًا»

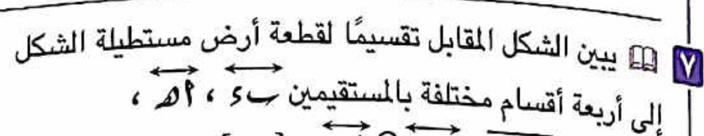
٦ إذا كان : أب = ١٨٠ سم ، هـ و = ٢ متر

، أب : ب‌جـ : جـ‌د = ٥ : ٤ : ٣

أوجد : طول كل من $\overline{هـ ص}$ ، $\overline{جـ د}$



«٤٨٠ سم ، ١٠٨ سم»



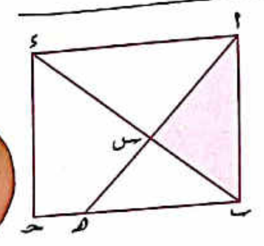
٧ يبين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل

إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين $\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ،

حيث هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ ∩ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ = {س}

فإذا كان : أب = ب هـ = ٤٢ مترًا ، أ د = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أ ب س بالأمتار المربعة وطول $\overline{أ س}$



«٥٠٤ متر مربع ، ٢٤ $\sqrt{٢}$ متر»

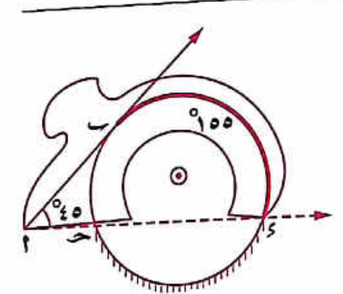
٨ منشار دائرى لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته

١٠ سم ، يدور داخل حافظة حماية ،

فإذا كان : ق(∠ب أ د) = ٤٥° ، ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ١٥٥°

أوجد طول قوس قرص المنشار

خارج حافظة الحماية.



«٢٤,٤ سم»

٩ تتبع الإشارات التى تصدر عن برج الاتصالات فى مسارها شعاعًا

، نقطة بدايته على قمة البرج ، ويكون مماسًا لسطح الأرض ، كما

فى الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالماسين بفرض أن

البرج يقع على مستوى سطح البحر

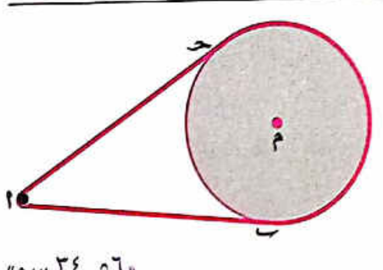
، ق(∠جـ أ ب) = ٨٠°

«١٠٠°»

١٠ تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة

عند أ فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠° فأوجد طول

$\overset{\frown}{ب جـ}$ الأكبر ، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩ سم



«٣٤,٥٦ سم»

١١ يدور قمر صناعى فى مدار ، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء ،

وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°

فأوجد :

(١) قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.

(٢) طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

«١٢٦° ، ٦٣٧٨ كم»

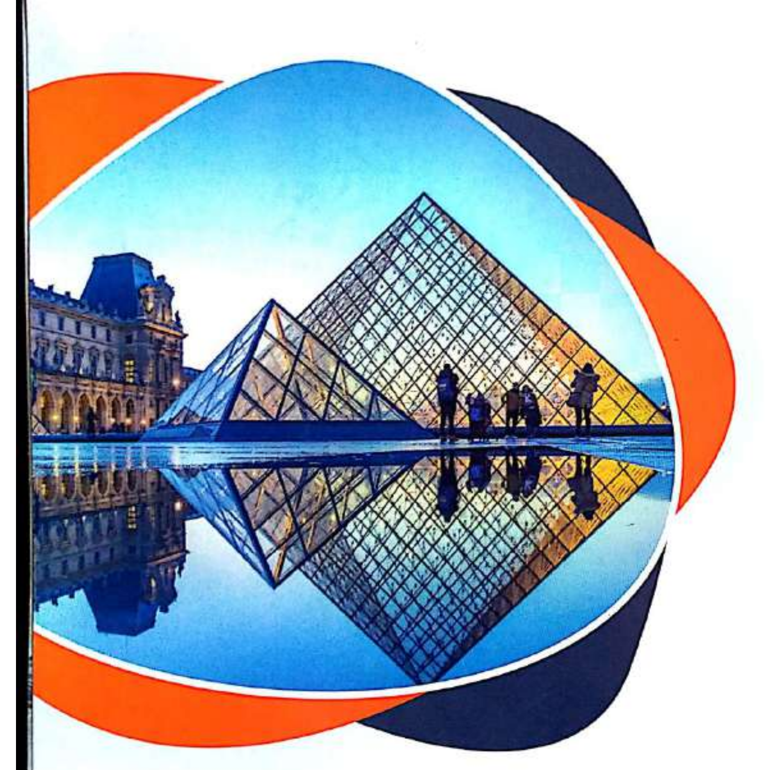
الرياضيات

الفصل الدراسى الأول

الجزء الخاص بالامتحانات

- أختبارات تراكمية
- امتحانات نهائية







إعداد نخبة من خبراء التعليم

1 ثانوى

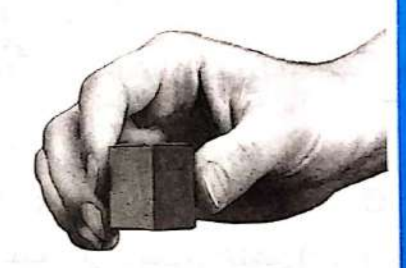
2020

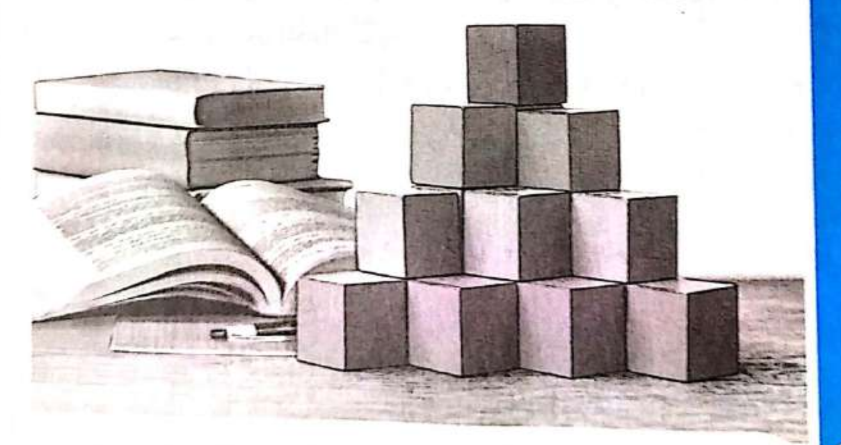
محتويات الكتاب

- الاختبارات التراكمية القصيرة
- امتحانات الكتاب المدرسي
- الامتحانات النهائية
- الإجابـات



الاختبارات التراكمية القصيرة







أولاً : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} =$ ....

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ٤ ت (د) -١٦

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٢}$ هى ....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ت (د) $-$ت

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ك هى ....

(أ) $\{٣ ، -٣\}$ (ب) $\{-٣ت\}$ (جـ) $\{٣ت ، -٣ت\}$ (د) $\varnothing$

(٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٣ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) $\{٣ ، ٠\}$ (ب) $\{-١ ، ٠\}$ (جـ) $\{-٣ ، ١\}$ (د) $\{٣ ، -١\}$

(٥) $١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ... + ت^{١٦} =$ ....

(أ) ت (ب) ١ (جـ) ١٦ (د) ٤

(٦) الشكل المقابل يمثل المنحنى : ص = أ$س^٢$ + ب س + جـ

فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ < ٠ ، جـ < ٠ (ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠ (د) أ > ٠ ، جـ > ٠

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٢س + ٤ = ٠$.

(ب) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان أن : $س + ت ص = \frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٢ت}$



الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة : ٤ س^{٢} − ١٢ س + حـ = ٠ متساويين فإن : حـ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

(٢) إذا كان : س = −١ أحد جذري المعادلة : س^{٢} − أ س − ٢ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٣ (د) −٣

(٣) إذا كان : أ = ١ + $\sqrt{٢}$ ت ، ب = ١ − $\sqrt{٢}$ ت فإن : أ ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ٦ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : ك $\in$ ....

(أ)]−∞ ، ٩[(ب)]٩ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ مركبان مترافقان فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ب^{٢} − ٤ أ حـ $<$ ٠ (ب) ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠

(جـ) ب^{٢} − ٤ أ حـ $>$ ٠ (د) ب^{٢} − ٤ أ حـ $\geq$ ٠

(٦) (٢ + ٢ ت)^{٢٠} = ...

(أ) ٢^{٢٠} (ب) ٢^{٣٠} (جـ) ٢^{٣٠} ت (د) −٢^{٣٠}

السؤال الثانى ٤ درجات — (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أثبت أن جذرى المعادلة : ٣ س^{٢} − ٤ س + ٥ = ٠ غير حقيقيين

ثم أوجد : مجموعة حل المعادلة فى ك

(ب) أوجد قيم ك التى تجعل للمعادلة : ك س^{٢} − ٤ س + ٤ = ٠

جذرين مركبين وغير حقيقيين.

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م - ٣) س + ٥ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر فإن : م = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٣١}$ هى ....

(أ) ت (ب) − ت (جـ) ١ (د) −١

(٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ٢ س + ٥ = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ك = ٠$ حقيقيين فإن : ك ∋ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س - جـ =$ صفر مختلفى الأشارة فإن : ....

(أ) ب = صفر (ب) جـ < ٠ (جـ) $\frac{جـ}{أ} < ٠$ (د) $\frac{جـ}{أ} > ٠$

(٦) إذا كان : $(١ + ت^٨)(١ - ت^{١١}) = س + ت ص$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س + ٢ + \frac{١}{م} = ٠$ متساويين **فأوجد : قيمة م**

(ب) **أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ٣ س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر.**



الدرجة الكلية
١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٤ س = -٤$ فى ح هى ....

(أ) $\{-٢\}$　　(ب) $\{٢\}$　　(جـ) $\{-٢ ، ٢\}$　　(د) $\varnothing$

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها : ت ، – ت هى ....

(أ) $س^٢ - ١ = ٠$　　(ب) $س^٢ + ١ = ٠$

(جـ) $(س + ١)^٢ = ٠$　　(د) $(س - ١)^٢ = ٠$

(٣) يكون جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢ س + ك = ٠$ حقيقيين مختلفين إذا كان : ....

(أ) ك = ١　　(ب) ك < ١　　(جـ) ك > ١　　(د) ك = ٤

(٤) أبسط صورة للمقدار : $(١ - ت)^٤$ هى ....

(أ) –٤　　(ب) ٤　　(جـ) –٤ ت　　(د) ٤ ت

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ + ب س + جـ = ٠$ عددان فرديان متتاليان فإن : $ب^٢ - ٤ جـ =$ ....

(أ) –١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ٤

(٦) حاصل ضرب جذور المعادلات : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، $ب س^٢ + جـ س + أ = ٠$ ، $جـ س^٢ + أ س + ب = ٠$ يساوى ....

(أ) أ ب جـ　　(ب) –١　　(جـ) ١　　(د) صفر

السؤال الثانى ٤ درجات — (أ) ٢ درجة　(ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + ٢ س + ٣ = ٠$

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$

(ب) أوجد فى أبسط صورة المقدار : $(٣ - ٢ ت)^٢ (٣ + ٢ ت)$

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : [-٢ ، ٤] ⟵ ح ، د (س) = ٤ − ٢ س تكون إشارتها سالبة فى الفترة ....

(أ) [-٢ ، ٠[(ب)]٠ ، ٤] (جـ)]٢ ، ٤] (د)]٢ ، ٤[

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٦ س + ك = ٠ متساويين فإن : ك = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ١٢

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها (١ + ت) ، (١ − ت) هى ....

(أ) $س^٢$ − ٢ س + ٢ = ٠ (ب) $س^٢$ + ٢ س − ٢ = ٠

(جـ) $س^٢$ + ٢ س + ٢ = ٠ (د) $س^٢$ − ٢ س − ٢ = ٠

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^٢$ − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^٢$ − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٥) إذا كانت د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ موجبة لجميع قيم س الحقيقية فإن ....

(أ) $ب^٢$ − ٤ أ حـ < ٠ (ب) $ب^٢$ − ٤ أ حـ > ٠

(جـ) $ب^٢$ − ٤ أ حـ = ٠ (د) $ب^٢$ − ٤ أ حـ ≤ ٠

(٦) أي مما يأتى تحليل للمقدار ($س^٢$ + ٩) ؟

(أ) (س − ٣) (س + ٣) (ب) $(س + ٣)^٢$

(جـ) $(س − ٢ ت)^٢$ (د) (س − ٣ ت) (س + ٣ ت)

السؤال الثانى ٤ درجات (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

عيِّن إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) = (س − ١) (س + ٢) (٢) د (س) = − $س^٢$ + ٩



اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = −٣ تكون سالبة فى ....

(أ)]−∞ ، −٣[(ب)]−٣ ، ٣[(جـ)]−∞ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

(٢) مجموعة الحل للمتباينة : س (س − ٢) ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٢}   (ب) [٠ ، ٢]   (جـ) ح − [٠ ، ٢]   (د) ح −]٠ ، ٢[

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٥٢}$ هى ....

(أ) ت   (ب) − ت   (جـ) ١   (د) −١

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢$ + ٤ س + ٧ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) ٧   (جـ) ٤   (د) −٧

(٥) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة (س − ٥) (٣س − ٤) ≤ ٠

(أ) ٧   (ب) ١٤   (جـ) ١٥   (د) ٩

(٦) أى مما يأتى عدد تخيلى ؟

(أ) π   (ب) ٥ − ت   (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) $ت^٢$

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان : ١ + ت أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٢ س + حـ = ٠ حيث حـ ∈ ح

فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد : قيمة حـ

(ب) ابحث إشارة الدالة د : د (س) = ٢ $س^٢$ + ٧ س − ١٥

ومن ذلك استنتج مجموعة حل المتباينة : ٢ $س^٢$ + ٧ س ≤ ١٥

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها ٥٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٣٠° (ب) ٣١٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٤١٠°

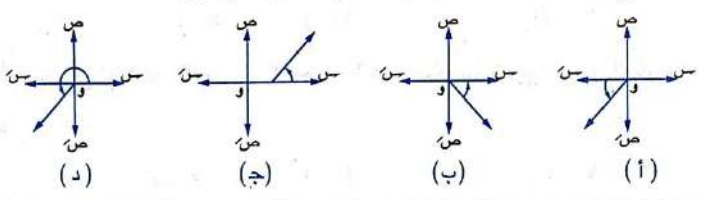
(٢) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ....

(أ) −٢١٠° (ب) ١٢٠° (جـ) −١٢٠° (د) ٨٥٠°

(٣) الزاوية التى قياسها (−٧٥٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) جميع الزوايا الموجهة التالية ليست فى وضعها القياسى ما عدا ....



(٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ....

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) الربع الثالث. (د) غير ذلك.

(٦) إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين فإن : −أ ، −ب يكونا ....

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين. (جـ) متتامتين. (د) مجموعهما −٣٦٠°

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) −٥٢° (٢) ٢٢٠° (٣) ١٥ ١١٢٠°

(ب) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) −١٣٢° (٢) ٧٠° (٣) −٧٣٠°

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) القياس الستينى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتقابل قوسًا طوله ٣ π سم يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣) الزاوية التى قياسها −٣,٧ ^د^ تكافئ الزاوية التى قياسها الستينى ....

(أ) ٥٨ َ١٥ ً٣٣° (ب) ٣٠١ َ٤٤ ً٢٧° (جـ) −٢٣٣ َ١٥ ً٣٣° (د) ٢١١ َ٤٤ ً٢٧°

(٤) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ سم فى دائرة طول قطرها ٤ سم يساوى ....

(أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{د}$ (ب) $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{د}$ (جـ) ٥^د^ (د) ٦^د^

(٥) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٦) إذا كان : أ ، − أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠° أوجد : ق (∠ حـ) بالتقدير الدائرى.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٥ سم من دائرة طول قطرها ١٠ سم يساوى ....

(أ) $\frac{1}{2}$ ء (ب) ١ ء (جـ) ٢ ء (د) π ء

(٢) قياس أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (−٨٧٠°) هو ....

(أ) ٢١٠° (ب) ١٥٠° (جـ) −٢١٠° (د) ١٢٠°

(٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة مرسومة فى الوضع القياسى بحيث : جا θ < ٠

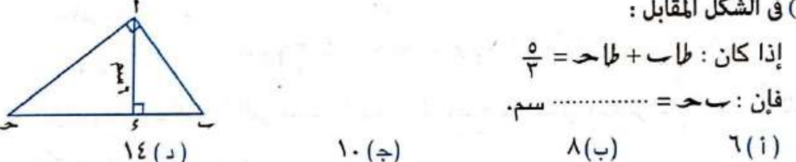
ففى أى ربع يقع الضلع النهائى لهذه الزاوية ؟

(أ) الأول. (ب) الأول والثانى. (جـ) الثانى والثالث. (د) الثالث والرابع.

(٤) إذا كان : قا θ = ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ظا ب + ظا حـ = $\frac{5}{2}$

فإن : ب حـ = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}$ π فإن طول قوسه = ... سم.

(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

(ب) إذا كان : جا θ = $\frac{3}{5}$ ، θ ∈]$\frac{\pi}{2}$ ، π[

فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ





الدرجة الكلية

١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أبسط صورة للمقدار : طا (١٨٠° + θ) + طتا (٢٧٠° − θ) هى ....

(أ) ٠ (ب) ٢ طا θ (جـ) ٢ طتا θ (د) ٢

(٢) إذا كان : جا θ > ٠ ، طا θ < ٠ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) إذا كانت θ زاوية حادة وكان : جتا (θ + ٢٥°) = جا ٣٠° فإن : θ = ...

(أ) ٥° (ب) ٢٠° (جـ) ٢٥° (د) ٣٥°

(٤) القياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ π سم من دائرة طول نصف قطرها ٤ سم هو ....

(أ) $\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)^{د}$ (ب) ٤٥° (جـ) ١٣٥° (د) ٢٧٠°

(٥) جتا ١° × جتا ٢° × جتا ٣° × ... × جتا ١٠٠° = ...

(أ) جا ١° × جا ٢° × جا ٣° × جا ٤° × ... × جا ١٠٠°

(ب) ١

(جـ) ١° × ٢° × ٣° × ٤° × ... × ١٠٠°

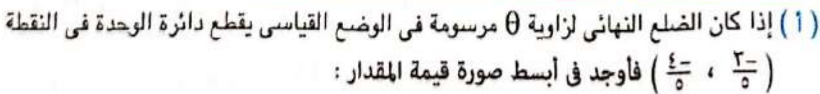
(د) صفر

(٦) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، طا θ = $\frac{٣}{٤}$

فإن : جتا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$



السؤال الثانى ٤ درجات ((أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة)

(أ) إذا كان الضلع النهائى لزاوية θ مرسومة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{٥}$) فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

جتا (١٨٠° − θ) طتا (٩٠° − θ) + جا (١٨٠° − θ) طا (− θ)

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة : قتا (٢ θ − ١٥°) = قا (θ − ٣٠°)

ثم أوجد : جميع قيم θ حيث θ ∈]٠° ، ٩٠°[التى تحقق المعادلة.

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القيمة العظمى للدالة د : د (θ) = ٤ جا ٢ θ هى ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢) الزاوية التى قياسها ٦٢٠° تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى قياسها ١٢٠° بدلالة π هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}\pi$ (ب) $\frac{٢}{٣}\pi$ (جـ) $\frac{٣}{٢}\pi$ (د) $\frac{١}{٢}\pi$

(٤) إذا كانت : جا θ = جتا ٢ θ حيث $\theta \in$] ٠° ، ٩٠° [فإن : جا ٣ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) الدالة د : د (θ) = ٣ جتا ٢ θ دالة دورية ودورتها تساوى ....

(أ) ٢ π (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) ٦ π (د) π

(٦) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد الحل العام للمعادلة : ظا ٤ θ = ظتا ٢ θ

(ب) إذا كانت الدالة د : د (θ) = جتا θ أوجد :

(١) مجالها. (٢) مداها. (٣) دورتها.



الدرجة الكلية
١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ٢ جتا θ = − $\sqrt{٢}$ فإن قياس أقل زاوية موجبة تحقق ذلك هى ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٢) أبسط صورة للمقدار : ظا (٣٦٠° − θ) + ظتا (٢٧٠° − θ) هى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٢ ظا θ (د) ٢ ظتا θ

(٣) قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٦ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ٩ سم بالدرجات يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين ؟

(أ) ٥٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٠٠°

(٥) جتا (ظا$^{-1}$ ($\frac{٣}{٤}$)) = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) جا$^{-1}$ ($\frac{٣}{٤}$)

(٦) إذا كان : جا^{٢} θ = $\frac{١}{٢}$ فأى مما يأتى لا يصلح قيمة تقريبية لـ θ ؟

(أ) ٥١,٨° ١٥ ٢١٥° (ب) −٥١,٨° ١٥ ٣٥°

(جـ) ٥٠,٣° ٣٠ ٧٠° (د) ٨,٢° ٤٤ ١٤٤°

السؤال الثانى ٤ درجات ((أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة)

(أ) أوجد بالقياس الستينى قيمة θ التى تحقق أن : جتا θ = −٠,٦٤٢

(ب) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) فأوجد : قيمة θ



الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

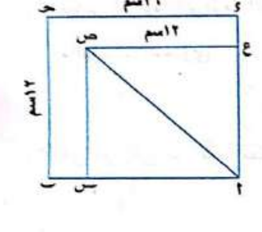
السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ فإذا كان محيط الأصغر ١٤ سم فإن محيط الأكبر .... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ١٥ (د) ٢١

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ س ص ع

، ء حـ = ١٦ سم ، ب حـ = ع ص = ١٢ سم

فإن : أ ص = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٩

(جـ) ١٥ (د) ١٨

(٣) مثلثان متشابهان فيهما $\frac{أب}{س ص} = \frac{أحـ}{ص ع} = \frac{ب حـ}{ع س}$ فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع (ب) ق (∠ حـ) = ق (∠ ع)

(جـ) ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ س ص ع) (د) Δ أ ب حـ ~ Δ ص س ع

(٤) أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) كل المضلعات المنتظمة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(جـ) كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(٥) إذا كان : Δ ل م ن ~ Δ س ص ع وكان ق (∠ ل) = ٣٥° ، ق (∠ ع) = ٧٥°

فإن : ق (∠ م) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٧٥° (د) ٧٠°



(٦) إذا كان ك هو معامل تشابه مضلعين $م_1$ إلى $م_2$ حيث المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$ فإن ....

(أ) ك > ٠ (ب) ك = ١ (جـ) ك > ١ (د) ٠ > ك > ١

السؤال الثانى **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(١) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع س ص ع ل

(٢) أوجد قيمة كل من : م ، هـ

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 على درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢ سم ، ٨ سم ومحيط الثانى ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثانى = ...

(أ) ١٢ سم (ب) ١٨ سم (جـ) ٢٤ سم (د) ١٦ سم

(٢) فى الشكل المقابل :

أى العبارات التالية غير صحيحة ؟

(أ) $(أب)^2$ = ب ء × ء جـ (ب) $(أجـ)^2$ = جـ ء × جـ ب

(جـ) $(أء)^2$ = ء ب × ء جـ (د) أ ب × أ جـ = ب جـ × أ ء

(٣) فى الشكل المقابل :

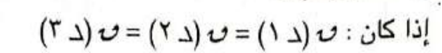
إذا كان : جـ س ينصف ∠ أ جـ ب ، س ء // ب جـ

فإن : س ء = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (د ١) = ق (د ٢) = ق (د ٣)

فإن : ء هـ : هـ و : و ء = ... : .... : ....

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٦) فى الشكل المقابل :

ص حـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

السـؤال الثانى **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : (١) $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$



(٢) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

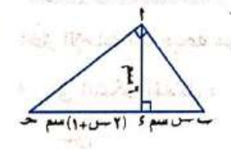
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١٦ : ٨١ (د) ٨ : ١٨



(٢) فى الشكل المقابل :

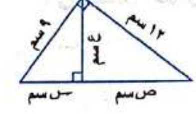


س = ...

(أ) $\frac{١٥}{٢}$ (ب) ٢٧

(جـ) ١٤ (د) $١٠ \frac{١}{٢}$

(٣) فى الشكل المقابل :

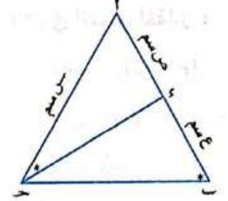


س = ...

(أ) ٤,٥ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٣٦

(٤) فى الشكل المقابل :



س + ص + ع = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٨,٢

(جـ) ٢٢ (د) ٢٢,٢

(٥) فى الشكل المقابل :

$س^٢ - ص^٢$ = ...

(أ) $(س - ص)^٢ - ٢$ س ص (ب) $ع^٢$

(جـ) ع ص (د) صفر

(٦) إذا كان Δ س ص ع ~ Δ أ ب حـ ، م (Δ س ص ع) = ٣ م (Δ أ ب حـ)

وكان : س ص = ٣ سم فإن : أ ب = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) ٣

السـؤال الثانى **٤ درجات**

أ ب حـ ء ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ن منتصف $\overline{ص ع}$

وكان : أ م = ٤ سم ، س ن = ٩ سم

فأثبت أن : مساحة المضلع أ ب حـ ء : مساحة المضلع س ص ع ل = ١٦ : ٨١



أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

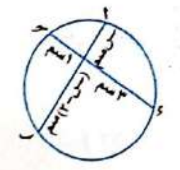
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) ٣٦ (جـ) ٢٠ (د) ٦

(٢) فى الشكل المقابل :

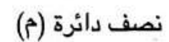


س = ...

(أ) ٥ (ب) ٢

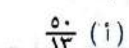
(جـ) ٣ (د) ٧

(٣) فى الشكل المقابل :



نصف دائرة (م)

فإن : هـ ء = ... سم.



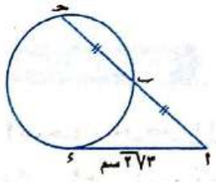
(أ) $\frac{50}{13}$ (ب) $\frac{55}{13}$ (جـ) $\frac{57}{13}$ (د) $\frac{59}{13}$

(٤) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

(أ) متطابقان. (ب) متساويان فى المساحة.

(جـ) متساويان فى المحيط. (د) متشابهان.

(٥) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة

فإن : أ حـ = ... سم.



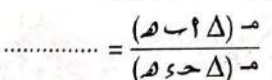
(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ٣

(جـ) ١٨ (د) ٦





(٦) في الشكل المقابل :



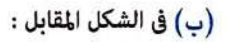
$\frac{م(\Delta أ ب هـ)}{م(\Delta حـ ء هـ)} = ...$

$\frac{٩}{٤٩}$ (أ) $\frac{٢٥}{٤٩}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{١٦}{٤٩}$ (د)

السـؤال الثاني **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{ب حـ}$

، ص منتصف $\overline{هـ و}$ **أثبت أن :** Δ أ ب س ~ Δ ء هـ ص



(ب) في الشكل المقابل :



أثبت أن :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 حتى درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ء هـ} // \overline{ب حـ}$

فإن : س = ...



٤ (أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د)

(٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماسًا للدائرة فإن : $(أ ء)^٢ = ...$



(أ) أ ب × ب حـ (ب) أ حـ × أ ب

(جـ) أ ء × أ ب (د) $(أ حـ)^٢$

(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ د جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

فإن : أب = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٤) في الشكل المقابل :

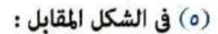


إذا كان : أجـ مماس للدائرة م عند أ ، أد مماس للدائرة ن عند أ

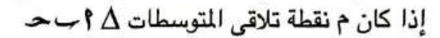
فإن : أب = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

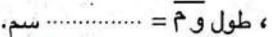
(جـ) ٦ (د) ٧



(٥) في الشكل المقابل :



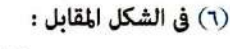
إذا كان م نقطة تلاقى المتوسطات Δ أ ب جـ



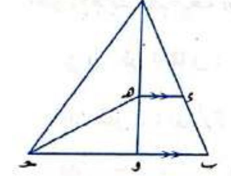
، طول وم = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨



(٦) في الشكل المقابل :



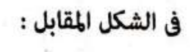
إذا كانت مساحة (Δ أ هـ جـ) = ١٥ سم٢

، مساحة (Δ و هـ جـ) = ٩ سم٢

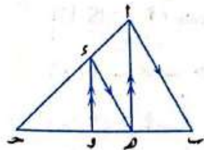
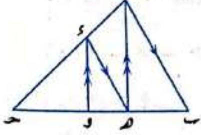
، أب = ١٦ سم فإن : أد = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٣



السؤال الثاني ٤ درجات

في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، د ∈ أجـ ، دهـ // أب ، دو // أهـ

أثبت أن : (جـ هـ)٢ = جـ و × جـ ب



اختبار 6 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

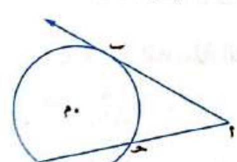
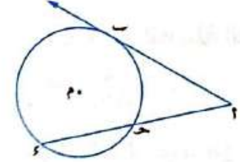
الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل إذا كانت الأطوال مقدره بالسنتيمتر :

فإن : س + ص = ... سم.

(أ) ١٨ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(٢) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، مساحة (Δ أ ب حـ) = ٤ مساحة (Δ ء هـ و)

، وكان : ء هـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨

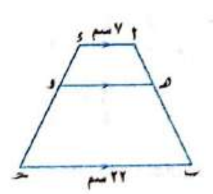
(٣) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

إذا كان : $(\text{أ ب})^2$ = ...

(أ) أ حـ × حـ ء (ب) أ حـ × أ ء

(جـ) أ ب × أ حـ (د) أ ب × حـ ء



(٤) في الشكل المقابل :

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٢}{٣}$

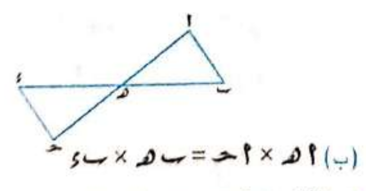
فإن : هـ و = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥

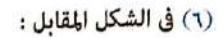
(٥) لأثبات أن أ ب حـ ء رباعي دائري

نحتاج أثبات أن ....

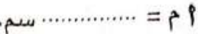


(أ) أ ب × أ حـ = ء ب × ء حـ (ب) أ هـ × أ حـ = ب هـ × ب ء

(جـ) ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (د) أ هـ × هـ حـ = ب هـ × هـ ء



(٦) في الشكل المقابل :



أ م = ... سم.

(أ) ٩ س　　　(ب) ٢ $س^٢$ + ٤

(جـ) ٣٩　　　(د) ٢٦

السؤال الثانى　**٤ درجات**　(١) ٢ درجة　(٢) ٢ درجة

في الشكل المقابل :

$\overline{سص}$ // $\overline{ده}$ // $\overline{لع}$

أوجد : (١) طول $\overline{هـم}$　　(٢) طول $\overline{مع}$



اختبار 7 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول　**٦ درجات**　كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

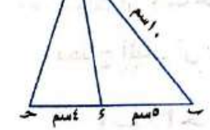
فإن : $\frac{م(\Delta \text{ س ص ع})}{م(\Delta \text{ أ ب جـ})}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　　(ب) ٣　　(جـ) $\frac{١}{٩}$　　(د) ٩

(٢) في الشكل المقابل :

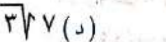
$\overleftarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

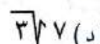
، أ د = ... سم



(أ) ٨　　　(ب) ٦٠

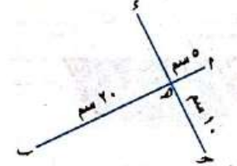
(جـ) ٢ $\sqrt{١٥}$　　　(د) ٧ $\sqrt{٣}$







(٣) فى الشكل المقابل :



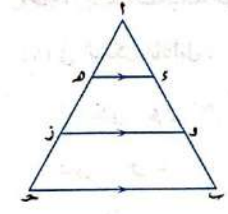
إذا كان : $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{حـ ء}} = \{\text{هـ}\}$

فإن : النقط أ ، حـ ، ب ، ء تقع على دائرة واحدة

إذا كان : هـ ء = ...

(أ) ٥ سم　　(ب) ٨ سم　　(جـ) هـ حـ　　(د) هـ ب

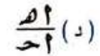
(٤) فى الشكل المقابل :



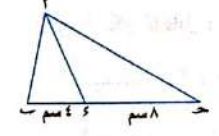
$\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{و ز}}{\text{ب حـ}}$　　(ب) $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ و}}$

(جـ) $\frac{\text{هـ ز}}{\text{هـ حـ}}$　　(د) $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$



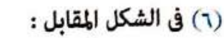
(٥) فى الشكل المقابل :



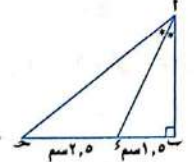
إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠ء أ ب) = ٢ ق (∠ء أ حـ)

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٤　　(ب) ٦　　(جـ) ٨　　(د) ٩



(٦) فى الشكل المقابل :



أ حـ = ... سم.

(أ) ٤　　(ب) ٥

(جـ) ٦　　(د) ٧

السـؤال الثانى　**٤ درجات**

س ص ع مثلث ، نصفت زاوية ص بمنصف قطع $\overline{\text{س ع}}$ فى م ، ثم رسم

$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ع ص}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ فى ن **أثبت أن :** $\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ص ن}}$

وإذا كان : س ص = ٦ سم ، ص ع = ٤ سم **فأوجد :** طول $\overline{\text{س ن}}$



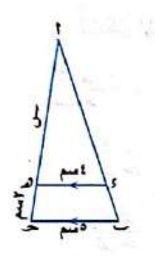
اختبار 8 حتى درس 4 من الوحدة الرابعة

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

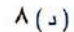


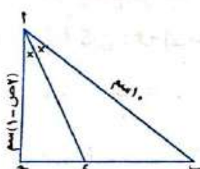
(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{دهـ} // \overline{ب حـ}$

فإن : س = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨





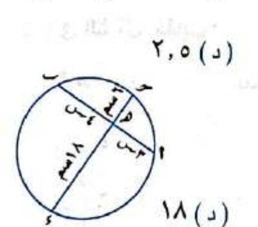
(٢) في الشكل المقابل :

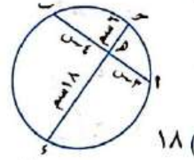
$\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ، $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{٥}{٣}$ فإذا كان : أ ب = ١٠ سم

، أ حـ = (٢ ص − ١) سم

فإن : ص = ... سم

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

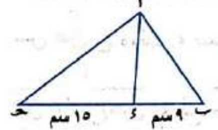


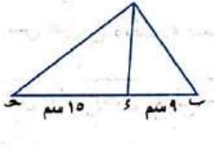


(٣) في الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ١٨



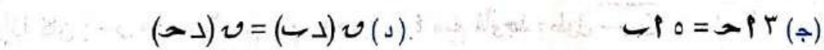


(٤) في الشكل المقابل :

لإثبات أن ق (∠ب أ ء) = ق (∠ء أ حـ)

نحتاج معرفة أن ....

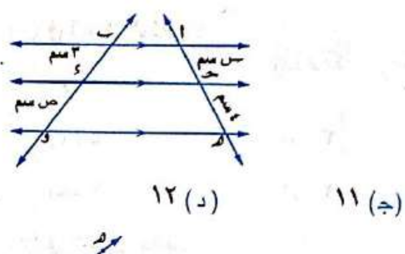
(أ) أ ب = أ حـ (ب) أ ء = $٢\sqrt{٣٠}$



(جـ) ٣ أ حـ = ٥ أ ب (د) ق (∠ب) = ق (∠حـ)



(٥) في الشكل المقابل :

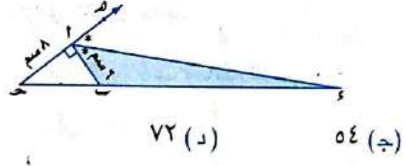


إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ٥٧$

فإن : س + ص = ... سم.

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٦) في الشكل المقابل :



مساحة Δ أ ب ء = ... $سم^٢$.

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٤ (د) ٧٢

السؤال الثاني **٤ درجات**

في الشكل المقابل :

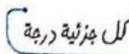
$\overline{بهـ} // \overline{س ص} // \overline{حـ ء}$ ، $\frac{أب}{أحـ} = \frac{هـ ص}{ص ء}$

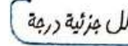
أثبت أن : $\overleftrightarrow{أس}$ ينصف ∠ ب أ حـ

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 9 حتى درس 5 من الوحدة الرابعة



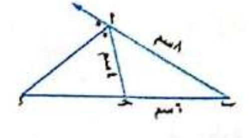


أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

فإن : حـ ء = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

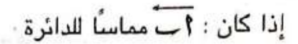
(٢) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) ٧ (د) ٢

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماساً للدائرة

فإن : س = ...

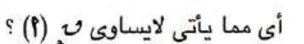
(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ١٥° (د) ٥٥°

(٤) إذا كان : أ م = ٤ سم ، نق = ٣ سم حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ٧

(٥) فى الشكل المقابل :

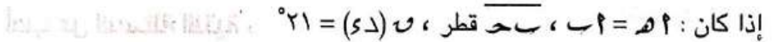


أى مما يأتى لايساوى $ق_م$ (أ) ؟

(أ) $(أ م)^٢ - (ء م)^٢$ (ب) $-$ أ ب × أ حـ

(جـ) $-$ ء أ × أ هـ (د) $-$ و أ × أ ز

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ هـ = أ ب ، $\overline{ب حـ}$ قطر ، ق (∠ ء) = ٢١°

فإن : ق (∠ أ) = ...



(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤

(جـ) ١٠٦ (د) ١١٠

السؤال الثانى **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر $\overline{ب حـ}$ يمر بالنقطة أ بحيث أ ب = ٣ أ حـ

احسب : (١) طول الوتر $\overline{ب حـ}$ (٢) بُعد الوتر $\overline{ب حـ}$ عن مركز الدائرة.



امتحانات الكتاب المدرسى

نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$ فإن : ل + م = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) -٧

(٢) إذا كانت : جا $\theta = -١$ ، جتا $\theta = ٠$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢π

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ − ٣ ت ، ٢ + ٣ ت هى ....

(أ) $س^٢ + ٤ س + ١٣ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٤ س + ١٣ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٤ س - ١٣ = ٠$ (د) $س^٢ - ٤ س - ١٣ = ٠$

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م + ٢) س + ٣ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -٣

---

[٢] أكمل ما يأتى :

(١) الدالة د حيث د (س) = − (س − ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة ....

(٢) الزاوية التى قياسها ٩٣٠° تقع فى الربع ....

(٣) إذا كان : جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ...

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها ضعف جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هى ....

---

[٣] (أ) ضع العدد : $\frac{٢ - ٣ ت}{٣ + ٢ ت}$ فى صورة عدد مركب حيث : $ت^٢ = -١$

(ب) إذا كان : ٤ جا $\theta - ٣ = ٠$ أوجد : θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

٤ (أ) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = − س^{٢} + ٨ س − ١٥

(١) ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٧]

(٢) عيِّن من الرسم إشارة هذه الدالة.

(ب) إذا كان : س = ٣ + ٢ ت ، ص = $\frac{٤ - ٢ ت}{١ - ت}$

فأوجد : س + ص فى صورة عدد مركب.

---

٥ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٣ س − ٤ ≥ ٠

(ب) إذا كان : ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة : حا (٣٦٠° − θ) − حتا (٩٠° − θ)

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٤٣} = ...

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ٦ س + ل = ٠ حقيقيين متساويين فإن : ل = ...

(٣) إذا كان : ٠° < θ < ٩٠° وكان حا ٢ θ = حتا ٣ θ فإن : ق (∠ θ) = ...

(٤) مدى الدالة د حيث د (θ) = $\frac{٣}{٢}$ حا θ هو ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة : س^{٢} (س − ١) (س + ١) = ٠ من الدرجة ....

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٣ س − م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : م = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) −٥

(٣) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى ١٨٠° (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية المثمن المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) إذا كان : ٢ جتا θ = $-\sqrt{3}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فإن : ق ($\angle \theta$) = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{6\pi}{7}$ (جـ) $\frac{4\pi}{3}$ (د) $\frac{7\pi}{6}$

---

٣ (أ) **أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ ك س^{2} + ٧ س + ك^{2} + ٤ = ٠**

هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(ب) إذا كان : جا θ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (-٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

فأوجد : ق ($\angle \theta$)

---

٤ (أ) (١) **أوجد قيمتى أ ، ب اللتين تحققان المعادلة : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت**

(٢) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :** س (س + ١) − ٢ ≥ ٠

(ب) زاوية مركزية قياسها θ مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم وتحصر قوسًا طوله ٢٦ سم أوجد θ بالقياس الستينى.

---

٥ (أ) إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة :

حـ = $\frac{ن}{2}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا ٢١٠ ؟

(ب) إذا كان : جا θ = $\frac{4}{5}$ حيث : ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد : جا (١٨٠° − θ) + ظا (٣٦٠° − θ) + ٢ جا (٢٧٠° − θ)

نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة

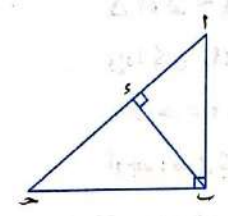
النموذج الأول

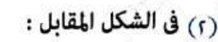
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

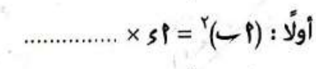
(١) المضلعان المشابهان لثالث يكونان ....

(٢) فى الشكل المقابل :





أولًا : $(أب)^٢$ = أء × ....



، $(حـب)^٢$ = حـأ × ....

ثانيًا : ءأ × ءحـ = ...

ثالثًا : أب × بحـ = ... × ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم

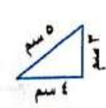
، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى تساوى ....

(أ) ١ : ٥   (ب) ١ : ٣   (جـ) ١ : ٢   (د) ٢ : ١

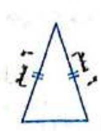
(٢) أى مثلثين من المثلثات الآتية متشابهان ؟



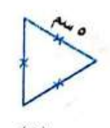
(١)



(٢)



(٣)



(٤)

(أ) (١) ، (٤)   (ب) (٢) ، (٤)   (جـ) (١) ، (٣)   (د) (٣) ، (٤)

(٣) إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين ١ : ٤ فإن النسبة بين مساحتى سطحيهما تساوى ....

(أ) ١ : ٢   (ب) ١ : ٤   (جـ) ١ : ٨   (د) ١ : ١٦

(٤) فى الشكل المقابل :

كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

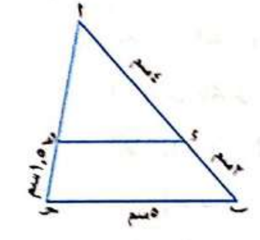
ماعدا العبارة ....

(أ) (اب)^2 = اجـ × اء   (ب) (اب)^2 = اهـ × او

(جـ) اجـ × اء = اهـ × او   (د) اجـ × جـ ء = اهـ × هـ و

---

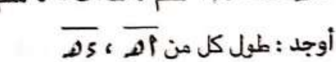
٣ (أ) فى الشكل المقابل :



Δ ء ا هـ ~ Δ ا ب جـ أثبت أن : ءهـ // ب جـ

وإذا كان : اء = ٤ سم ، ءب = ٢ سم

، هـ جـ = ١,٥ سم ، ب جـ = ٥ سم



أوجد : طول كل من اهـ ، ءهـ

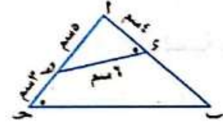
(ب) ا ب جـ مثلث ، ء ∈ ب جـ بحيث : ب ء = ٥ سم ، ء جـ = ٣ سم ، هـ ∈ ا جـ

بحيث : اهـ = ٢ سم ، جـ هـ = ٤ سم

أثبت أن : Δ ء هـ جـ ~ Δ ا ب جـ ثم أوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما.

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

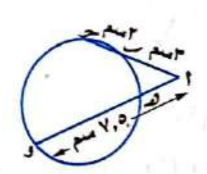


ق (∠ ا ء هـ) = ق (∠ جـ) ، اء = ٤ سم ، اهـ = ٥ سم

، ءهـ = ٦ سم ، هـ جـ = ٣ سم

أوجد طول كل من : ءب ، ب جـ

(ب) فى الشكل المقابل :



جـ ب ∩ و هـ = {ا} ، اب = ٣ سم

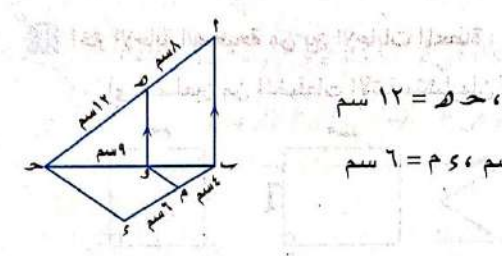
، ب جـ = ٢ سم ، او = ٧,٥ سم

أوجد : طول هـ و

---

٥ (أ) اء متوسط فى المثلث ا ب جـ ، نصفت ∠ ا ء ب بمنصف قطع اب فى هـ ، نصفت ∠ ا ء جـ بمنصف قطع اجـ فى و ، رسم هـ و أثبت أن : هـ و // ب جـ

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ // $\overline{هـو}$ ، أهـ = ٨ سم ، حـ هـ = ١٢ سم

، حـ و = ٩ سم ، ب م = ٤ سم ، ء م = ٦ سم

أولاً : أوجد : طول $\overline{ب و}$

ثانيًا : أثبت أن : $\overline{و م}$ // $\overline{حـ ء}$

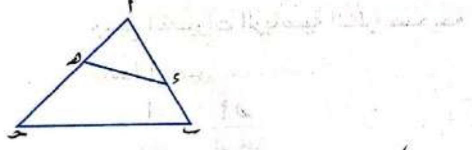
النموذج الثانى

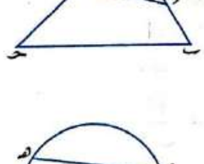
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

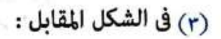
(٢) فى الشكل المقابل :



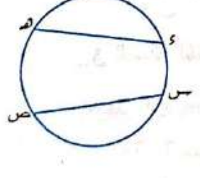


إذا كان Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

فإن : ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ ....)



(٣) فى الشكل المقابل :

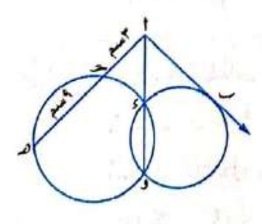


إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين

$\overline{ءهـ}$ ، $\overline{س ص}$ فى نقطة ن

فإن : ن ء × ن هـ = ...

(٤) فى الشكل المقابل :



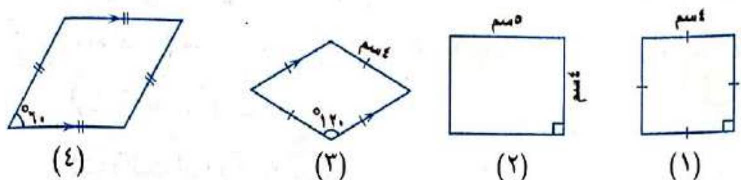
إذا كان : أ حـ = ٣ سم

، حـ هـ = ٩ سم

فإن : أ ب = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) **أى مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟**



(أ) المضلعان (١) ، (٢) (ب) المضلعان (١) ، (٣)

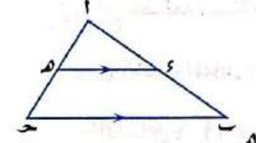
(جـ) المضلعان (٣) ، (٤) (د) المضلعان (٢) ، (٤)

(٢) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥ (جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١

(٣) **فى الشكل المقابل :**

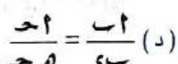


جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

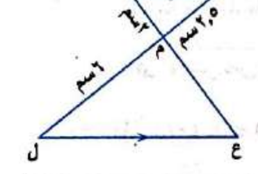
ماعدا التعبير ....

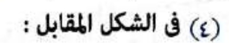
(أ) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (ب) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{بد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$



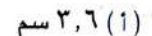
(٤) **فى الشكل المقابل :**





طول $\overline{\text{مع}}$ يساوى ....

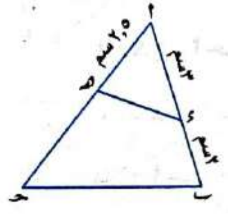
(أ) ٣,٦ سم (ب) ٤ سم



(جـ) ٤,٢ سم (د) ٤,٨ سم

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



△ أ ب جـ ~ △ أ هـ د

أثبت أن الشكل ب جـ هـ د رباعى دائرى

وإذا كان : أد = ٣ سم ، ب د = ٢ سم ، أهـ = ٢,٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـجـ}}$



(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى و ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ فى م   أثبت أن : $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

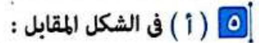
ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

، أ ب = ٤,٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

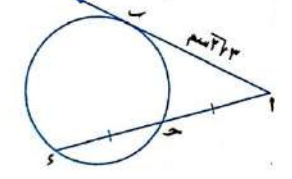
أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ب حـ = ٢٧ سم ، أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ٨ سم ، ء حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم   أثبت أن : Δ ب أ حـ ~ Δ أ ء حـ

وأوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما .



٥ (أ) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة ، حـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

، أ ب = ٣√٢ سم

أوجد طول : $\overline{\text{أ حـ}}$

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم

، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$



الامتحانات النهائية

- امتحان الوزارة التجريبى (يناير ٢٠١٩)
- ١٠ نماذج امتحانية
- ١٠ نماذج امتحانية الكترونية مشار إليها بأكواد QR codes



امتحان الوزارة التجريبى (يناير ٢٠١٩)

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كانت د (س) = س + ٢ حيث : س ∈]-٤ ، ٣[

فإن : د (س) تكون موجبة عندما س ∈ ....

(أ)]-∞ ، -٢[(ب)]-٢ ، ∞[

(ج)]-٤ ، -٢[(د)]-٢ ، ٣[

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ءجـ}$ = {هـ} ، أهـ = ٥ سم

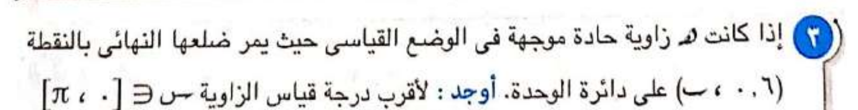
، هـ و = ٣ سم ، هـ جـ = ٤ سم

، ء و = ٤ سم

، $\overline{ءو} \perp \overline{بهـ}$ ، النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على محيط دائرة

فإن : طول $\overline{وب}$ = ... سم.

(أ) ٠,٥ (ب) ١ (ج) ١,٥ (د) ٢



(٣) إذا كانت هـ زاوية حادة موجهة فى الوضع القياسى حيث يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٠,٦ ، ب) على دائرة الوحدة. **أوجد :** لأقرب درجة قياس الزاوية س ∈ [٠ ، π]

والتى تحقق العلاقة : طا س = ١٠ جا (٩٠° − هـ) − طا^{٢} ٣٩٠°

(٤) إذا كان : (١ + ت^{٤}) (١ − ت^{٧}) = س + ت ص

فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ١

٥ فى الشكل المقابل :

ب ، هـ ، حـ على استقامة واحدة

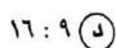
إذا كان : حـ هـ = ٣ سم ، ب هـ = ٩ سم

، ب ء = ٤,٥ سم ، ء هـ = ٦ سم

، ب أ = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم

فإن معامل التشابه بين المثلثين Δ أ ب حـ ، Δ ء ب هـ = ...

(أ) ٤ : ٣　　(ب) ٣ : ٤　　(جـ) ١٦ : ٩　　(د) ٩ : ١٦

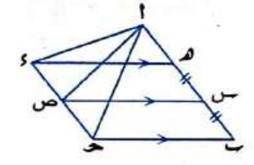


٦ فى الشكل المقابل :

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ص س}$ // $\overline{حـ ب}$ ،

$\overleftrightarrow{أ ص}$ ينصف ∠ حـ أ ء

أثبت أن : Δ حـ أ ء متساوى الساقين.





٧ قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس الذى طوله يساوى طول قطر الدائرة مقربة لأقرب درجة يساوى ....°

(أ) ١١٣　　(ب) ١١٥　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١٨٠

٨ فى الشكل المقابل :

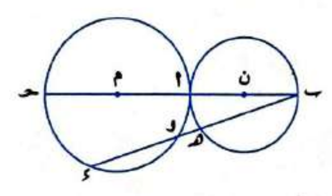
إذا كانت : ن دائرة طول نصف قطرها ٣ سم

تمس دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم

فى أ ، هـ ب = ٥ سم ، هـ و = ٢ سم

فإن : طول $\overline{و ء}$ = ... سم

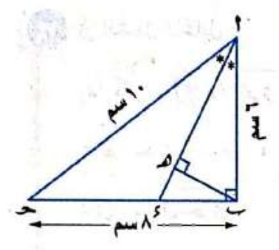
(أ) ١٢　　(ب) ٧　　(جـ) ٦　　(د) ٥







٩ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

، ب حـ = ٨ سم

، أ ب = ٦ سم ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ **احسب طول :** $\overline{\text{ء هـ}}$

---

١٠ إذا كان : طا (١٨٠° + ٥ هـ) + طا (٢٧٠° + ٤ هـ) = ٠

فإن : قيمة هـ التي تحقق المعادلة حيث هـ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [تساوي ....°

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٩٠

---

١١ **في الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ منصف داخلي للزاوية ب أ حـ

، أ حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ٤ سم

، ء ب = ٢ سم فإن : طول $\overline{\text{أ ء}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٤٢}$ (د) $\sqrt{٥٨}$

---

١٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٥ س + ٧ = صفر

فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها : ل^{٢} م ، م^{٢} ل

---

١٣ **في الشكل المقابل :**

إذا كانت : م دائرة ، رسم $\overline{\text{أ هـ}}$ يقطع الدائرة في ء ، هـ

، رسم $\overline{\text{أ حـ}}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ ، أ ء = ء حـ

فإن قيمة : س = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

١٤ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ ء} // \overline{هـ و} // \overline{ب حـ}$ ، أ هـ = ٤ سم

، هـ ب = ٦ سم ، ء و = ٢ سم

فإن : طول $\overline{حـ و}$ = ... سم.

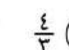
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

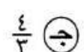


١٥ إذا كان جذرا المعادلة : $س^2 + (2ك + 3)س + ك^2 = 0$ حقيقيين ومتساويين

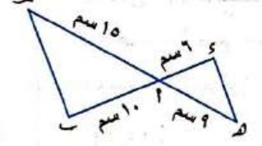
فإن : ك = ...

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{-3}{4}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{-4}{3}$





١٦ في الشكل المقابل :



$\overline{ء ب} \cap \overline{هـ حـ} = \{أ\}$ ، أ هـ = ٩ سم ، أ ب = ١٠ سم

، أ حـ = ١٥ سم

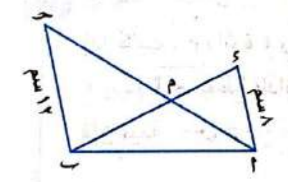
، ء أ = ٦ سم ، م (△ ء أ هـ) = ٣٦ $سم^2$

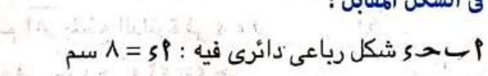
فإن : م (△ أ ب حـ) = ... $سم^2$.

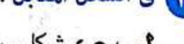


(أ) ٦٠ (ب) ٧٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٢٥

١٧ في الشكل المقابل :

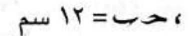






أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : أ ء = ٨ سم

، حـ ب = ١٢ سم



أوجد : م (△ أ م ء) : م (△ ب م حـ)



(١٨) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ يمس الدائرة م عند نقطة ب ، $\overrightarrow{أو}$ يقطع الدائرة م فى النقطتين حـ ، و على الترتيب

فإذا كان أحـ = ٣ سم ، حـ و = ٩ سم

، فإن : $ق_م$ (أ) = ...

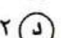
(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

(١٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ،

أء : أب = ٢ : ٥

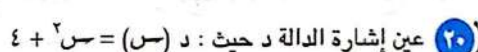
فإن : س = ...



(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٢

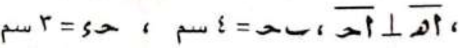
(٢٠) عين إشارة الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ + ٤



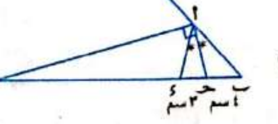
ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ صفر

(٢١) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{أحـ}$ منصف للزاوية الداخلة للمثلث أبء عند ∠ أ



، $\overline{أهـ} \perp \overline{أحـ}$ ، بحـ = ٤ سم ، حـء = ٣ سم



فإن بهـ : هـء = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ (د) ٤ : ٣

٢٢ إذا كان (٢ ت) أحد جذرى المعادلة التربيعية : $س^2 + أ س + ب = ٠$

حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية ، فإن جميع ما يلى صحيح ماعدا :

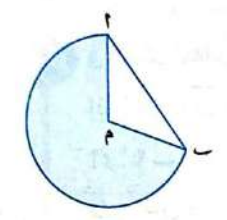
(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (-٢ ت)

(ب) مجموع جذرى المعادلة = صفر

(جـ) حاصل ضرب جذرى المعادلة = -٤

(د) المميز للمعادلة التربيعية < صفر

٢٣ فى الشكل المقابل :



أوجد محيط الجزء المظلل الذى يمثل جزء من الدائرة م علمًا بأن مساحة الدائرة ٣٦ π سم^2

، جا (∠ أ ب م) = $\frac{١}{٢}$

٢٤ إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٣ $س^2$ - (ك + ٢) س + $ك^2$ + ٢ ك = ٠

هو معكوس ضربى للجذر الآخر فإن : ك = ...

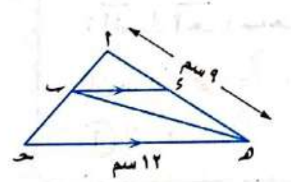
(أ) -٣ ، ١ (ب) -٣ ، -١ (جـ) ٣ ، -١ (د) ٣ ، ١

٢٥ إذا كان : ١٠ جا س = ٦ حيث : س قياس أكبر زاوية موجبة ، س ∈] ٠ ، ٢ π [

فإن القيمة العددية للمقدار : قا (٥٤٠° + س) تساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{-٥}{٣}$

٢٦ فى المثلث أ هـ حـ : $\overline{ب ء}$ // $\overline{حـ هـ}$ ،



أ ء : ء هـ = ٣ : ٤ ، أ هـ = ٩ سم

، هـ حـ = ١٢ سم

أثبت أن : $\overleftarrow{هـ ب}$ منصف للزاوية أ هـ حـ



(٢٧) إذا كان : د (س) = س^{٢} − ٧ س + ١٢ ، س ∈ ح فإن جميع ما يلى صحيح ماعدا ....

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هى ح − [٣ ، ٤]

(جـ) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى]٣ ، ٤[

(د) د (س) موجبة فى الفترة ح −]٣ ، ٤[

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = ٤ جا س حيث س ∈ [٠ ، π] يساوى ....

(أ) [٠ ، ٤]

(ب) [٠ ، ٤[

(جـ) [−٤ ، ٠]

(د) [−٤ ، ٤]



النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كانت : طا (١٨٠° + θ) = ١ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٣٥°

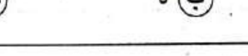
(٢) فى الشكل المقابل :

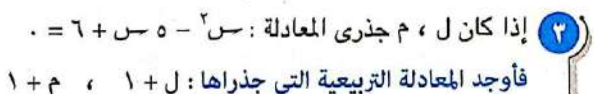


إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

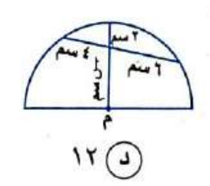




(٣) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها : ل + ١ ، م + ١

(٤) فى الشكل المقابل :



نصف دائرة مركزها م

فإن : س = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٥) مجموعة حل المتباينة (س − ٣) (س − ٧) < ٠ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، ٧} (ب)]٣ ، ٧[

(جـ) [٣ ، ٧] (د) ح − [٢ ، ٥]

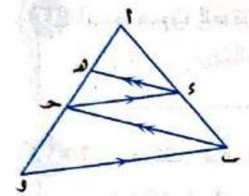


٦ في الشكل المقابل :

$\overline{ده} // \overline{بح}$

، $\overline{دح} // \overline{بو}$

أثبت أن : $(أح)^٢ = أه \times أو$



٧ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين .... القاعدة.

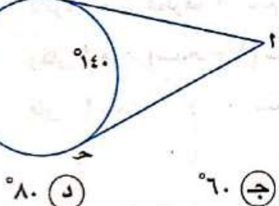
(أ) يوازي (ب) عمودي على (جـ) ينصف (د) يساوي

٨ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أح}$ مماسان للدائرة

، ق $(\widehat{بح}) = ١٤٠°$

فإن : ق (∠ أ) = ...

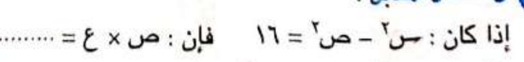


(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٦٠° (د) ٨٠°

٩ يكون جذرا المعادلة : ك $س^٢$ − ١٢ س + ٩ = ٠ متساويين إذا كانت ....

(أ) ك > ٤ (ب) ك < ٤ (جـ) ك = ٤ (د) ك = ٩

١٠ إذا كانت : θ قياس زاوية موجبة في وضعها القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (− س ، س) حيث س > ٠ .



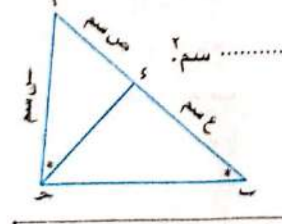
أوجد قيمة س ثم أوجد : ٢ جا (٢٧٠° − θ) − ظتا θ

١١ في الشكل المقابل :

إذا كان : $س^٢ − ص^٢ = ١٦$ فإن : ص × ع = ... $سم^٢$

(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٦



(١٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٢}$ هى ....



(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ت (د) −ت

(١٣) أ ب جـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{أب}$ حيث : أء = ٥ سم ، ء ب = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$



حيث : أ هـ = ٤ سم ، هـ جـ = ٦ سم

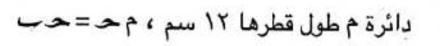
أثبت أن : (١) Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

(٢) الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى.

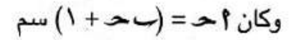
(١٤) في الشكل المقابل :



دائرة م طول قطرها ١٢ سم ، م جـ = جـ ب



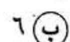
وكان أ جـ = (ب جـ + ١) سم



فإن : أ ب = ... سم.



(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

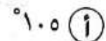





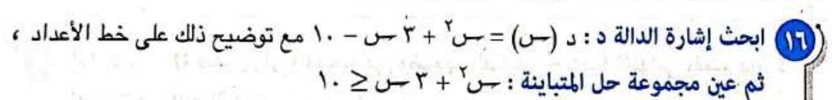
(١٥) الزاوية التى قياسها $\frac{٧\pi}{٦}$ قياسها الستينى يساوى ....



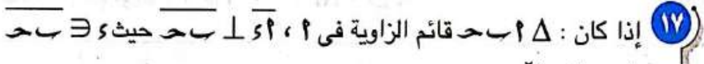
(أ) °١٠٥ (ب) °٢١٠ (جـ) °٤٢٠ (د) °٨٤٠




(١٦) **ابحث إشارة الدالة د :** د (س) = $س^٢$ + ٣ س − ١٠ مع توضيح ذلك على خط الأعداد ،
ثم عين مجموعة حل المتباينة : $س^٢$ + ٣ س ≤ ١٠



(١٧) إذا كان : Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ حيث ء ∈ $\overline{ب جـ}$

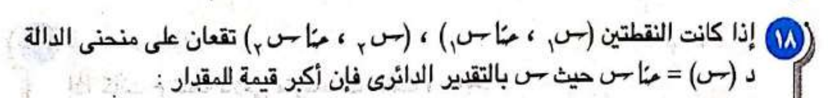


فإن : $(أب)^٢$ = ...

(أ) ب ء × ب جـ (ب) ب ء × ء جـ

(جـ) جـ ء × جـ ب (د) أ ب × أ جـ



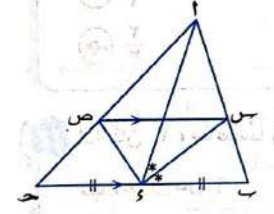


١٨ إذا كانت النقطتين ($س_١$ ، جتا $س_١$) ، ($س_٢$ ، جتا $س_٢$) تقعان على منحنى الدالة د (س) = جتا س حيث س بالتقدير الدائرى فإن أكبر قيمة للمقدار :

(جتا $س_١$ − جتا $س_٢$) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١٨٠°

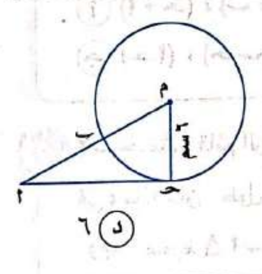
١٩ في الشكل المقابل :



(١) أثبت أن : $\overleftarrow{ءص}$ ينصف ∠ أءحـ

(٢) أوجد : ق (∠ س ء ص)

٢٠ في الشكل المقابل :



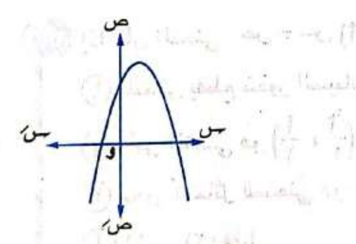
$\overline{أحـ}$ تمس الدائرة م فى حـ ، م حـ = ٦ سم

، $ق_م$ (أ) = ٦٤

فإن : أب = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢١ الشكل المقابل يمثل المنحنى :



ص = أ$س^٢$ + ب س + جـ

فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

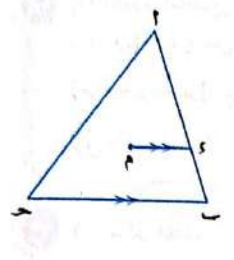
(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠

(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

٢٢ إذا كان : جتا س = $\frac{٣}{٥}$ ، ٢٧٠° < س < ٣٦٠°

أوجد قيمة : جا (١٨٠° − س) + ظا (٩٠° − س) + ظا (٢٧٠° − س)

٢٣ في الشكل المقابل :



إذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب جـ

، كان : $\overline{ءم} // \overline{ب جـ}$

فإن : $\frac{ءم}{ب جـ}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٢٤ إذا كان : أ ، ب قياسًا زاويتان متكافئتين فأي مما يأتي يمثل قياسًا زاويتين متكافئتين أيضًا

حيث جـ ∈ ص ؟

(أ) (أ + جـ) ، (ب + جـ) (ب) (أ − جـ) ، (ب − جـ)

(جـ) (جـ أ) ، (جـ ب) (د) كل ما سبق.

٢٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رُسم $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$

في ء فإذا كان : طول $\overline{ب ء}$ = ٢٤ سم ، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥

أوجد : محيط △ أ ب جـ

٢٦ إذا كان المنحنى : ص = س (أ − س) فأي من العبارات الآتية يكون صحيحًا ؟

(١) المنحنى يقطع محور السينات عند (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠)

(٢) رأس المنحنى هو $\left(\frac{أ}{٢} ، \frac{أ^٢}{٤}\right)$

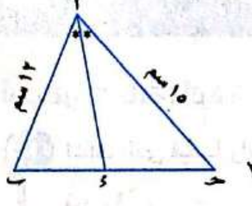
(٣) محور التماثل للمنحنى هو س = أ

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)



٢٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة (Δ أ ب جـ) = ٧٢ سم^{٢}

فإن مساحة (Δ أ ء ب) = ... سم^{٢}.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٤٠

٢٨ إذا كانت : جتا θ > صفر ، جا θ < صفر فإن : θ تقع في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.





النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

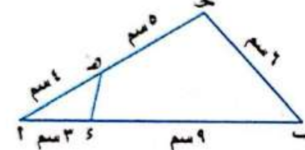
١ المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ٦٠° يشابه المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٦٠° ، ....

(أ) ٧٠° (ب) ١١٠° (جـ) ٨٠° (د) ٣٠°

٢ إذا كان : ل ، ٢ - ل هما جذرا المعادلة : $س^٢$ + ك س + ٦ = ٠
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -٢ (جـ) -٣ (د) ٥

٣ فى الشكل المقابل :

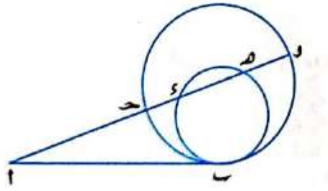


هـ ∈ $\overline{أحـ}$ ، ء ∈ $\overline{أب}$ حيث : أء = ٣ سم
، ءب = ٩ سم ، بحـ = ٦ سم
، هـحـ = ٥ سم ، هـأ = ٤ سم
أثبت أن : Δ أءهـ ~ Δ أحـب ثم أوجد : طول $\overline{هـء}$

٤ الدالة د : د (س) = (س - ١) (س + ٣) تكون موجبة فى الفترة ....

(أ) [-٣ ، ١] (ب)]-٣ ، ١[
(جـ) ح - [-٣ ، ١] (د) ح -]-٣ ، ١[

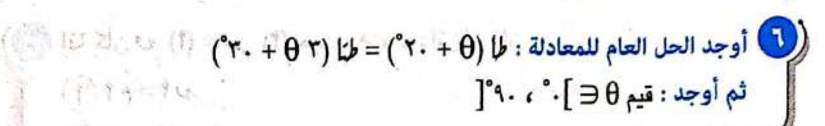
٥ فى الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{أب}$ مماسة مشتركة لدائرتين متماستين عند ب
فإن أحـ : أء = ...

(أ) أب : أو (ب) ٣ : ٤ (جـ) أء : أو (د) أهـ : أو

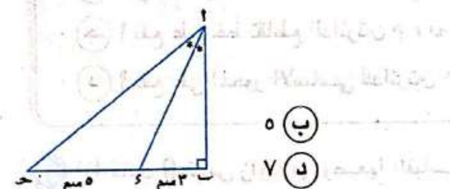




٦ أوجد الحل العام للمعادلة : ظا $(\theta + ٢٠^\circ)$ = ظتا $(٣\theta + ٣٠^\circ)$

ثم أوجد : قيم $\theta \in]٠^\circ ، ٩٠^\circ[$

٧ فى الشكل المقابل :



أ ب = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

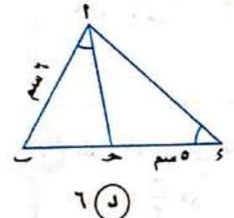
(ج) ٦ (د) ٧

٨ إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فإن جذرى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + ب − أ = ٠ يكونان ....

(أ) مركبان وغير حقيقيين. (ب) مركبين مترافقين.

(ج) نسبيين. (د) متساويين.

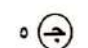
٩ فى الشكل المقابل :



ج ∈ $\overline{ب د}$ ، ق(∠د) = ق(∠ب أ ج)

، أ ب = ٦ سم ، ج د = ٥ سم

فإن : ب ج = ... سم.

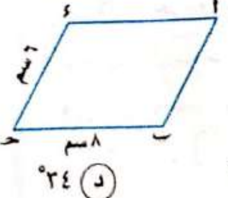


(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

١٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢س - ٥ = ٠$.

فكون المعادلة التى جذراها : $ل^٢ + ١$ ، $م^٢ + ١$

١١ فى الشكل المقابل :



أ ب ج د متوازى أضلاع مساحته ٤٠ $سم^٢$

فإن : ق(∠أ) = ...

(أ) ٣٧° (ب) ٥٦° (ج) ٥٣° (د) ٣٤°

(١٢) إذا كان $ق_{م}$ (أ) = $ق_{ن}$ (أ) حيث : م ، ن دائرتان فإن ....

(أ) أ م = أ ن

(ب) $نق_{م} = نق_{ن}$

(جـ) أ تقع على خط تقاطع الدائرتين م ، ن

(د) أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

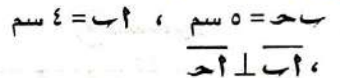
---

(١٣) إذا كانت θ قياس زاوية فى وضعها القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(س ، \frac{٣}{٥}\right)$ حيث س < ٠

فأوجد قيمة المقدار : جا (٩٠° + θ) − ظتا (١٨٠° + θ) جتا (٩٠° + θ)

---

(١٤) فى الشكل المقابل :



ب حـ = ٥ سم ، أ ب = ٤ سم

، $\overline{أب} \perp \overline{أحـ}$

فإن : $\frac{ب ء}{ء حـ}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

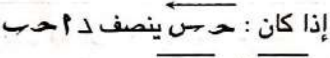
---

(١٥) طول القوس فى الدائرة التى طول نصف قطرها ٦ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{٣\pi}{٢}$ سم (ب) ٢ π سم (جـ) $\frac{٥\pi}{٢}$ سم (د) ٣ π سم.

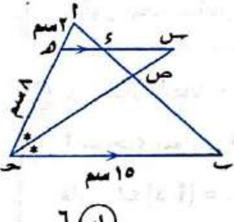
---

(١٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{حـ س}$ ينصف ∠ أ حـ ب

، $\overline{س ء} \parallel \overline{ب حـ}$

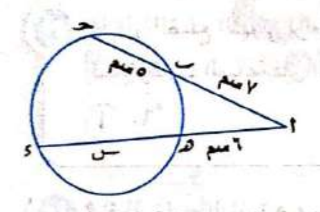


فإن : س ء = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



(١٧) في الشكل المقابل :

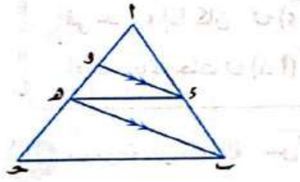


أب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم

، أهـ = ٦ سم ، ءهـ = س سم

أوجد : قيمة س

(١٨) في الشكل المقابل :



إذا كان : ءو // ب هـ

لأثبات أن : ءهـ // ب حـ يكون كافيًا

الحصول على ....

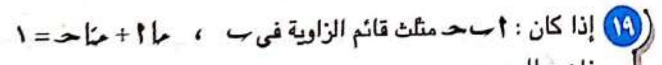
(أ) $\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٤}$ فقط. (ب) أو × أحـ = $(أهـ)^٢$ فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) ليس كل ما سبق.

(١٩) إذا كان : أب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، حا أ + حتا حـ = ١

فإن : طا حـ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\sqrt{٢}$

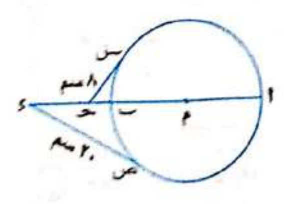


(٢٠) أب حـ مثلث فيه : $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الداخلة للمثلث ويقطع ب حـ في ء فإذا كان

أحـ = ١٥ سم ، أب = ٢٧ سم ، ب ء = ١٨ سم

احسب : طول كل من حـ ء ، أء

(٢١) الشكل المقابل :



إذا كان : أب قطر في دائرة م ، حـ س ، ء ص

قطعتان مماستان للدائرة م ، أب = ٣٠ سم

، حـ س = ٨ سم ، ء ص = ٢٠ سم

فإن : ء حـ = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

٢٢ إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

٢٣ أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة عند ب ثم رسم $\overrightarrow{\text{أء}}$ قاطعًا للدائرة فى حـ ، ء إذا كان : ق $(\overset{\frown}{\text{ءب}})$ = ١٥٠° ، ق $(\overset{\frown}{\text{بحـ}})$ = ٨٠°

أوجد : بالدرجات ق (∠ أ)

٢٤ مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٩ = ٠ فى مجموعة الأعداد المركبة هى ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) {-٣ت}

(جـ) {٣ت ، -٣ت} (د) ∅

٢٥ فى الشكل المقابل :

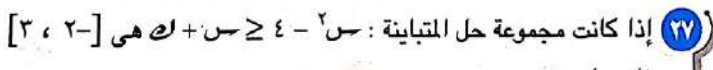


مساحة Δ أ ب ء = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨

(جـ) ٥٤ (د) ٧٢

٢٦ أوجد قيم س ، ص التى تحقق المعادلة :



$$\frac{(٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت)}{٢ + ت} = \text{س} + \text{ت ص}$$

٢٧ إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س^{٢} - ٤ ≥ س + ك هى [-٢ ، ٣]

فإن : ك = ...

(أ) -٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠

٢٨ مدى الدالة د : د (θ) = ٣ جا ٢ θ هو ....

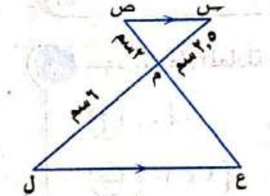
(أ) [-٢ ، ٢] (ب)]-٢ ، ٢[(جـ) [-٣ ، ٣] (د)]-٣ ، ٣[



النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :



ع م = ... سم.

(أ) ٣,٦ (ب) ٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

٢ أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٧٣}$ = ...

(أ) ١- (ب) ١ (جـ) ت (د) ـت

٣ مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^٢ **أوجد** : مساحة كل منهما.

٤ فى الشكل المقابل :



$\frac{أ هـ}{هـ ب}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٣}$

٥ إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − (م + ٢) س + ٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر فإن : م = ...

(أ) ٣- (ب) ٢- (جـ) ٢ (د) ٣

٦ حل فى ح المتباينة الآتية : $(س + ٣)^٢ \geq ١٠ - ٣ (س + ٣)$

٧ إذا كان المضلع $م_1$ هو تكبير للمضلع $م_2$ ، وكانت ك نسبة التكبير فإن ....

(أ) ك > ١   (ب) ك < ١

(جـ) ك = ٠   (د) ٠ < ك < ١

٨ مجموعة حل المعادلة $س^2 = س$ في ح هي ....

(أ) {٠}   (ب) {١}

(جـ) {-١ ، ١}   (د) {٠ ، ١}



٩ في الشكل المقابل :

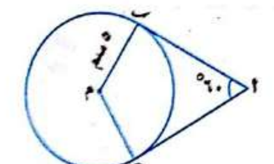
أ ب = ... سم.

(أ) ٤   (ب) ٥

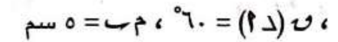
(جـ) ٦   (د) ٨



١٠ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ



، ق(∠أ) = ٦٠° ، م ب = ٥ سم

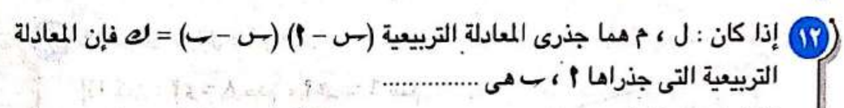
أوجد : طول القوس الأصغر ب جـ

١١ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م عند نقطة ب وكانت : $ق_م$ (أ) = ٢٥ سم²

فإن : أ ب = ...

(أ) ٥ سم   (ب) -٥   (جـ) ١٥ سم   (د) ٢٥ سم





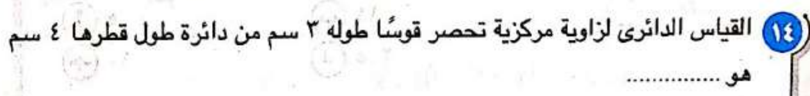
(١٢) إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة التربيعية (س - ٢) (س - ب) = ك فإن المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ ، ب هى ....

(أ) (س - ل) (س - م) = ٠ (ب) (س - ل) (س - م) + ك = ٠

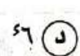
(جـ) (س - ل) (س - م) = ك (د) س^{٢} - (ل + م) س + ك = ٠

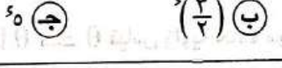
(١٣) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

س + ص ت = (١ + ت)^{٣} حيث س ∈ ح ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = -١



(١٤) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ سم من دائرة طول قطرها ٤ سم هو ....





(أ) $(\frac{٢}{٣})^{ء}$ (ب) $(\frac{٣}{٢})^{ء}$ (جـ) ٥^{ء} (د) ٦^{ء}



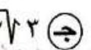
(١٥) فى الشكل المقابل :

٢ء ، ٢ب مماسان لدائرة عند ء ، ب على الترتيب ، حـهـ يقطع الدائرة فى هـ ، ء

إذا كان : حـهـ = ٣ سم ، هـء = ١٨ سم

فإن : (٢حـ - ٢ء) = ... سم.

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢$\sqrt{٧}$ (جـ) ٣$\sqrt{٧}$ (د) ٦$\sqrt{٧}$





(١٦) فى الشكل المقابل :

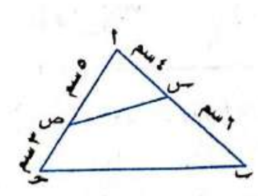
٢ب حـ مثلث فيه : س ∈ $\overline{٢ب}$

بحيث : ٢س = ٤ سم ، س ب = ٦ سم ، ص ∈ $\overline{٢حـ}$

بحيث : ٢ص = ٥ سم ، ص حـ = ٣ سم

أثبت أن : (١) Δ ٢س ص ~ Δ ٢حـ ب

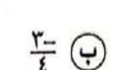
(٢) الشكل س ب حـ ص رباعى دائرى.



١٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\text{أء} = ٨$ سم ، $\text{أهـ} = ٦$ سم

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$  (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

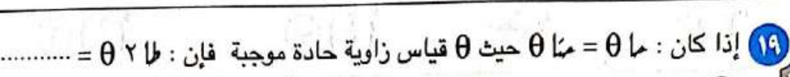
١٨ في الشكل المقابل :

باستخدام المعطيات الموجودة على الرسم

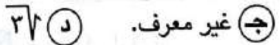
فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٠ (د) ٢,٥



١٩ إذا كان : جا θ = جتا θ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : طا ٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) ١-  (جـ) غير معرف. (د) $\sqrt{٣}$

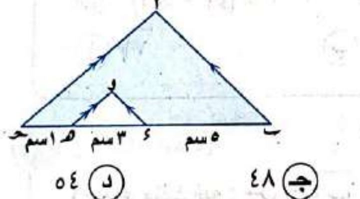
---

٢٠ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

جا ٦٠٠° جتا (-٣٠°) + جا ١٥٠° جتا ٢٤٠° = جا $\frac{٣\pi}{٢}$

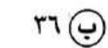
---

٢١ في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة Δ ء هـ و = ٦ سم^{٢}

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{٢}.

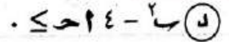
(أ) ٢٧ (ب) ٣٦  (جـ) ٤٨ (د) ٥٤

---

٢٢ الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة في ح

عندما ....

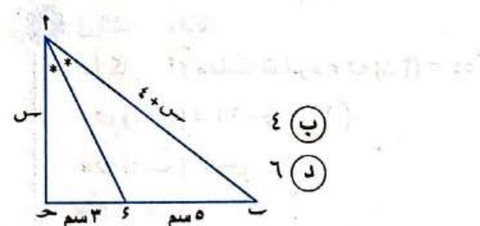
(أ) ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠ (ب) ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠

(جـ) ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠ (د) ب^{٢} - ٤ أ جـ ≤ ٠ 



(٢٣) $\overline{أ ء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، $\overleftarrow{ء س}$ ينصف ∠ أ ء ب ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س ، $\overleftarrow{ء ص}$ ينصف ∠ أ ء حـ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى ص **أثبت أن** : $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

(٢٤) **فى الشكل المقابل :**



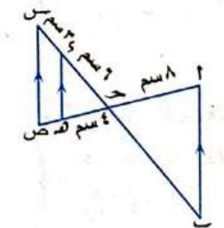
س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٥) أبسط صورة للمقدار : جا $(180^\circ + \theta)$ × قا $(270^\circ + \theta)$ = ...

(أ) ٢ جا θ (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢ قا θ

(٢٦) **فى الشكل المقابل :**



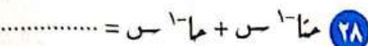
$\overline{أ ب}$ // $\overline{ء هـ}$ // $\overline{س ص}$

، أ حـ = ٨ سم ، حـ هـ = ٤ سم

، حـ ء = ٦ سم ، ء س = ٣ سم

احسب : طول كل من $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{هـ ص}$

(٢٧) إذا كان : $(٣ س - ٥)^\circ$ أصغر قياس موجب ، $(٣ ص - ٥)^\circ$ أكبر قياس سالب



لزاويتين متكافئتين فإن : س - ص = ...

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

(٢٨) جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = ...

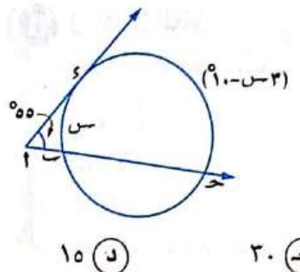
(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

النموذج الرابع



أجب عن الأسئلة الآتية :

1 فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أء}$ مماسًا للدائرة ، ق (∠ أ) = ٥٥°

، ق ($\overset{\frown}{ءحـ}$) = (٣ س − ١٠°)

، ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = س

فإن : س = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

2 إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان : جا (θ + ١٠°) = جتا ٥٠°

فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٢٠° (د) ٥٠°

3 دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٣ : ٥ فإذا كانت مساحة الدائرة الصغرى ٢٧ سم²

فإن مساحة الدائرة الكبرى تساوى .... سم²

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

4 ابحث فى ح إشارة الدالة د : د (س) = ٨ + ٢ س − س² موضحًا ذلك على خط الأعداد

ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٨ + ٢ س − س² ≤ ٠ .

5 إذا كان س = −١ أحد جذرى المعادلة : س² − ك س − ٦ = ٠ .

فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٦ (د) −٦

٦ أبجـ مثلث فيه : $\overleftrightarrow{أد}$ ينصف ∠ أ من الداخل وكان : أب > أجـ

فإن : دجـ .... دب

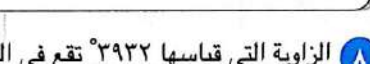
(أ) < (ب) ≤ (جـ) > (د) =

٧ في الشكل المقابل :

أبجـ مثلث قائم الزاوية في أ

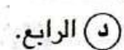
(١) أثبت أن : $\overline{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$

(٢) أوجد : طول $\overline{بجـ}$



٨ الزاوية التي قياسها ٣٩٣٢° تقع في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث.



(د) الرابع.

٩ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ مماسة للدائرة م ، أب = ٦ سم

، جـ م = ٢,٥ سم

فإن : أجـ = ... سم.

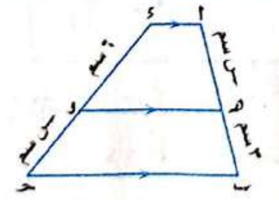
(أ) ٩ (ب) ٤ (جـ) ٢,٥ (د) ٥

١٠ أوجد الحل العام للمعادلة : جا ٢ θ = جتا θ

ثم أوجد قيم : θ ∈] ٠ ، π [

١١ في الشكل المقابل :

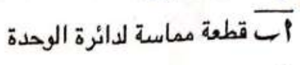
س = ... سم



(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٢}$

(جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) ١٨

(١٢) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة لدائرة الوحدة

فإن : و ب = ...

(أ) جا θ　　(ب) جتا θ

(جـ) قتا θ　　(د) ظا θ

(١٣) الدالة د : د (س) = ٣ − س تكون غير سالبة عندما س ∈ ....

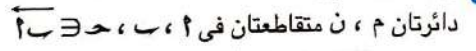
(أ)]−∞ ، ٣[　　(ب)]−∞ ، ٣]

(جـ) [٣ ، ∞[　　(د)]٣ ، ∞[

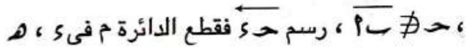
(١٤) في الشكل المقابل :



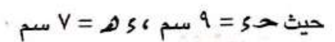
دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$



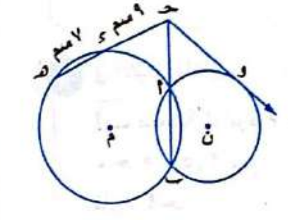
، حـ ∉ $\overline{\text{ب أ}}$ ، رسم $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ فقطع الدائرة م في ء ، هـ



حيث حـ ء = ٩ سم ، ء هـ = ٧ سم



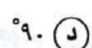
، ورسم $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ يمس الدائرة ن عند و



(١) **أثبت أن :** $ق_م$ (حـ) = $ق_ن$ (حـ)

(٢) إذا كان : أب = ١٠ سم **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$

(١٥) القياس الستيني لزاوية محيطية تحصر قوسًا طوله ٥ π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يساوي ....

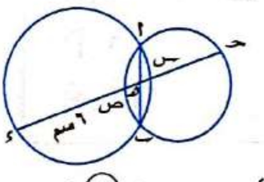


(أ) ١٢٠°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ٣٠°　　(د) ٩٠°

(١٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : ء ص = ٦ سم وكان : $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : حـ س = ... سم.



(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥



(١٧) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٤ سم ، ء $\in$ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، ء $\notin$ $\overline{\text{أ حـ}}$

حيث حـ ء = ١٢ سم **أثبت أن :** $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء

(١٨) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ جا ب س حيث أ > ٠ دالة دورية و دورتها $\frac{\pi}{2}$

ومداها [-١ ، ١] فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (جـ) $-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

(١٩) **في الشكل المقابل :**



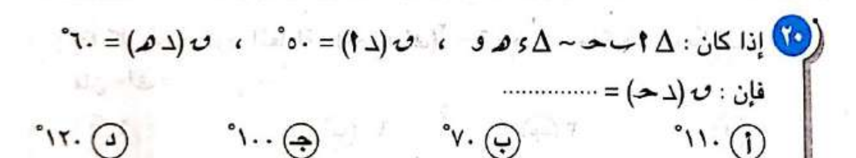
$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{2}{3}$

فإن : هـ و = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥

(٢٠) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ هـ) = ٦٠°



فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٧٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٢٠°

(٢١) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٧ سم

، رسم $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$

(٢٢) **في الشكل المقابل :**

$\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ، ء منتصف $\overline{\text{هـ حـ}}$

، أ حـ = $\sqrt{6}$ سم ، أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم

فإن : ء و = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

٢٣ في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم

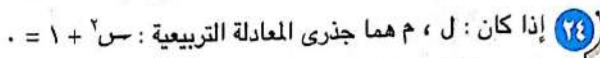
، ء هـ = هـ و = و جـ

فإن : مساحة (الشكل س ص و هـ) = ... سم^{٢}

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

٢٤ إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة التربيعية : $س^{٢} + ١ = ٠$



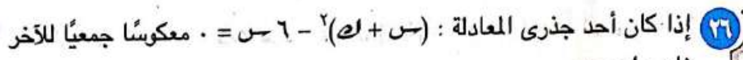
فإن : $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨}$ = ...

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨



٢٥ إذا كان : Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ ، جا أ + جتا ب = ١ أوجد قيمة : جا ٥ أ

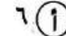
٢٦ إذا كان أحد جذرى المعادلة : $(س + ك)^{٢} - ٦ س = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر



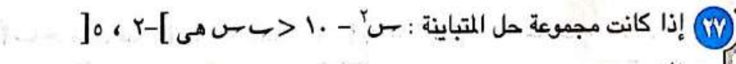
فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٣ (د) ٩



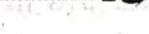


٢٧ إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $س^{٢} - ١٠ <$ ب س هى]−٢ ، ٥[



فإن : ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) ٥



٢٨ كون المعادلة التربيعية التى جذراها :

$\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ ت}{١ - ت}$

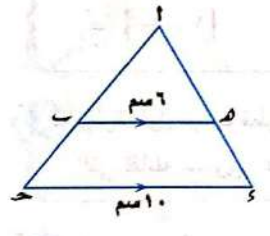
النموذج الخامس



أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان بُعد نقطة أ عن مركز دائرة يساوى ٢٤ سم ، وقوة هذه النقطة بالنسبة للدائرة تساوى ١٧٦ فأوجد : طول نصف قطر الدائرة.

(٢) فى الشكل المقابل :



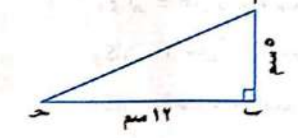
إذا كان : $\overline{\text{ب هـ}} \parallel \overline{\text{ء جـ}}$

فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة شبه المنحرف ب جـ ء هـ}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٢٥}{٨١}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(٣) فى الشكل المقابل :

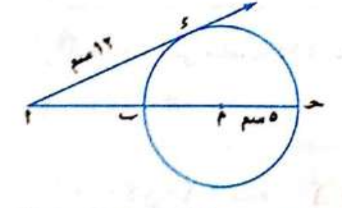


$\text{جا}\left(\text{ظا}^{-1}\left(\frac{٥}{١٢}\right)\right) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$

(جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) ١٣

(٤) فى الشكل المقابل :



الدائرة م طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس لها عند ء ، أ ء = ١٢ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ جـ}}$

(٥) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٣ س - ٤ = \text{صفر}$

فإن : ل م = ...

(أ) ٣ (ب) ‎-٣ (جـ) ٤ (د) ‎-٤

(٦) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ في ع هي ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {-٣ ، ٣} (د) $\varnothing$

(٧) إذا كان $م_١$ هو مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - س - ٢ \geq ٠$ ، وكان $م_٢$ هو مجموعة حل المتباينة $س^٢ + س - ٢ \geq ٠$ ، فإن : $م_١ \cap م_٢ =$ ....

(أ) $\varnothing$ (ب) [-٢ ، ٢]

(جـ) [-١ ، ١] (د) ع -]-١ ، ١[

(٨) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم أوجد : طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي ١٥٠°

(٩) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{ده} // \overline{بجـ}$

، ده = ص سم ، بجـ = س سم

وكان : $٢ س^٢ - ٣ س ص - ٥ ص^٢ = ٠$

وكان : أب = ١٠ سم فإن : هـب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٠) الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها ....

(أ) $\frac{١}{٤}\pi$ (ب) $\frac{٥}{٤}\pi$ (جـ) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) $\frac{٧}{٤}\pi$

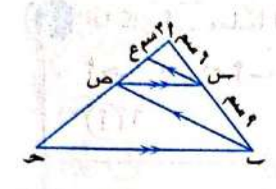
(١١) إذا كان : Δ أبجـ ~ Δ س ص ع وكان : أب = ٣ س ص

فإن : $\frac{م(\Delta س ص ع)}{م(\Delta أبجـ)} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) $\frac{٤}{١}$ (د) $\frac{٩}{١}$



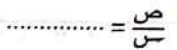
(١٢) في الشكل المقابل :



$\overline{سص} // \overline{بجـ}$ ، $\overline{سع} // \overline{بص}$

، أس = ٦ سم ، سب = ٩ سم ، أع = ٣ سم

أوجد : طول كل من $\overline{عص}$ ، $\overline{صجـ}$



(١٣) في الشكل المقابل :



$\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٢

(١٤) الدالة ص = جا $\left(\frac{\pi}{٤} + س\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) صفر



(١٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣س + ٥ = ٠$

(١) كون المعادلة التى جذراها : $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

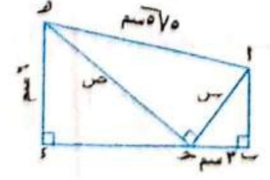
(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار : $(ل^٢ + ٣م)^٢$

(١٦) إشارة د : د (س) = -٥ س تكون سالبة عندما ....

(أ) س < -٥ (ب) س > -٥

(جـ) س < ٠ (د) س > ٠

(١٧) في الشكل المقابل :



س + ص = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ١٨ (د) ٢١

(١٨) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة عند ب ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ يقطع الدائرة فى جـ ، ء حيث جـ ∈ $\overline{أء}$:

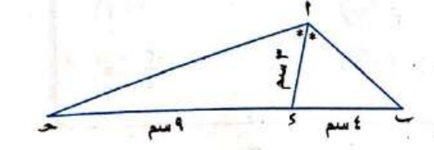
أجـ = ٣ سم ، أب = ٦ سم فإن : جـ ء = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(١٩) إذا كان : جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث °٩٠ < θ < °١٨٠

أوجد قيمة : جا (°١٨٠ − θ) + ظا (°٣٦٠ − θ) + ٢ جا (°٢٧٠ − θ)

(٢٠) فى الشكل المقابل :



أب × أجـ = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٤٥

(جـ) ١٢ (د) ٢٧

(٢١) فى الدائرة م إذا تقاطع وتران $\overline{أب}$ ، $\overline{جـو}$ فى نقطة ء فإن : ....

(أ) $ق_م$ (ء) = (أب)^{٢} − نق^{٢} (ب) أء × ءب = أم × مب

(جـ) $ق_م$ (ء) + أء × ءب = صفر (د) $ق_م$ (ء) = جـء × ءو

(٢٢) إذا كان : س = $\frac{١٣ + ١٢ ت}{٥ + ت}$ ، ص = $\frac{٥ + ت}{١ + ت}$ أوجد : س + ص

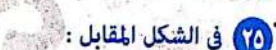
(٢٣) إذا كانت : ظا (٤ θ) = ظتا (٥ θ) ، فإن : جا (٣ θ) = ... حيث ٣ θ قياس زاوية حادة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية هو ٤٨َ °٦٤ فإن قياسها الدائرى هو ....

(أ) ٠,١٨^{د} (ب) ٠,٣٦^{د} (جـ) ١١,٣^{د} (د) $\frac{٩}{٢٥}$ π





٢٥ في الشكل المقابل :

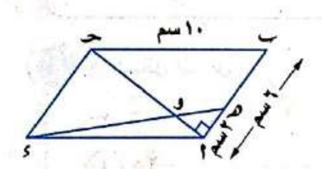


نصف دائرة (م) طول نصف قطر دائرتها = ١٠ سم

فإن : هـ ء = ... سم.

(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

٢٦ في الشكل المقابل :



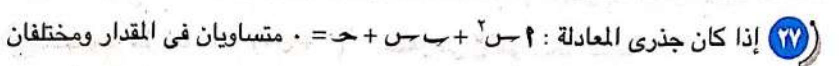
أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه :

أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم

، ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث : أ هـ = ٢ سم ، $\overline{\text{ء هـ}}$ تقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في و

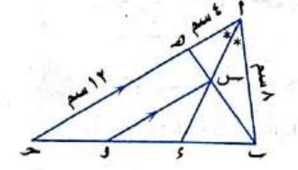
أثبت أن : △ أ و هـ متساوي الساقين.



٢٧ إذا كان جذري المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ متساويان في المقدار ومختلفان في الإشارة فإن :.............

(أ) جـ = ٠ (ب) أ = ٠ (جـ) ب = ٠ (د) غير ذلك.

٢٨ في الشكل المقابل :



$\frac{\text{ء و}}{\text{ب جـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$





النموذج السادس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان جذرا المعادلة : ٤ $س^٢$ − ١٢ س + حـ = ٠ حقيقيين متساويين

فإن : حـ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

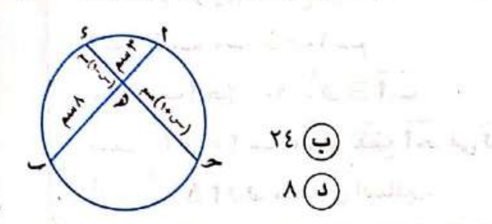
---

٢ فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤

(جـ) ٥ (د) ٨



---

٣ مجموعة حل المعادلة : $(س + ١)^٢$ = صفر فى ع هى ....

(أ) {−١} (ب) {١} (جـ) {−١ ، ١} (د) ∅

---

٤ إذا كان : (٢ + ٣ ت) + (١ − ت) = س + ص ت

فما قيمتى : س ، ص (حيث : $ت^٢$ = −١) ؟

---

٥ إذا كان $ب^٢$ − ٤ أ حـ < ٠ فى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠

فإن مجموعة حل المتباينة : أ $س^٢$ + ب س + حـ < ٠ حيث أ سالب هى ....

(أ) ع (ب) ∅ (جـ) $ع^+$ (د) $ع^-$

---

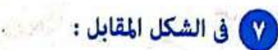
٦ جميع .... تكون متشابهة.

(أ) المثلثات. (ب) المستطيلات.

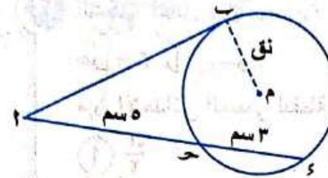
(جـ) متوازيات الأضلاع. (د) المربعات.



(٧) في الشكل المقابل :



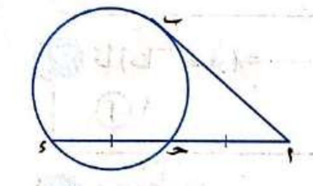
ق_م(أ) = ...



(أ) ٢٥ (ب) (أب)^2 − نق^2

(جـ) ٤٠ (د) (أم)^2 − (أب)^2.

(٨) في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ مماس ، حـ منتصف $\overline{أء}$ ، أب = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) طول $\overline{حـء}$

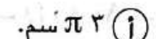
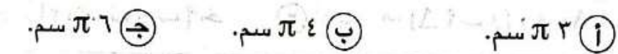
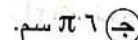
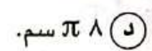
(٢) قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة.

(٩) في الشكل المقابل :

يتأرجح بندول بزاوية قياسها ٦٠°

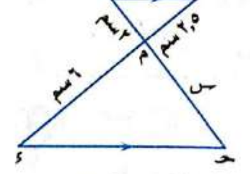
فإذا كان طول نصف قطر البندول ١٢ سم

فإن طول المسار الدائري الذي يقطعه البندول يساوي ....

(أ) ٣ π سم. (ب) ٤ π سم. (جـ) ٦ π سم. (د) ٨ π سم.

(١٠) في الشكل المقابل :



س = ... سم.

(أ) ٣,٦ (ب) ٤

(جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

(١١) أوجد إحدى قيم θ حيث ٠° ≤ θ ≤ ٩٠° التي تحقق :

ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

١٢ الشكل المقابل يمثل منحنى :

ص = ٣ جا $\frac{١}{٢}$ س

فإن الإحداثي السيني لنقطة ب هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π

(جـ) ٢ π (د) ٤ π

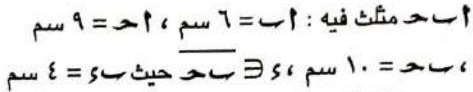
---

١٣ جتا (جا$^{-١}$ صفر) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) غير معرفة. (د) صفر

---

١٤ فى الشكل المقابل :

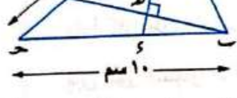


أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٠ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث ب ء = ٤ سم

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، و

على الترتيب.



(١) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ (٢) أوجد : م (∆ أ ب و) : م (∆ حـ ب و)

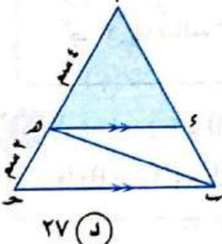
---

١٥ الزاوية التى قياسها (-١٢٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

---

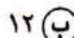
١٦ فى الشكل المقابل :

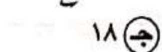


إذا كان : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

وكانت مساحة (∆ هـ ب حـ) = ٩ سم^٢

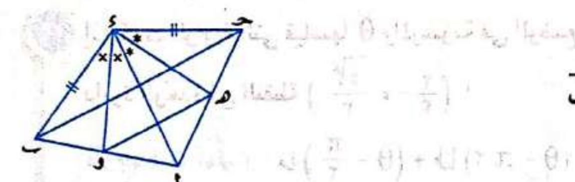
فإن مساحة (∆ أ ء هـ) = ... سم^٢





(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

(١٧) فى الشكل المقابل :



أثبت أن : $\overline{هـ و} \,//\, \overline{حـ ب}$

(١٨) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، أ ب = ٦ سم

، أ حـ = ٨ سم ، ب ء = ٣ سم

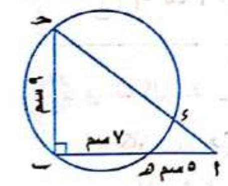
فإن : أ ء = ... سم.



(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨



(١٩) فى الشكل المقابل :



ء حـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

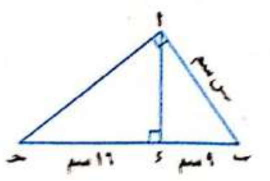
(٢٠) إذا كان : أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة ، أ + ب + حـ = ٠ ، أ ≠ حـ

فإن جذرى المعادلة : (ب + حـ − أ) $س^{٢}$ + (حـ + أ − ب) س + (أ + ب − حـ) = ٠

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) حقيقيان مختلفان نسبيان.

(جـ) حقيقيان مختلفان غير نسبيين. (د) غير حقيقيين.

(٢١) فى الشكل المقابل :



س = ...

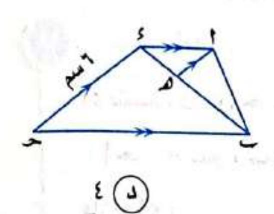
(أ) ٩ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٥

(٢٢) إذا كانت الزاوية التى قياسها θ والمرسومة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{5}}{3} ، -\frac{2}{3}\right)$

فأوجد قيمة المقدار : جا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ + ظا $(2\pi - \theta)$

(٢٣) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : ب هـ = ٢ هـ ء

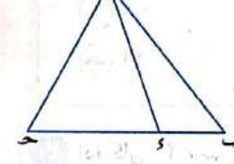
فإن : أ هـ = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٤) إشارة الدالة د : د (س) = ٧ − س تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٧[(ب)]−∞ ، ∞[(جـ)]٧ ، ∞[(د)]−٧ ، ٧[

(٢٥) **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : $(أحـ)^2$ = حـ ء × حـ ب

أثبت أن : Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

(٢٦) إذا كانت : جا $\theta = -\frac{1}{2}$ ، جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن : θ = ...

(أ) °٣٠ (ب) °١٥٠ (جـ) °٢١٠ (د) °٣٣٠

٢٧ **في الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{ب أ}$ مماس للدائرة م عند ب

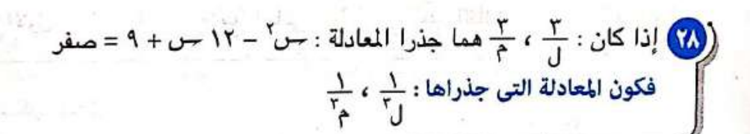
، ق $(\overset{\frown}{ب س})$ = ق $(\overset{\frown}{س ص})$

، ب ء = ٢ $\sqrt{٣}$ ، أ ء = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : أ ص = ... سم.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢



٢٨ إذا كان : $\frac{٣}{ل}$ ، $\frac{٣}{م}$ هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ١٢ س + ٩ = صفر$

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$





النموذج السابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

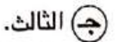
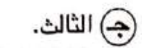
(١) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم = ١٨٠° (ں - ٢) حيث ں عدد الأضلاع فإن قياس زاوية السداسى المنتظم بالقياس الدائرى = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

---

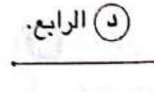
(٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.



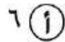
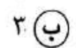
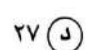
(٣) فى الشكل المقابل :



$\overline{حـ ء}$ تمس نصف الدائرة م فى ء

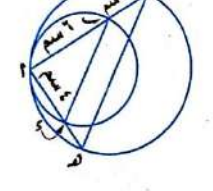
إذا كانت : ٢ حـ أ = أ ب = ٦ سم فإن : حـ ء = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٣$\sqrt{٣}$ (د) ٢٧

---

(٤) فى الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل فى أ

فإن : هـ ء = ... سم.

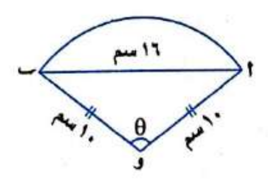
(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٣,٥ (د) ٤



---

(٥) فى الشكل المقابل :



$\overset{\frown}{أ ب}$ قوس فى دائرة مركزها و

، طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ ب = ١٦ سم

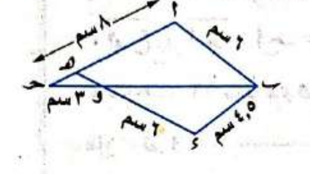
أوجد : θ بالقياس الدائرى **ثم أوجد :** طول القوس $\overset{\frown}{أ ب}$

٦ في الشكل المقابل :

$أب = ٦$ سم ، $ب حـ = ١٢$ سم ،

$حـ أ = ٨$ سم ، $و حـ = ٣$ سم

، $ب ء = ٤,٥$ سم ، $ء و = ٦$ سم



أثبت أن : (١) Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب و

(٢) Δ هـ و حـ متساوى الساقين.

٧ إذا كان : ٢ جتا $\theta = -\sqrt{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ فإن : $\theta =$ ....

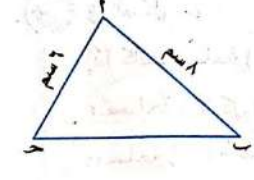
(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٦\pi}{٧}$ (جـ) $\frac{٤\pi}{٣}$ (د) $\frac{٧\pi}{٦}$



٨ في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

فإن : ب حـ = ... سم.



(أ) $٣\sqrt{١٠}$ (ب) $٢\sqrt{٢١}$

(جـ) ١٢ (د) ١٠

٩ إذا كان : جا θ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (−٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$

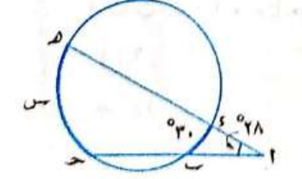
فأوجد : θ

١٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٤ س^٢ + ٤ = ١٣ س$

فكون المعادلة التربيعية التى جذراها : ل + م ، ل م

١١ في الشكل المقابل :

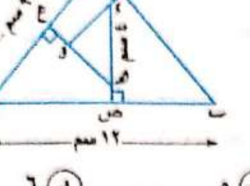
س = ...



(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٨٦° (د) ٢٦°

١٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{وس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{ءص} \perp \overline{بح}$

، $\overline{هع} \perp \overline{أح}$ ، أح = ٩ سم

، بح = ١٢ سم ، ءه = ٤ سم

فإن : ه و = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

١٣ أي مما يأتي تحليل للمقدار : $س^٢ + ٤$

(أ) (س − ٢) (س + ٢)

(ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $(س − ٢ ت)^٢$

(د) (س − ٢ ت) (س + ٢ ت)

١٤ في الشكل المقابل :

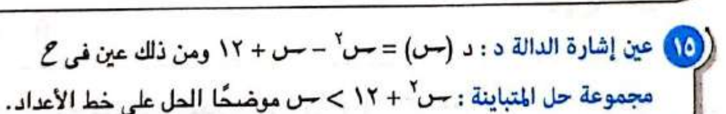
إذا كانت مساحة (الشكل ء ص و ح) = ٤٠ $سم^٢$

، مساحة (الشكل و ه ب ح) = ٣٢ $سم^٢$

ومساحة (Δ أ و ص) = ٥ $سم^٢$

فإن مساحة (Δ أ ه و) = ... $سم^٢$.

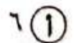
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



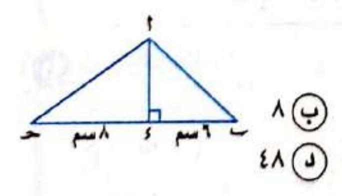
١٥ عين إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ − س + ١٢ ومن ذلك عين في ح

مجموعة حل المتباينة : $س^٢$ + ١٢ > س موضحًا الحل على خط الأعداد.

١٦ في الشكل المقابل :



أب جتا ب + أح جتا ح = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٤ (د) ٤٨





(١٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : مساحة Δ أ ء هـ = ٨ سم

فإن مساحة الشكل ء ب جـ هـ = ... سم^2.

(أ) ٢٧　(ب) ٦٤　(جـ) ٢٤　(د) ١٦

(١٨) فى الشكل المقابل :

س ل = ... سم.

(أ) ٧　(ب) ١٢

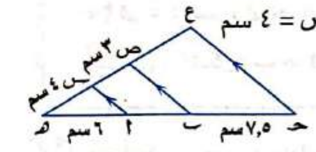
(جـ) ٢٠　(د) ١٤٤

(١٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ س}}$ // $\overline{\text{ب ص}}$ // $\overline{\text{جـ ع}}$ ، هـ أ = ٦ سم ، هـ س = ٤ سم

، س ص = ٣ سم ، ب جـ = ٧,٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ع ص}}$

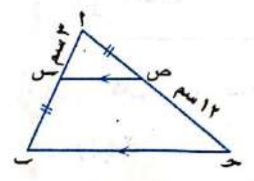


(٢٠) الدالة د : د (س) = ٢ س موجبة فى ....

(أ) ح　(ب) $ح_+$　(جـ) $ح_-$　(د) ح - {٠}

(٢١) فى الشكل المقابل :

أ جـ = ... سم.



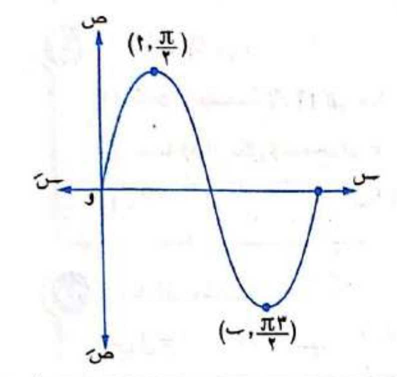
(أ) ١٥　(ب) ١٦

(جـ) ١٨　(د) ٢٠

٢٢ الشكل المقابل :

يوضح منحنى ص = جا س

فإن : |أ| + |ب| = ...



(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) π (د) ٢ π

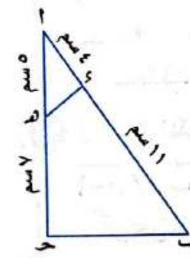
٢٣ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، أ ء = ٤ سم

، ء ب = ١١ سم

، أ هـ = ٥ سم ، هـ جـ = ٧ سم

أثبت أن : الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى.



٢٤ حاصل ضرب جذور المعادلات :

أ $س^٢$ + ب س + جـ = ٠

، ب $س^٢$ + جـ س + أ = ٠

، جـ $س^٢$ + أ س + ب = ٠ يساوى ....

(أ) أ ب جـ (ب) -١ (جـ) ١ (د) صفر

٢٥ إذا كان : س + ت ص = $ت^{١٥}$ + ٢ $\sqrt{-٤}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) -٣

٢٦ إذا كان جذرا المعادلة $س^٢$ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين

فإن : ك ∋ ....

(أ)]-∞ ، ٤[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٤] (د) {٤}



(٢٧) إذا كان : أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم ، حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$(أ) = ...

(أ) ٦٥　　(ب) ٦٣　　(جـ) ٤٩　　(د) ٧

(٢٨) في الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٦ سم

، أ حـ = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{ب حـ}$ في ء

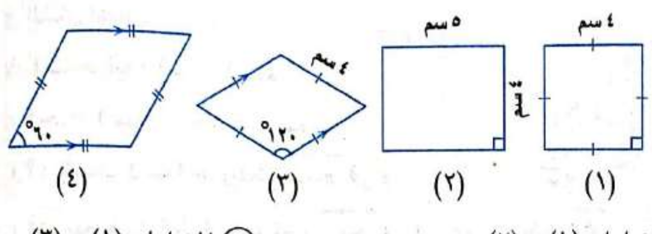
، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب حـ}$ في هـ احسب : طول $\overline{ء هـ}$

النموذج الثامن



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أى مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟



(أ) المضلعان (١) ، (٢) (ب) المضلعان (١) ، (٣)

(جـ) المضلعان (٣) ، (٤) (د) المضلعان (٢) ، (٤)

---

٢ إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجبة $(٩٠° - \theta)$ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(-\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : حا $(٩٠° - \theta)$ = ...

(أ) $-\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

---

٣ الدالة د : د (س) = ٤ − ٢ س تكون غير موجبة إذا كانت ....

(أ) س < ٢ (ب) س > ٢ (جـ) س ≤ ٢ (د) س ≥ ٢

---

٤ أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

، رسم $\overleftrightarrow{بهـ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ فقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ ، $\overline{أء}$ فى و

(١) أثبت أن : $(أب)^٢$ = أو × أء (٢) أوجد : طول $\overline{أو}$

---

٥ قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله π سم فى دائرة طول قطرها ٨ سم يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٨}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) ٢ π



٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ مماس للدائرة

فإن : θ = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٥٥ (د) ٦٠

---

٧ المعادلة التربيعية التي معاملات حدودها أعداد حقيقية وأحد جذريها (٣ – ت)

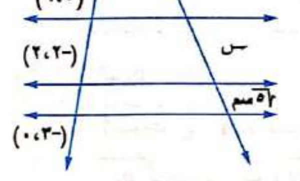
هي ....

(أ) $\text{س}^2 - ٦\text{س} - ١٠ = ٠$ (ب) $٢\text{س}^2 + ٦\text{س} + ١٠ = ٠$

(جـ) $\text{س}^2 - ٦\text{س} + ١٠ = ٠$ (د) $\text{س}^2 + ٦\text{س} + ١٠ = ٠$

---

٨ في الشكل المقابل :



س = ... سم.

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) $٢\sqrt{٥}$

(جـ) $٣\sqrt{٥}$ (د) $٤\sqrt{٥}$

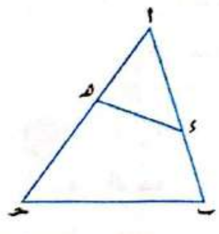
---

٩ إذا كان : جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠° < \theta < ٩٠°$ فإن : جا $(٩٠° - \theta)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

---

١٠ في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء

أثبت أن : الشكل ء ب حـ هـ رباعي دائري.

وإذا كان : أ ء = ٣ سم ، ب ء = ٢ سم

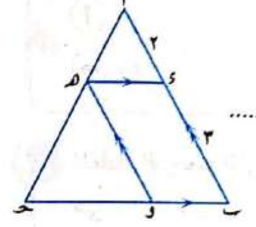
، أ هـ = ٢,٥ سم أوجد : طول $\overline{\text{هـ حـ}}$



١١ الدالة د : د (θ) = جا (ب θ) دالة دورية ودورتها $\frac{\pi ٢}{٣}$ فإن : ب = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٦

١٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ ، $\overline{هـو}$ // $\overline{أب}$

، $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{\text{مساحة (▱ ءبوهـ)}}{\text{مساحة (}\Delta\text{ أبحـ)}}$ = ...

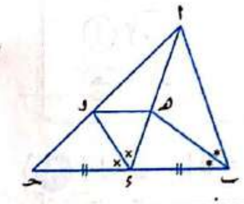
(أ) $\frac{٢١}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١٢}{٢٥}$ (د) $\frac{١٣}{٢٥}$

١٣ إذا كان : ٤ س + ٢ ص ت = ٨ + ٤ س ت فإن : س + ص = ...

(أ) −٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

١٤ في الشكل المقابل :



Δ أبحـ فيه : ء منتصف $\overline{بحـ}$ ، أب = أء

، $\overleftarrow{بهـ}$ ينصف ∠ب ، $\overrightarrow{ءو}$ ينصف ∠أءحـ

أثبت أن : $\overline{هـو}$ // $\overline{بحـ}$

١٥ إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ٤ س − ٤ = ٠

أوجد : (١) المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

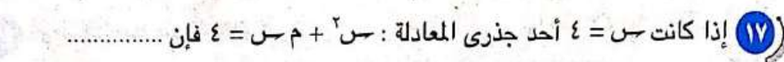
(٢) القيمة العددية للمقدار : $ل^{٢}$ − ٤ ل + ٣

١٦ إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥

(جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١



(١٧) إذا كانت س = ٤ أحد جذرى المعادلة : $س^2 + م س = ٤$ فإن ....

(أ) م = −٣ (ب) م عدد زوجى.

(جـ) (١ − م) مربع كامل. (د) (أ) ، (جـ) صحيحان.

(١٨) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة (س − ٢) (٣س − ١) ≤ ٠

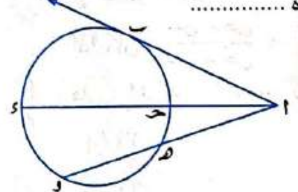
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

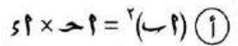
(١٩) مضلعان متشابهان مجموع مساحتى سطحيهما ٢٢٥ $سم^2$ والنسبة بين محيطيهما ٤ : ٣

أوجد : مساحة سطح كل منهما.

(٢٠) **فى الشكل المقابل :**

كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ما عدا العبارة ....





(أ) $(أب)^2$ = أجـ × أء

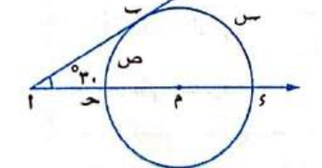
(ب) $(أب)^2$ = أهـ × أو

(جـ) أجـ × أء = أهـ × أو

(د) أجـ × جـء = أهـ × هـو

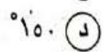
(٢١) **فى الشكل المقابل :**

$س^2 − ص^2$ = ...



(أ) °٣٠ × °١٨٠ (ب) °١٨٠ × °٦٠

(جـ) °٦٠ (د) °١٥٠



(٢٢) إذا كان : أ ، − أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ....

(أ) °١٥٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٨٠ (د) °٢٧٠

٢٣ أوجد فى أبسط صورة بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : $جا (-٣٠°) \; جتا \; ٤٢٠° + \frac{طا \; ٢٥°}{طتا \; ٦٥°}$

---

٢٤ أوجد الحل العام للمعادلة : $قتا \; ٦ \; \theta = قا \; ٣ \; \theta$

---

٢٥ فى الشكل المقابل :

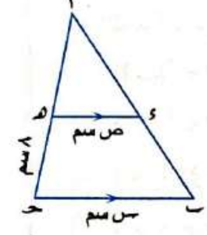
$\frac{أ هـ}{هـ حـ} = ...$

(أ) $\frac{ء هـ}{ب حـ}$ (ب) $\frac{أ ء}{أ ب}$

(جـ) $\frac{أ حـ}{حـ ب}$ (د) $\frac{أ ب}{ب حـ}$

---

٢٦ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\frac{س - ص}{س + ص} = \frac{٢}{٧}$

فإن : أ هـ = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ١٥

(جـ) ١٢ (د) ١٠

---

٢٧ دائرة م طول قطرها ٦ سم ، $ق_م (ب)$ = صفر فإن : ب تقع ....

(أ) داخل الدائرة. (ب) خارج الدائرة.

(جـ) على الدائرة. (د) فى مركز الدائرة.

---

٢٨ أثبت أن جذرى المعادلة : $٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$ مركبان غير حقيقيين ، ثم أوجد هذين الجذرين باستخدام القانون العام.



النموذج التاسع

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إشارة الدالة د حيث د (س) = ٦ − ٢ س تكون موجبة إذا كانت ....

(أ) س < ٣ (ب) س ≤ ٣ (جـ) س > ٣ (د) س = ٣

---

(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{هـ حـ}$

فإن $\frac{هـ ء}{ب حـ}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

---

(٣) إذا كان : ظا (٩٠° − θ) = ظا ٢ θ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا ٣ θ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

---

(٤) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ب هـ = ٢ سم ، حـ هـ = ٣ سم

، أ ء = ١٠ سم فإن : أ هـ = ... سم.

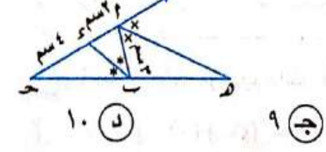


(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ٣

---

(٥) في الشكل المقابل :

ب هـ = ... سم.



(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

---

(٦) زاوية محيطية في دائرة قياسها ٦٠° تقابل قوسًا طوله ٤ π سم **فأوجد** : محيط الدائرة مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

(٧) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

جا ٤٢٠° جتا ٣٣٠° + $\frac{\text{جا ١٥°}}{\text{جا ١٦٥°}}$ + ظا^2 ٦٥° − ظتا ٢٥° ظا ٦٥°

(٨) جتا (٩٠° − θ) × قتا θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ظتا θ

(٩) فى الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان فى حـ ، هـ

، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

إذا كان : أ و = ٣ سم ، و حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(١٠) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٣٠° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

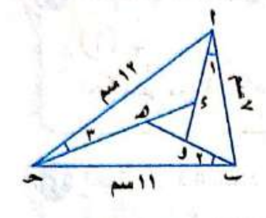
(١١) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(١٢) أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، رسم $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : (١) (ب ء)^2 = أ ء × ء هـ (٢) Δ هـ ب ء ~ Δ حـ أ ء

١٣ في الشكل المقابل :



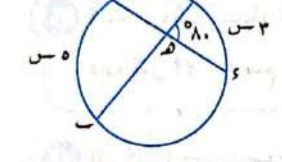
إذا كان : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

فإن ء هـ : هـ و : و ء = ...

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

١٤ في الشكل المقابل :

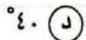


س = ...

(أ) ١٠° (ب) ٢٠°

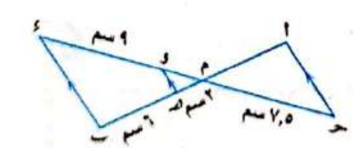
(جـ) ٣٠° (د) ٤٠°

١٥ إذا كان : ظا ٣ θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة فإن : θ = ...



(أ) ١٠° (ب) ١٥° (جـ) ٢٠° (د) ٣٠°

١٦ في الشكل المقابل :



$\overline{أب} \cap \overline{حـء} = \{م\}$ ، هـ $\in \overline{مب}$

، و $\in \overline{مء}$ ، $\overline{أحـ} // \overline{وهـ} // \overline{ءب}$

أوجد : طول كل من $\overline{مو}$ ، $\overline{أم}$

١٧ المنصف الداخلي لزاوية رأس المثلث .... المنصف الخارجي لها.

(أ) يوازي (ب) عمودي على

(جـ) يساوي (د) ينطبق على

١٨ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$

فإن القيمة العددية للمقدار : $ل^٢ - ٥ ل + ٢ = $ ....

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

١٩ المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان معامل التشابه لهما يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١

(جـ) أكبر من ١ (د) أصغر من ١

٢٠ ابحث إشارة الدالة د : د (س) = − س^٢ + ٨ س − ١٥

ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

٢١ أ ب حـ مثلث محيطه ٢٧ سم ، رسم ب ء (مستقيم) ينصف ∠ ب ويقطع أ حـ (قطعة مستقيمة) فى ء

فإذا كان أ ء = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم أوجد طول كل من : أ ب ، ب حـ ، ب ء

٢٢ إذا كان أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ ، أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان (ب^٢ − ٤ أ حـ) غير موجب فإن جذرى المعادلة يكونان ....

(أ) متساويان. (ب) غير حقيقيين.

(جـ) مركبين مترافقين. (د) حقيقيان مختلفان.

٢٣ فى الشكل المقابل :

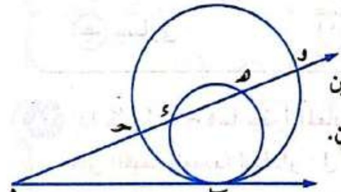
د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ

فإن : $\frac{ب + حـ}{أ}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٧ (د) ١٠

٢٤ فى الشكل المقابل :



أ ب (شعاع) مماس للدائرتين عند ب ، أ و (شعاع) قاطع للدائرتين

أثبت أن : (١) أ ب (مستقيم) هو المحور الأساسى للدائرتين.

(٢) أ حـ : أ ء = أ هـ : أ و


٢٥ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ حـ = ٣ سم

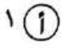
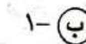
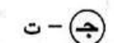
، حـ هـ = ٩ سم

فإن : أ ب = ... سم.




(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٩ (د) ٦


٢٦ أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{-١٨}$ = ...


(أ) ١ (ب) ١- (جـ) - ت (د) ت


٢٧ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب حـ}$

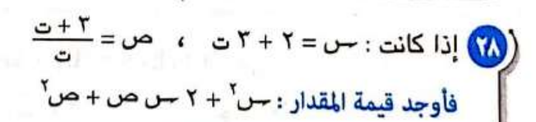
وكانت مساحة (△ هـ ب حـ) = ٩ سم^{٢}

فإن : مساحة (△ ء أ هـ) = ... سم^{٢}.



(أ) ٦ (ب) ١٢

(جـ) ١٨ (د) ٢٧

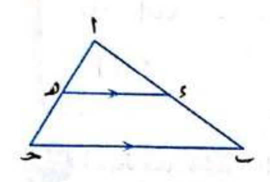

٢٨ إذا كانت : س = ٢ + ٣ ت ، ص = $\frac{٣ + ت}{ت}$

فأوجد قيمة المقدار : س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}



النموذج العاشر

١ في الشكل المقابل :



جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ما عدا التعبير ....

(أ) $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـحـ}$ (ب) $\frac{أء}{ءب} = \frac{ءهـ}{بحـ}$

(جـ) $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أحـ}$ (د) $\frac{أب}{بء} = \frac{أحـ}{هـحـ}$

٢ إذا كان : جا α = جتا β حيث α ، β زاويتان حادتان

فإن : ظا $(\alpha + \beta)$ = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) ١

(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) غير معرف.

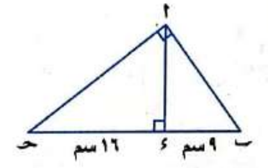
٣ أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة :

٤ ك $س^٢$ + ٧ س + $ك^٢$ + ٤ = صفر هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

٤ القيمة الصغرى للدالة د : حيث د (θ) = ٣ جتا $(٢\ \theta)$ هي ....

(أ) ‎-٦ (ب) ‎-٣ (جـ) ‎-٢ (د) ‎-١

٥ في الشكل المقابل :



طول $\overline{أب}$ = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ٢٠ (د) ٢٥



(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

، ق(∠ أ ء ى) = ق(∠ و ء ى)

وكان : ء هـ = ١٠ سم ، ب ء = ١٥ سم.

فإن : أ ء = ... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

---

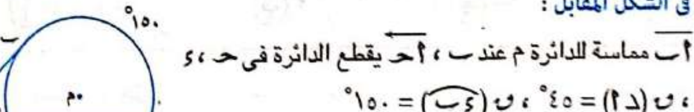
(٧) المعادلة التي جذراها (٢ + ٣ ت) ، (٢ − ٣ ت) هي ....

(أ) $س^٢ + ٤ س + ١٣ = ٠$

(ب) $س^٢ - ٤ س + ١٣ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٤ س - ١٣ = ٠$

(د) $س^٢ - ٤ س - ١٣ = ٠$

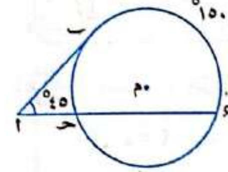


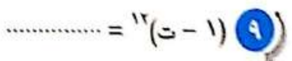
(٨) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ مماسة للدائرة م عند ب ، $\overleftarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة في حـ ، ء

، ق(∠ أ) = ٤٥° ، ق($\overset{\frown}{ءب}$) = ١٥٠°

أوجد : ق = ($\overset{\frown}{بحـ}$)





(٩) $(١ - ت)^{١٢}$ = ...

(أ) −٦٤ ت (ب) ٦٤ ت (جـ) −٦٤ (د) ٦٤

---

(١٠) إذا كان معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشابه المضلع $م_٢$ للمضلع $م_٣$ هو $\frac{١}{٢}$ فأي من العلاقات الآتية يكون صحيح ؟

(أ) مساحة ($م_١$) + مساحة ($م_٢$) = مساحة ($م_٣$)

(ب) مساحة ($م_١$) + مساحة ($م_٣$) = مساحة ($م_٢$)

(جـ) $\sqrt{\text{مساحة } (م_١)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_٢)} = \sqrt{\text{مساحة } (م_٣)}$

(د) $\sqrt{\text{مساحة } (م_١)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_٣)} = \sqrt{\text{مساحة } (م_٢)}$

(١١) إذا كانت : جا (٢θ) = جتا (٤θ) حيث θ زاوية حادة موجبة

فأوجد : طا ($°٩٠ - ٣\theta$)

---

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overleftrightarrow{ء أ}$ ، $\overleftrightarrow{ء ب}$ مماسان للدائرة

عند أ ، ب على الترتيب

، ء أ = ء ب = ٨ سم ، ب حـ = ٢ سم

فإن : أ حـ = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



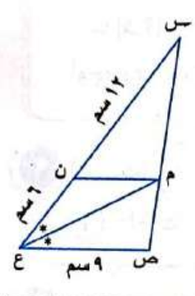
---

(١٣) القيمة العظمى للدالة ع حيث ع (θ) = ٤ جا θ هى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٤ (د) ٤

---

(١٤) في الشكل المقابل :



س ن = ١٢ سم ، ن ع = ٦ سم

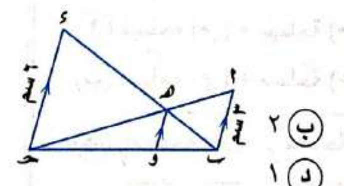
، ص ع = ٩ سم

، $\overleftrightarrow{ع م}$ ينصف ∠ س ع ص

أثبت أن : $\overline{م ن}$ // $\overline{ص ع}$

---

(١٥) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أ ب}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{حـ ء}$

فإن : هـ و = ... سم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٢

(جـ) ١,٥ (د) ١



(١٦) من الشكل المقابل :

$\theta^{ء} =$ ....

(أ) $\frac{ل}{نق}$ (ب) $\frac{نق}{ل}$

(ج) نق × ل (د) ل × ٢ نق

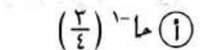
(١٧) إذا كان : ٥ جا θ − ٣ = صفر ، $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

أوجد قيمة : جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ + جا $(٢\pi - \theta)$ − جتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right)$ + جتا θ

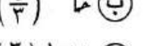


(١٨) في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب جـ) = ...



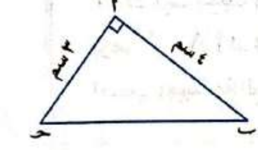
(أ) جا$^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$



(ب) جا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$



(ج) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (د) ظتا$^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$

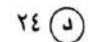


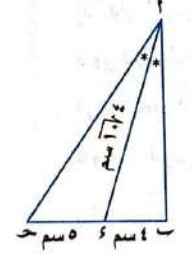
(١٩) في الشكل المقابل :

محيط △ أ ب جـ = ... سم.

(أ) ٣٦ (ب) ٣٢

(ج) ٢٨ (د) ٢٤





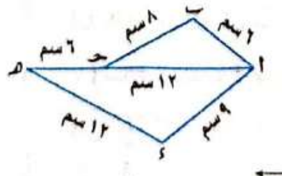
(٢٠) الشكل المقابل :

أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

، أ جـ = ١٢ سم ، جـ هـ = ٦ سم

، أ ء = ٩ سم ، ء هـ = ١٢ سم

برهن أن : (١) △ أ ب جـ ~ △ أ ء هـ (٢) $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ ء



(٢١) جذرى المعادلة $س^2 - 2\sqrt{5}$ س + ١ = ٠ يكونان ....

(أ) حقيقيان نسبيان. (ب) غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) حقيقيان وغير نسبيين.

(٢٢) إشارة الدالة د : د (س) = س − ٤ حيث س ∈]٤ ، ∞[تكون ....

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) سالبة وموجبة معًا.

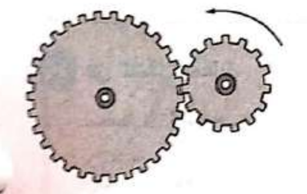
(٢٣) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم

، ء ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أ حـ}$ بحيث أ هـ = ٤ سم

برهن أن : Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب حـ ، وإذا كانت مساحة المثلث أ هـ ء = ٣ $سم^2$

احسب : مساحة المثلث أ ب حـ

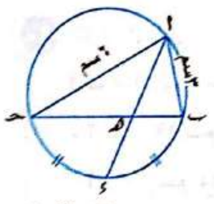
(٢٤) فى الشكل المقابل :



إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاثة لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة فى الاتجاه الموضح بالسهم فإن الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح ....

(أ) $\frac{-\pi}{2}$ (ب) $\frac{-2\pi}{3}$ (جـ) $\frac{2\pi}{3}$ (د) 2π

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ء منتصف $\frown{ب حـ}$

، أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن : $\frac{ب هـ}{ب حـ}$ = ... سم.

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{2}$



(٢٦) مثل بيانيًا الدالة د : د $(س) = س^٢ - ٢ س - ٣$ ثم عين إشارة الدالة د

(٢٧) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٤

فإن النسبة بين مساحتى سطحيهما ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦

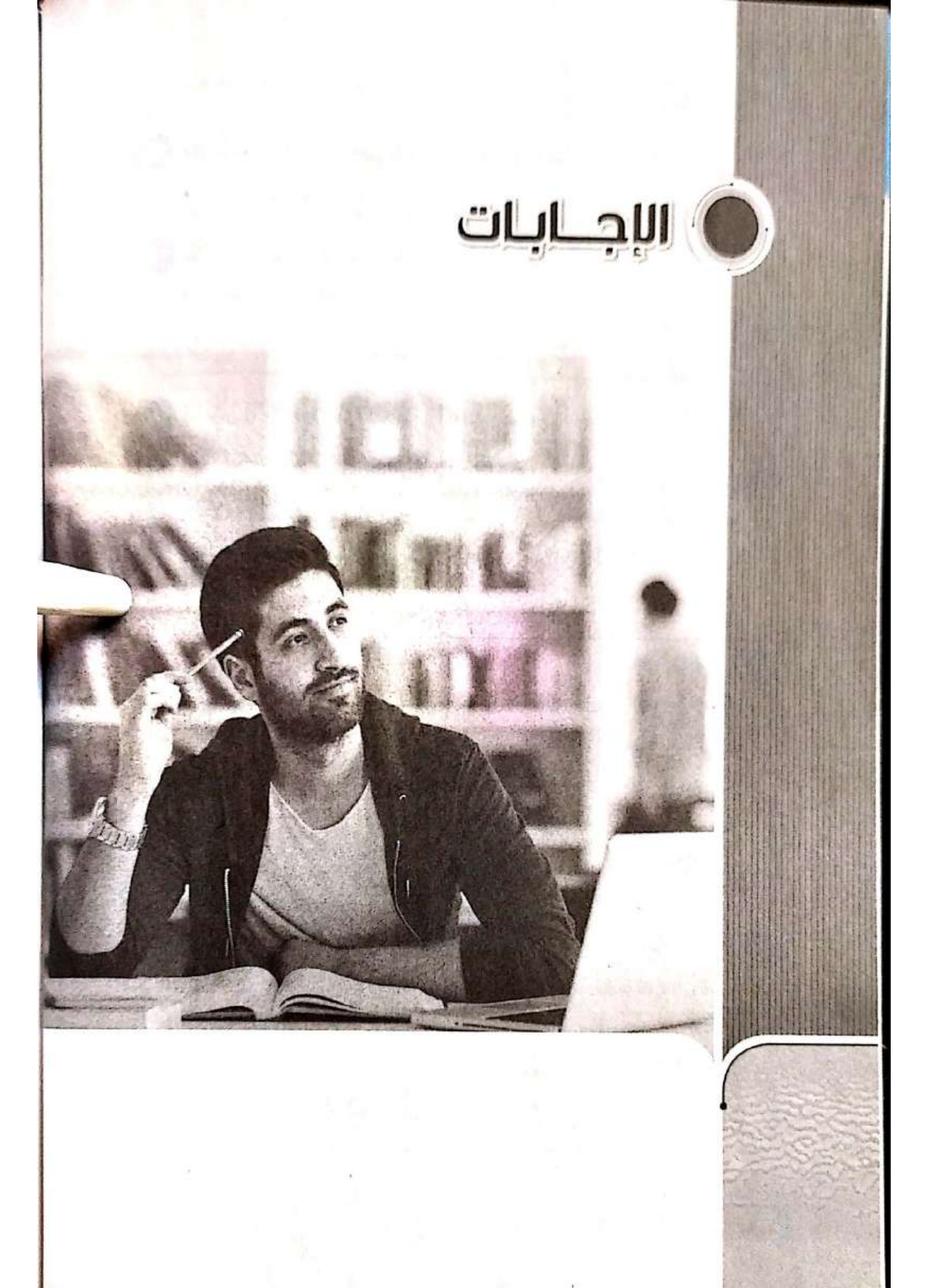
(٢٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$

حيث $أ > ٠$ ، $ل < م$ فإن مجموعة حل المتباينة

$أ س^٢ + ب س + حـ < ٠$ هى ....

(أ) $]-\infty ، ل[$ (ب) $]ل ، م[$

(جـ) $]م ، \infty[$ (د) $ح - [ل ، م]$


الإجابات

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

الاختبار الأول

١
(١) (ب)　(٢) (أ)　(٣) (جـ)
(٤) (د)　(٥) (ب)　(٦) (د)

٢
(١) {١ + √٣ ت ، ١ − √٣ ت}
(ب) $\frac{١٥}{١٢}$ ، $-\frac{١٠}{١٢}$

الاختبار الثانى

١
(١) (جـ)　(٢) (أ)　(٣) (د)
(٤) (أ)　(٥) (د)　(٦) (د)

٢
(١) أثبت بنفسك ،
مجموعة الحل = { $\frac{٢}{٢}$ + $\frac{\sqrt{١١}}{٢}$ ت ، $\frac{٢}{٢}$ − $\frac{\sqrt{١١}}{٢}$ ت }
(ب) ك ∈]١ ، ∞[

الاختبار الثالث

١
(١) (جـ)　(٢) (ب)　(٣) (د)
(٤) (جـ)　(٥) (د)　(٦) (أ)

٢
(١) ٤　　(ب) ٢

الاختبار الرابع

١
(١) (ب)　(٢) (ب)　(٣) (ب)
(٤) (أ)　(٥) (د)　(٦) (جـ)

٢
(١) ٢ س² + ٤ س + ٨ = ٠
(ب) ٣٩ − ٢٦ ت

الاختبار الخامس

١
(١) (د)　(٢) (أ)　(٣) (أ)
(٤) (جـ)　(٥) (أ)　(٦) (د)

٢
(١) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
- د موجبة عندما س ∈ ع − [−٢ ، ١]
- د سالبة عندما س ∈]−٢ ، ١[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ١}

(٢) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
- د سالبة عندما س ∈ ع − [−٣ ، ٣]
- د موجبة عندما س ∈]−٣ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

الاختبار السادس

١
(١) (جـ)　(٢) (د)　(٣) (جـ)
(٤) (ب)　(٥) (ب)　(٦) (جـ)

٢
(١) ١ − ت ، ٢
(ب)
- د موجبة عندما س ∈ ع − [−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$]
- د سالبة عندما س ∈]−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$}
- مجموعة الحل = [−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$]

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبار الأول

١
(١) (د)　(٢) (جـ)　(٣) (د)
(٤) (د)　(٥) (د)　(٦) (ب)

٢
(١) (١) الرابع.　(٢) الثالث.　(٣) الأول.
(ب) (١) ٢٢٨° ، −٤٩٢°　(٢) ٤٣٠° ، −٢٩٠°
(٣) ٢٥٠° ، −١٠°

الاختبار الثانى

١
(١) (أ)　(٢) (جـ)　(٣) (ب)
(٤) (ب)　(٥) (جـ)　(٦) (جـ)

٢
(١) ٢١ سم　　(ب) $\frac{٥\pi}{١٨}$

الاختبار الثالث

١
(١) (ب)　(٢) (أ)　(٣) (د)
(٤) (ب)　(٥) (جـ)　(٦) (ب)

٢
(١) $-\frac{١١}{٨}$
(ب) جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٣}{٤}$
، قا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{٤}{٣}$

الاختبار الرابع

١
(١) (ب)　(٢) (ب)　(٣) (د)
(٤) (جـ)　(٥) (د)　(٦) (د)

٢
(أ) $\frac{٢٨}{١٥}$
(ب) θ = ٤٥° + ١٢٠° ن أ، θ = ٧٥° + ٣٦٠° ن
، ن ∈ ص
θ = ٤٥° أ، ٧٥°

الاختبار الخامس

١
(١) (أ)　(٢) (جـ)　(٣) (ب)
(٤) (ب)　(٥) (د)　(٦) (د)

٢
(أ) ١٥° + ٣٠° ن ، ن ∈ ص
(ب) (١)]−∞ ، ∞[　(٢) [−١ ، ١]　(٣) ٢ π

الاختبار السادس

١
(١) (ب)　(٢) (أ)　(٣) (جـ)
(٤) (جـ)　(٥) (ب)　(٦) (جـ)

٢
(أ) ٤٨ً ٥٦َ ١٢٩° ، ٤٢ً ٤َ ٢٣٠°
(ب) ١٥٠°

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة

الاختبار الأول

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

٢ (١) $\frac{٣}{٢}$ (٢) ٦ ، ٤

الاختبار الثانى

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (جـ)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب)
(٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (أ)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الرابع

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (د) (٥) (د) (٦) (د)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الخامس

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب)
(٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار السادس

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (جـ)

٢ ٦ سم ، ٢١ سم

الاختبار السابع

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (ب)

٢ أثبت بنفسك ، ٣,٦ سم

الاختبار الثامن

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (أ)
(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (د)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار التاسع

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (أ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (جـ)

٢ (١) ٨ $\sqrt{٢}$ سم (٢) $\sqrt{١٧}$ سم

إرشادات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات

النموذج الأول

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ)

٢ (١)]-٢ ، ١[(٢) الثالث
(٣) ٢٠٠° (٤) س^٢ - ٨ س + ١٠ = ٠

٣ (١) - ت (ب) ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

٤ (أ) (١) ارسم بنفسك.
(٢) • د سالبة عندما س ∈ ح - [٢ ، ٥]
• د موجبة عندما س ∈]٢ ، ٥[
• د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٥}
(ب) ٦ + ٢ ت

٥ (أ) [-٤ ، ١] (ب) $\frac{-١}{٥}$

النموذج الثانى

١ (١) - ت (٢) ٩
(٣) ١٨° (٤) [-$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

٢ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (د)

٣ (أ) ٢
(ب) ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً ، أ ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً

٤ (أ) (١) أ = -٩ ، ب = ٣
(٢) [-٢ ، ١]
(ب) ٨٢° ٤٥َ ٢٨ً

٥ (أ) ٢٠ عددًا (ب) $\frac{-١}{٢}$

إرشادات نماذج امتحانات الكتاب المدرسي في الهندسة

النموذج الأول

١ (١) متشابهين
(٢) أولاً: أ جـ ، جـ ء ثانيًا: $(ب ء)^2$
ثالثًا: ب ء × أ جـ

٢ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د)

٣ (أ) ٣ سم ، $\frac{١}{٢}$ سم
(ب) أثبت بنفسك ، ١٠ : ٤

٤ (أ) ٦ سم ، ١٢ سم
(ب) ٥.٥ سم

٥ (أ) أثبت بنفسك.
(ب) أولاً: ٦ سم ثانيًا: أثبت بنفسك.

النموذج الثاني

١ (١) متشابهين. (٢) أ جـ ب
(٣) $ن_س × ن_ص$ (٤) ٦ سم

٢ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

٣ (أ) أثبت بنفسك ، ٢,٥ سم
(ب) أثبت بنفسك

٤ (أ) ٢,٧ سم ، ٤,٨ سم ، ٣,٦ سم
(ب) أثبت بنفسك ، ٩ : ٤

٥ (أ) ٣ سم
(ب) ٦ سم ، ٧,٢ سم

إجابات الامتحان التجريبي

١ (د) **٢** (ب)

٣
∵ (٠,٦ ، ب) تقع على دائرة الوحدة ، هـ زاوية حادة
∴ النقطة تقع في الربع الأول
، $(٠,٦)^2 + ب^2 = ١$ ∴ $ب^2 = ٠,٦٤$
∴ ب = ٠,٨ ∴ جا هـ = ٠,٨
الطرف الأيسر = ١٠ جا (٩٠° − هـ) − $ظا^2$ ٣٩٠°
= ١٠ جتا هـ − $ظا^2$ (٣٦٠° + ٣٠°)
= ١٠ جتا هـ − $ظا^2$ ٣٠°
= ١٠ × ٠,٨ − $(\sqrt{٣})^2$ = ٥
∴ ظا س = ٥ (موجبة) ، ∵ س ∈]٠ ، π[
∴ س تقع في الربع الأول ∴ س ≈ ٧٨° ٤١ ٢٤

٤ (أ) **٥** (أ)

٦
∵ $\overline{هـ ء}$ // $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ، هـ س = س ب
∴ ء ص = ص جـ
في Δ أ جـ ء :
∵ $\overrightarrow{أص}$ ينصف ∠ جـ أ ء ∴ $\frac{أ جـ}{أ ء} = \frac{جـ ص}{ص ء}$
، ∵ ء ص = ص جـ ∴ أ جـ = أ ء
∴ Δ أ جـ ء متساوي الساقين.

٧ (ب) **٨** (د)

٩
في Δ أ ب جـ :
∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب ء}{ء جـ}$
∴ $\frac{٦}{١٠} = \frac{ب ء}{٨ − ب ء}$ ∴ ١٠ ب ء = ٤٨ − ٦ ب ء
∴ ١٦ ب ء = ٤٨ ∴ ب ء = ٣ سم
في Δ أ ب ء : ق(∠ب) = ٩٠° ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ ء}$
∴ أ ء = $\sqrt{٦^2 + ٣^2} = ٣\sqrt{٥}$ سم
، ∵ $(ب ء)^2$ = ء هـ × ء أ
∴ $(٣)^2$ = ء هـ × $٣\sqrt{٥}$ ∴ ء هـ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٥}$ سم

١٠ (ب) **١١** (جـ)

١٢
ل + م = ٥ ، ل م = ٧
نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة :
∴ هـ + و = $ل^2 م + م^2 ل$ = ل م (ل + م)
= ٧ (٥) = ٣٥
، هـ و = $(ل^2 م)(م^2 ل) = (ل م)^3 = (٧)^3 = ٣٤٣$
∴ المعادلة المطلوبة : $س^2$ − ٣٥ س + ٣٤٣ = ٠

١٣ (جـ) **١٤** (ب) **١٥** (ب) **١٦** (جـ)

١٧
ΔΔ أ م ء ، ب م جـ فيهما :
ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء جـ ب) من خواص الرباعي الدائري
، ق(∠أ ء جـ) = ق(∠أ ب جـ) من خواص الرباعي الدائري
∴ Δ أ م ء ~ Δ ب م جـ
∴ $\frac{م(Δ أ م ء)}{م(Δ ب م جـ)} = \left(\frac{أ ء}{ب جـ}\right)^2 = \left(\frac{٨}{١٢}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

١٨ (د) **١٩** (ب)

٢٠
∵ إشارة المميز : $ب^2$ − ٤ أ جـ = $(٠)^2$ − ٤ (٤)
= −١٦ (< صفر)
∴ المعادلة $س^2$ + ٤ = ٠ ، ليس لها جذور حقيقية،
، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح
، مجموعة حل المتباينة = ∅

21 (د) 22 (جـ)

23

∵ مساحة الدائرة ٣٦ π ∴ π نق^2 = ٣٦ π

∴ نق^2 = ٣٦ ∴ نق = ٦ سم

∵ حا (د أ ب م) = $\frac{1}{2}$ ∴ ق (د أ ب م) = $\frac{\pi}{6}$

في Δ أ م ب : ∵ م ب = م أ = نق

∴ ق (د أ م ب) = π − $\frac{\pi}{6}$ × ٢ = $\frac{2\pi}{3}$

∴ ق (د أ م ب) المنعكسة = ٢ π − $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{4\pi}{3}$

∴ طول أب الأكبر = $\frac{4\pi}{3}$ × ٦ = ٨ π سم

∴ محيط الجزء المظلل = ٨ π + ٦ + ٦

= (١٢ + ٨ π) سم

24 (أ) 25 (جـ)

26

في Δ أ هـ حـ :

∵ ءب // حـ هـ

∴ $\frac{أء}{ءهـ}$ = $\frac{أب}{بحـ}$ = $\frac{3}{4}$

، ∵ $\frac{أهـ}{هـحـ}$ = $\frac{9}{12}$ = $\frac{3}{4}$

∴ $\frac{أهـ}{هـحـ}$ = $\frac{أب}{بحـ}$

∴ هـب ينصف د أ هـ حـ

27 (د) 28 (أ)

النموذج الأول

1 (جـ) 2 (ب)

3

∵ ل + م = ٥ ، ل م = ٦

، بفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢ = ٥ + ٢ = ٧

، هـ و = (ل + ١) (م + ١) = ل م + ل + م + ١

= ٦ + ٥ + ١ = ١٢

∴ المعادلة المطلوبة هي : س^2 − ٧ س + ١٢ = ٠

4 (أ) 5 (ب)

6

∵ ءهـ // ب حـ ∴ $\frac{أء}{أب}$ = $\frac{أهـ}{أحـ}$

، ∵ ءحـ // ب و ∴ $\frac{أء}{أب}$ = $\frac{أحـ}{أو}$

∴ $\frac{أهـ}{أحـ}$ = $\frac{أحـ}{أو}$ ∴ (أحـ)^2 = أهـ × أو

7 (أ) 8 (ب) 9 (جـ)

10

∵ (−س ، س) تقع على دائرة الوحدة

∴ س^2 + (−س)^2 = ١

∴ ٢ س^2 = ١

∴ س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ويرفض الحل السالب).

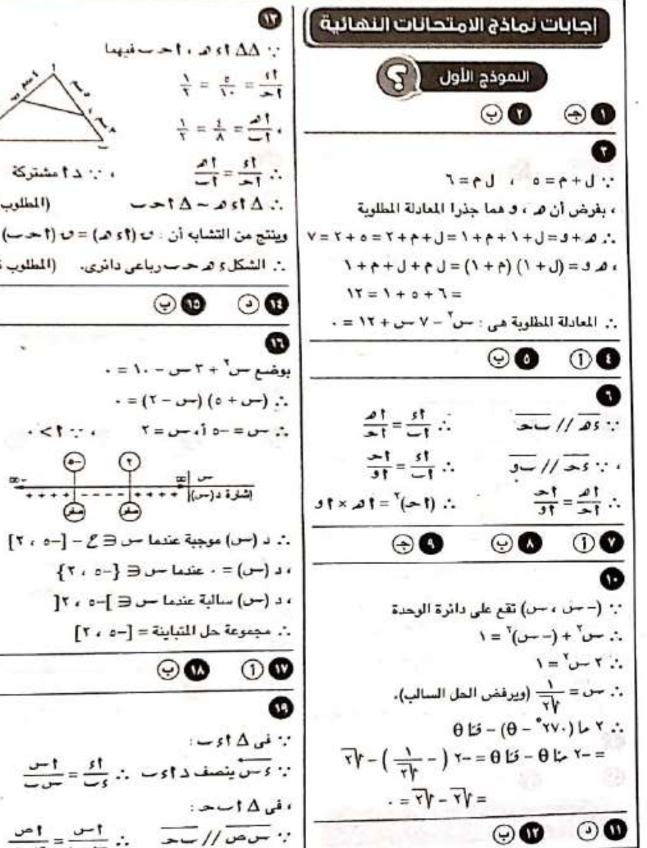
∴ ٢ حا (٢٧٠° − θ) − ظتا θ

= −٢ حا θ − ظتا θ = −٢ (−$\frac{1}{\sqrt{2}}$) − $\sqrt{2}$

= $\sqrt{2}$ − $\sqrt{2}$ = ٠

11 (د) 12 (ب)

13



∵ ΔΔ أ ء هـ ، أ حـ ب فيهما

$\frac{أء}{أحـ}$ = $\frac{5}{10}$ = $\frac{1}{2}$

، $\frac{أهـ}{أب}$ = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{أء}{أحـ}$ = $\frac{أهـ}{أب}$ ، ∵ د أ مشتركة

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب (المطلوب أولًا)

وينتج من التشابه أن : ق (د أ ء هـ) = ق (د أ حـ ب)

∴ الشكل ء هـ حـ ب رباعي دائري. (المطلوب ثانيًا)

14 (د) 15 (ب)

16

بوضع س^2 + ٣ س − ١٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٥ أو س = ٢ ، ∵ أ > ٠

∴ د (س) موجبة عندما س ∈ ح − [−٥ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، ٢}

، د (س) سالبة عندما س ∈]−٥ ، ٢[

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٥ ، ٢]

17 (أ) 18 (ب)

19

∵ في Δ ء أ ب :

∵ ءس ينصف د ء أ ب ∴ $\frac{أء}{ءب}$ = $\frac{أس}{سب}$ (١)

، في Δ أ ب حـ :

∵ س ص // ب حـ ∴ $\frac{أس}{سب}$ = $\frac{أص}{صحـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أء / وب = أص / ص حـ

، ∵ ءب = ء حـ ∴ أء / ء حـ = أص / ص حـ

∴ ءص ينصف ∠ أ ء حـ (المطلوب أولًا)

، في Δ أ ب ء :

∵ ءس ينصف ∠ أ ء ب من الداخل ، ءص ينصف الزاوية الخارجة عندها.

∴ ق (∠ س ء ص) = ٩٠° (المطلوب ثانيًا)

٢٠ (ب) ٢١ (جـ)

٢٢

جا (١٨٠° − س)

+ ظا (٩٠° − س)

+ ظا (٢٧٠° − س)

= جا س + ظتا س + ظتا س

= −٤/٥ + (−٣/٤) + (−٣/٤) = −٢٣/١٠

٢٣ (ب) ٢٤ (د)

٢٥

∵ أء ينصف ∠ ب أ حـ

∴ ب ء / ء حـ = أب / أحـ

∴ ٢٤ / ء حـ = ٣ / ٥

∴ ء حـ = ٤٠ سم

، ∵ أب : أحـ = ٣ : ٥

∴ أب = ٣ س ، أحـ = ٥ س

∴ $(٥ س)^2 = (٣ س)^2 + (٦٤)^2$

∴ $٢٥ س^2 = ٩ س^2 + ٤٠٩٦$

∴ $١٦ س^2 = ٤٠٩٦$ ∴ $س^2 = ٢٥٦$

∴ س = ١٦

∴ أب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم

، أحـ = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٤٨ + ٦٤ + ٨٠ = ١٩٢ سم

٣٦ (أ) ٣٧ (جـ) ٣٨ (د)

النموذج الثاني

١ (أ) ٢ (ب)

٣

∵ ΔΔ أ ء هـ ، أ حـ ب فيهما

أء / أحـ = ٣ / ٩ = ١ / ٣ ، أهـ / أب = ٤ / ١٢ = ١ / ٣

∴ أء / أحـ = أهـ / أب ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

ومن التشابه ينتج أء / أحـ = ءهـ / حـ ب

∴ ءهـ / ٦ = ١ / ٣ ∴ ءهـ = ٢ سم

٤ (جـ) ٥ (د)

٦

∵ ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)

∴ (θ + ٢٠°) + (٣θ + ٣٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ ٤θ + ٥٠° = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ ٤θ = ٤٠° + ١٨٠° ن ∴ θ = ١٠° + ٤٥° ن

، عند ن = ٠ ∴ θ = ١٠°

، عند ن = ١ ∴ θ = ٥٥°

، عند ن = ٢ ∴ θ = ١٠٠° (مرفوض)

∴ قيم θ المطلوب هي ١٠° ، ٥٥°

٧ (جـ) ٨ (جـ) ٩ (ب)

١٠

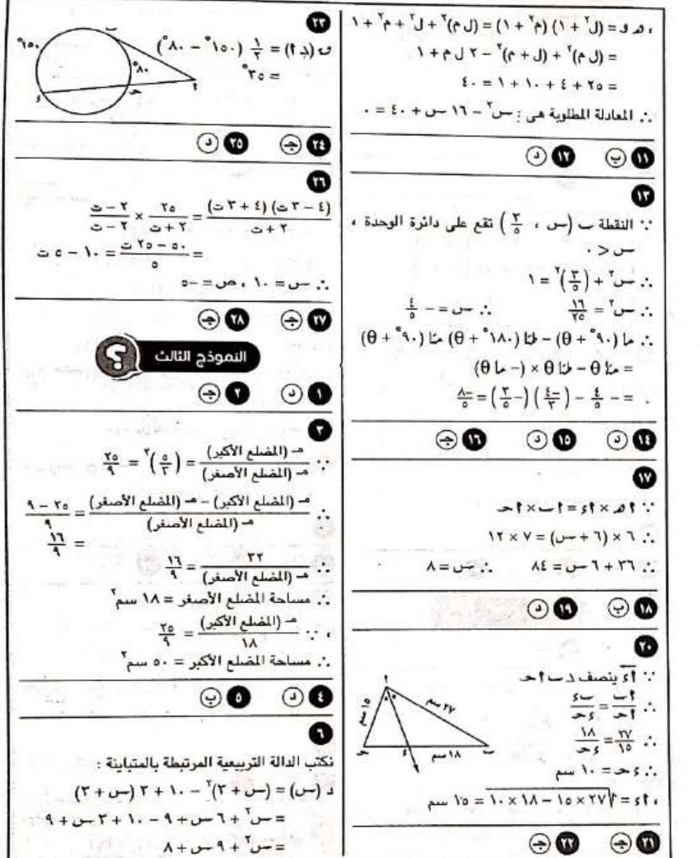
∵ ل + م = ٢ ، ل م = −٥

نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = $ل^2 + ١ + م^2 + ١$

= $(ل + م)^2 − ٢ ل م + ٢$

= ٤ + ١٠ + ٢ = ١٦



، هـ و = $(ل^2 + ١)(م^2 + ١) = (ل م)^2 + ل^2 + م^2 + ١$

= $(ل م)^2 + (ل + م)^2 − ٢ ل م + ١$

= ٢٥ + ٤ + ١٠ + ١ = ٤٠

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^2 − ١٦ س + ٤٠ = ٠$

١١ (ب) ١٢ (د)

١٣

∵ النقطة ب (س ، ٣/٥) تقع على دائرة الوحدة ، س < ٠

∴ $س^2 + (٣/٥)^2 = ١$

∴ $س^2 = ١٦/٢٥$ ∴ س = −٤/٥

∴ جا (٩٠° + θ) − ظا (١٨٠° + θ) جتا (٩٠° + θ)

= جتا θ − ظا θ × (− جا θ)

= −٤/٥ − (−٤/٣)(−٣/٥) = −٨/٥

١٤ (د) ١٥ (د) ١٦ (جـ)

١٧

∵ أهـ × أء = أب × أحـ

∴ ٦ × (٦ + س) = ٧ × ١٢

∴ ٣٦ + ٦ س = ٨٤ ∴ س = ٨

١٨ (ب) ١٩ (د)

٢٠

∵ أء ينصف ∠ ب أ حـ

∴ ب ء / ء حـ = أب / أحـ

∴ ١٨ / ء حـ = ٢٧ / ١٥

∴ ء حـ = ١٠ سم

، أء = $\sqrt{٢٧ × ١٥ − ١٨ × ١٠}$ = ١٥ سم

٢١ (جـ) ٢٢ (جـ)

٢٣

ق (∠ أ) = ١/٢ (١٥٠° − ٨٠°)

= ٣٥°

٢٤ (جـ) ٢٥ (د)

٢٦

(٤ − ٣ت)(٤ + ٣ت) / (٢ + ت) = ٢٥ / (٢ + ت) × (٢ − ت) / (٢ − ت)

= (٥٠ − ٢٥ ت) / ٥ = ١٠ − ٥ ت

∴ س = ١٠ ، ص = −٥

٢٧ (جـ) ٢٨ (جـ)

النموذج الثالث

١ (د) ٢ (جـ)

٣

∵ م (المضلع الأكبر) / م (المضلع الأصغر) = $(٥/٣)^2$ = ٢٥/٩

∴ [م (المضلع الأكبر) − م (المضلع الأصغر)] / م (المضلع الأصغر) = (٢٥ − ٩) / ٩ = ١٦/٩

∴ ٣٢ / م (المضلع الأصغر) = ١٦/٩

∴ مساحة المضلع الأصغر = ١٨ $سم^2$

، ∵ م (المضلع الأكبر) / ١٨ = ٢٥/٩

∴ مساحة المضلع الأكبر = ٥٠ $سم^2$

٤ (د) ٥ (ب)

٦

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = $(س + ٣)^2$ − ١٠ + ٣ (س + ٣)

= $س^2$ + ٦ س + ٩ − ١٠ + ٣ س + ٩

= $س^2$ + ٩ س + ٨

، بوضع $س^٢ + ٩ س + ٨ = ٠$

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أ، س = −١ ، ∵ أ > ٠

إشارة د(س): + + + + (−٨) − − − − (−١) + + + +

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٨ ، −١]

٧ (أ) **٨** (د) **٩** (أ)

١٠

فى الشكل الرباعى أ ب حـ ء :

ق(د ب م حـ) = $٣٦٠° - (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠°$

بالتقدير الدائرى = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ طول القوس الأصغر ب حـ = $\frac{٢\pi}{٣} \times ٥ = \frac{١٠\pi}{٣}$ سم

١١ (أ) **١٢** (ب)

١٣

∵ س + ص ت = $(١ + ت) (١ + ت)^٢$

$= (١ + ت) (١ + ٢ ت + ت^٢)$

$= (١ + ت) (١ + ٢ ت − ١)$

$= (١ + ت) (٢ ت) = ٢ ت + ٢ ت^٢$

$= ٢ ت − ٢$

∴ س = −٢ ، ص = ٢

١٤ (ب) **١٥** (جـ)

١٦

∵ ΔΔ أ س ص ، أ حـ ب فيهما

أس/أحـ = ٤/٨ = ١/٢ ، أص/أب = ٥/١٠ = ١/٢

∴ أس/أحـ = أص/أب ، د أ مشتركة

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ حـ ب (المطلوب أولًا)

، من التشابه ينتج : ق(د أ س ص) = ق(د حـ)

∴ الشكل س ب حـ ص رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

١٧ (أ) **١٨** (أ) **١٩** (جـ)

٢٠

الطرف الأيمن : جا ٦٠٠° جتا (−٣٠٠°) + جا ١٥٠° جتا ٢٤٠°

= جا (٣٦٠° + ٢٤٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= جا (١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= − جا ٦٠° جتا ٣٠° + جا ٣٠° (− جتا ٦٠°)

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢} = -١$

، الطرف الأيسر : جا $\frac{٣\pi}{٢} = -١$

∴ الطرفان متساويان.

٢١ (جـ) **٢٢** (ب)

٢٣

فى Δ أ ب ء :

∵ ء س ينصف د أ ء ب

∴ أس/س ب = أء/ء ب (١)

، فى Δ ء أ حـ : ∵ ء ص ينصف د أ ء حـ

∴ أص/ص حـ = أء/ء حـ (٢)

، ∵ أء متوسط فى Δ أ ب حـ : ∴ ب ء = ء حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أس/س ب = أص/ص حـ ∴ س ص // ب حـ

٢٤ (د) **٢٥** (جـ)

٢٦

∵ أب // ء هـ // س ص ، أص ، ب س قاطعان لهم.

∴ أحـ/ب حـ = حـ هـ/حـ ء = هـ ص/ء س

∴ ٨/ب حـ = ٤/٦ = هـ ص/٣

∴ ب حـ = ١٢ سم ، هـ ص = ٢ سم

٢٧ (جـ) **٢٨** (جـ)

النموذج الرابع

١ (ب) **٢** (أ) **٣** (جـ)

٤

نضع $٨ + ٢ س − س^٢ = ٠$

∴ $س^٢ − ٢ س − ٨ = ٠$

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

، ∵ أ < ٠

إشارة د(س): − − − − (−٢) + + + + (٤) − − − −

∴ د موجبة عندما س ∈]−٢ ، ٤[

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ٤}

• د سالبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٤]

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٢ ، ٤]

٥ (أ) **٦** (جـ)

٧

فى Δ أ ء هـ : أء = $\sqrt{(٥)^٢ - (٤)^٢}$ = ٣ سم

، ∵ أء/ء ب = ٣/٦ = ١/٢

، أهـ/هـ حـ = ٤/٨ = ١/٢ ∴ أء/ء ب = أهـ/هـ حـ

∴ ء هـ // ب حـ (المطلوب أولًا)

، فى Δ أ ب حـ : ب حـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$

= ١٥ سم (المطلوب ثانيًا)

٨ (د) **٩** (ب)

١٠

∵ ٢ θ ± θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

∴ ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن ومنها θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ ن

أ، θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن ، عند ن = ٠

فإن : θ = $\frac{\pi}{٦}$ أ، θ = $\frac{\pi}{٢}$

، عند ن = ١ فإن : θ = $\frac{٥}{٦}$ π

١١ (ب) **١٢** (د) **١٣** (ب)

١٤

∵ أ ، ب تقعان على الدائرتين م ، ن

∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = ٠ ، ق م (ب) = ق ن (ب) = ٠

∴ أب محور أساسى للدائرتين م ، ن

، ∵ حـ ∈ أب

∴ ق م (حـ) = ق ن (حـ) (المطلوب أولًا)

، ق م (حـ) = حـ ء × حـ هـ = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ حـ أ × (حـ أ + ١٠) = ١٤٤

∴ $(حـ أ)^٢$ + ١٠ (حـ أ) − ١٤٤ = ٠

∴ ((حـ أ) + ١٨) ((حـ أ) − ٨) = ٠

∴ حـ أ = ٨ سم ، $(حـ و)^٢$ = ١٤٤

∴ حـ و = ١٢ سم (المطلوب ثانيًا)

١٥ (جـ) **١٦** (جـ)

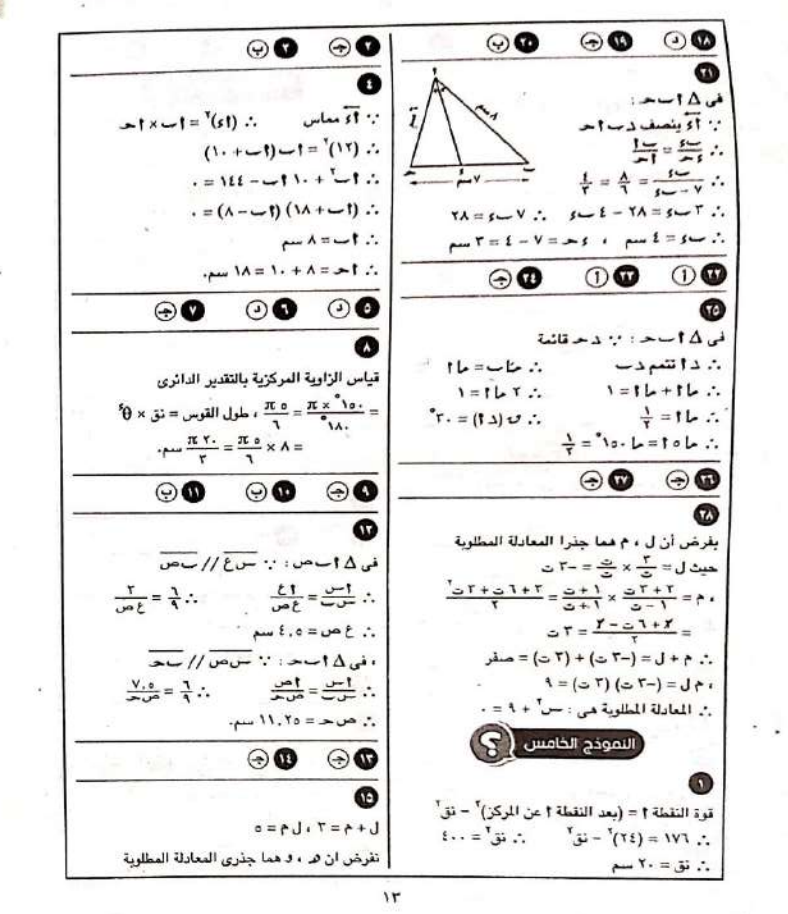
١٧

∵ $(أب)^٢ = (٨)^٢ = ٦٤$

، أحـ × أء = ٤ × ١٦ = ٦٤

∴ $(أب)^٢$ = أحـ × أء

∴ أب تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء



١٨ (د) ١٩ (جـ) ٢٠ (ب)

٢١

في Δ أ ب جـ :

∵ أء ينصف ∠ب أ جـ

∴ ب ء / ء جـ = أ ب / أ جـ

∴ ب ء / (٧ − ب ء) = ٨/٦ = ٤/٣

∴ ٣ ب ء = ٢٨ − ٤ ب ء ∴ ٧ ب ء = ٢٨

∴ ب ء = ٤ سم ، ء جـ = ٧ − ٤ = ٣ سم

٢٢ (أ) ٢٣ (أ) ٢٤ (جـ)

٢٥

في Δ أ ب جـ : ∵ ∠جـ قائمة

∴ ∠أ تتمم ∠ب ∴ جتا ب = جا أ

∴ جا² أ + جا² أ = ١ ∴ ٢ جا² أ = ١

∴ جا² أ = ١/٢ ∴ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ جا ٥ أ = جا ١٥٠° = ١/٢

٢٦ (جـ) ٢٧ (جـ)

٢٨

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة

حيث ل = ٣/ت × ت/ت = −٣ ت

، م = (٢ + ٣ ت)/(١ − ت) × (١ + ت)/(١ + ت) = (٢ + ٦ ت + ٢ ت²)/٢

= (٢ + ٦ ت − ٢)/٢ = ٣ ت

∴ م + ل = (−٣ ت) + (٣ ت) = صفر

، م ل = (−٣ ت) (٣ ت) = ٩

∴ المعادلة المطلوبة هى : س² + ٩ = ٠ .

النموذج الخامس

١

قوة النقطة أ = (بعد النقطة أ عن المركز)² − نق²

∴ ١٧٦ = (٢٤)² − نق² ∴ نق² = ٤٠٠

∴ نق = ٢٠ سم

١ (جـ) ٢ (ب)

٤

∵ أء مماس ∴ (أء)² = أ ب × أ جـ

∴ (١٢)² = أ ب (أ ب + ١٠)

∴ أ ب² + ١٠ أ ب − ١٤٤ = ٠

∴ (أ ب + ١٨) (أ ب − ٨) = ٠

∴ أ ب = ٨ سم

∴ أ جـ = ٨ + ١٠ = ١٨ سم.

٥ (د) ٦ (د) ٧ (جـ)

٨

قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى = ١٥٠° × π / ١٨٠° = ٥π/٦ ، طول القوس = نق × θ^ء

= ٨ × ٥π/٦ = ٢٠π/٣ سم.

٩ (جـ) ١٠ (ب) ١١ (ب)

١٢

في Δ أ ب ص : ∵ س ع // ب ص

∴ أ س / س ب = أ ع / ع ص ∴ ٦/٩ = ٣/ع ص

∴ ع ص = ٤.٥ سم

، في Δ أ ب جـ : ∵ س ص // ب جـ

∴ أ س / س ب = أ ص / ص جـ ∴ ٦/٩ = ٧.٥/ص جـ

∴ ص جـ = ١١.٢٥ سم.

١٣ (جـ) ١٤ (جـ)

١٥

ل + م = ٣ ، ل م = ٥

نفرض ان هـ ، و هما جذري المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = ل/م + م/ل = (ل² + م²)/(ل م) = ((ل + م)² − ٢ ل م)/(ل م)

= ((٣)² − ٢ (٥))/٥ = −١/٥

، هـ و = ل/م × م/ل = ١

∴ المعادلة المطلوبة هى : س² + ١/٥ س + ١ = ٠

∴ ٥ س² + س + ٥ = ٠ (المطلوب أولاً)

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة س² − ٣ س + ٥ = ٠

∴ ل² − ٣ ل + ٥ = صفر ∴ ل² = ٣ ل − ٥

∴ قيمة المقدار (ل² + ٣ م)² = (٣ ل − ٥ + ٣ م)²

= (٣ (ل + م) − ٥)²

= (٣ × ٣ − ٥)² = ١٦

(المطلوب ثانياً)

١٦ (جـ) ١٧ (ب) ١٨ (ب)

١٩

جا θ = ٤/٥ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ θ تقع فى الربع الثانى

∴ جا (١٨٠° − θ) + ظا (٣٦٠° − θ)

+ ٢ جا (٢٧٠° − θ) = جا θ − ظا θ − ٢ جتا θ

= ٤/٥ − (−٤/٣) − ٢ (−٣/٥) = ١٠/٣

٢٠ (ب) ٢١ (جـ)

٢٢

س = ١٣ (١ + ت)/(٥ + ت) × (٥ − ت)/(٥ − ت)

= ١٣ (٥ + ٤ ت − ت²)/(٢٥ + ١) = ١٣ (٦ + ٤ ت)/٢٦

= ٣ + ٢ ت

، ص = (٥ + ت)/(١ + ت) × (١ − ت)/(١ − ت)

= (٥ − ٥ ت + ت − ت²)/(١ + ١) = (٦ − ٤ ت)/٢ = ٣ − ٢ ت

∴ س + ص = ٣ + ٢ ت + ٣ − ٢ ت = ٦

٢٣ (أ) ٢٤ (د) ٢٥ (ب)

٢٦

في Δ أ ب جـ : أ جـ = √((١٠)² − (٦)²) = ٨

ΔΔ أ ء هـ ، جـ ء و فيهما

ق(∠أ ء هـ) = ق(∠جـ ء و) بالتقابل بالرأس

، ق(∠ء هـ أ) = ق(∠ء جـ و) بالتبادل

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ جـ ء و ومن التشابه ينتج :

أ ء / ء جـ = أ هـ / جـ و ∴ أ ء / (٨ − أ ء) = ٢/٦ = ١/٣

∴ ٣ أ ء = ٨ − أ ء ∴ ٤ أ ء = ٨

∴ أ ء = ٢ سم ∴ أ هـ = أ ء = ٢ سم

∴ Δ أ ء هـ متساوى الساقين.

٢٧ (جـ) ٢٨ (د)

النموذج السادس

١ (جـ) ٢ (جـ) ٣ (أ)

٤

(٢ + ٣ ت) + (١ − ت) = س + ص ت

∴ ٣ + ٢ ت = س + ص ت ∴ س = ٣ ، ص = ٢

٥ (أ) ٦ (د) ٧ (جـ)

٨

∵ أب مماس ∴ (أ ب)² = أ جـ × أ ء

∵ جـ منتصف أء ∴ أ ء = ٢ أ جـ

∴ (٥√٣)² = أ جـ × ٢ أ جـ ∴ ٧٥ = ٢ (أ جـ)²

∴ أ جـ = ٥√٦ / ٢

∴ جـ ء = ٥√٦ / ٢ (المطلوب أولاً)

∴ قوة النقطة أ = (أ ب)² = ٧٥ (المطلوب ثانياً)

٩ (ب) ١٠ (د)

(11) $\theta + 20^\circ + 3\theta + 30^\circ = 90^\circ$

∴ $4\theta = 40^\circ$ ومنها $\theta = 10^\circ$

(12) (د) (13) (جـ)

(14) ∵ ب حـ = ١٠ سم ، ب ء = ٤ سم

∴ ء حـ = ٦ سم

في Δ أ ب حـ : $\frac{أب}{أحـ} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$

∴ أء ينصف ∠ ب أ حـ (المطلوب أولاً)

في Δ أ ب و :

∵ أهـ ينصف ∠ ب أ و ، أهـ ⊥ ب و

∴ Δ أ ب و مثلث متساوي الساقين

∴ أب = أو = ٦ سم ، و حـ = ٩ − ٦ = ٣ سم

∴ م(Δ أ ب و) : م(Δ حـ ب و)

= أو : و حـ = ٦ : ٣ = ٢ : ١ (المطلوب ثانياً)

(15) (جـ) (16) (ب)

(17) في Δ أ حـ ء : ∵ ءهـ ينصف ∠ حـ ء أ

∴ $\frac{حـ هـ}{هـ أ} = \frac{حـ ء}{ء أ}$ (1)

، في Δ أ ء ب : ∵ ءو ينصف ∠ ب ء أ

∴ $\frac{ب و}{و أ} = \frac{ء ب}{ء أ}$ (2)

، ∵ حـ ء = ء ب (3)

من (1) ، (2) ، (3) : ∴ $\frac{حـ هـ}{هـ أ} = \frac{ب و}{و أ}$

∴ هـ و // ب حـ

(18) (جـ) (19) (جـ) (20) (ب) (21) (د)

(22) جتا $\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، جا $\theta = -\frac{2}{3}$

∴ جا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ + ظتا $(2\pi - \theta)$

= جتا θ − ظتا θ = $\frac{\sqrt{5}}{3} - \left((\frac{\sqrt{5}}{3}) \div (\frac{-2}{3})\right) = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

(23) (ب) (24) (جـ)

(25) ΔΔ أ حـ ء ، ب حـ أ فيهما

∵ $(أحـ)^2$ = حـ ء × حـ ب

∴ $\frac{أحـ}{ب حـ} = \frac{حـ ء}{أحـ}$ ، ∠ حـ مشتركة

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

(26) (د) (27) (جـ)

(28) ∵ $\frac{3}{ل} + \frac{3}{م} = 12$ ∴ $\frac{3ل + 3م}{ل م} = 12$

∴ م + ل = ٤ ل م (1)

، $\frac{3}{ل} \times \frac{3}{م} = 9$ ∴ ل م = ١ (2)

من (1) ، (2) : ∴ م + ل = ٤

ويفرض أن جذري المعادلة المطلوبة هنا : هـ ، و

∴ هـ + و = $\frac{1}{ل^3} + \frac{1}{م^3} = \frac{ل^3 + م^3}{ل^3 م^3}$

$= \frac{(ل + م)\,[(ل + م)^2 - 3\,ل م]}{(ل م)^3}$

$= \frac{4\,[(4)^2 - 3 \times 1]}{(1)^3} = 52$

، هـ و = $\frac{1}{ل^3} \times \frac{1}{م^3} = \frac{1}{(ل م)^3} = 1$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^2 - 52\,س + 1 = 0$

النموذج السابع

(1) (جـ) (2) (جـ) (3) (جـ) (4) (أ)

(5) نرسم : وء ⊥ أب

في Δ أ ء و : ق(∠ أ ء و) = ٩٠°

∴ جا $(\frac{1}{2}\theta) = \frac{8}{10}$ ∴ $\frac{1}{2}\theta = 0.927^ء$

∴ $\theta \approx 1.855^ء$

∴ طول القوس : أب⌒ = $1.855^ء \times 10 = 18.55$ سم

(6) ΔΔ أ ب حـ ، ء ب و فيهما :

$\frac{أب}{ء ب} = \frac{6}{4.5} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{أحـ}{ء و} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

، $\frac{ب حـ}{ب و} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ∴ $\frac{أب}{ء ب} = \frac{أحـ}{ء و} = \frac{ب حـ}{ب و}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب و (المطلوب أولاً)

، من التشابه ينتج أن : ق(∠ حـ) = ق(∠ ء و ب)

، ∵ ق(∠ ء و ب) = ق(∠ هـ و حـ) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ هـ و حـ)

∴ Δ هـ و حـ متساوي الساقين (المطلوب ثانياً)

(7) (د) (8) (ب)

(9) الطرف الأيسر : جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (−٦٠°) ظتا ١٢٠°

= جا (٧٢٠° + ٣٠°) جتا (٣٦٠° − ٦٠°)

+ جا (−٦٠°) ظتا (٩٠° + ٣٠°)

= جا ٣٠° جتا ٦٠° − جا ٦٠° (− ظا ٣٠°)

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$

∴ جا $\theta = \frac{3}{4}$ (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ $\theta \approx 48^\circ\ 35'\ 25''$ أو

$\theta = 180^\circ - 48^\circ\ 35'\ 25'' = 131^\circ\ 24'\ 35''$

(10) ل ، م هما جذرا المعادلة $4\,س^2 - 13\,س + 4 = 0$

∴ ل + م = $\frac{13}{4}$ ، ل م = $\frac{4}{4} = 1$

نفرض أن : هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = (ل + م) + (ل م) = $\frac{13}{4} + 1 = \frac{17}{4}$

، هـ و = (ل + م).(ل م) = $\frac{13}{4}$ (1) = $\frac{13}{4}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^2 - \frac{17}{4}\,س + \frac{13}{4} = 0$

أي $4\,س^2 - 17\,س + 13 = 0$

(11) (جـ) (12) (ب) (13) (د) (14) (ب)

(15) نضع $س^2 - س + 12 = 0$

يبحث إشارة المميز :

$ب^2 - 4\,أ\,حـ = (-1)^2 - 4\,(1)(12) = -47$ (< صفر)

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية،

∴ أ > ٠

∴ إشارة د(س) موجبة لكل س ∈ ع

∴ $س^2 + 12 > س$ ∴ $س^2 - س + 12 > 0$

∴ مجموعة الحل = ع

(16) (جـ) (17) (ب) (18) (ب)

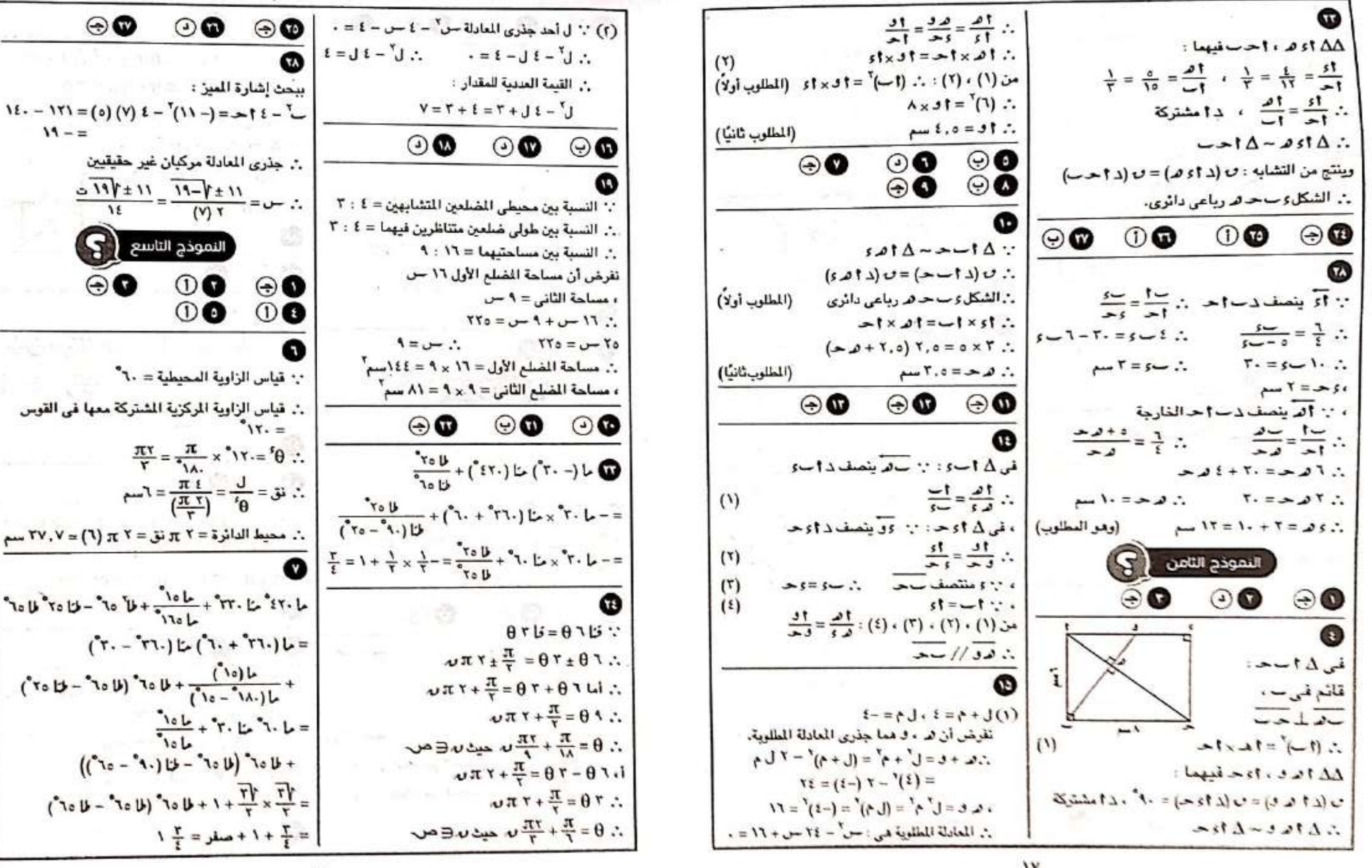
(19) ∵ أس // ب ص // حـ ع ، ع هـ ، حـ هـ قاطعان لهم

∴ $\frac{ع ص}{حـ ب} = \frac{ص س}{ب أ} = \frac{س هـ}{أ هـ}$

∴ $\frac{ع ص}{7.5} = \frac{3}{ب أ} = \frac{4}{6}$

∴ ب أ = ٤.٥ سم ، ع ص = ٥ سم.

(20) (ب) (21) (جـ) (22) (ب)



٢٣

∵ ΔΔ أ ء هـ ، أ حـ ب فيهما :

$\frac{أء}{أحـ} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{أهـ}{أب} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{أء}{أحـ} = \frac{أهـ}{أب}$ ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

وينتج من التشابه : ق(∠أ ء هـ) = ق(∠أ حـ ب)

∴ الشكل ء ب حـ هـ رباعي دائري.

٢٤ (جـ) **٢٥** (أ) **٢٦** (أ) **٢٧** (ب)

٢٨

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ ∴ $\frac{ب أ}{أحـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$

∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{ب ء}{٥ - ب ء}$ ∴ ٤ ب ء = ٣٠ - ٦ ب ء

∴ ١٠ ب ء = ٣٠ ∴ ب ء = ٣ سم

، ء حـ = ٢ سم

، ∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ب أ حـ الخارجة

∴ $\frac{ب أ}{أحـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{٥ + هـ حـ}{هـ حـ}$

∴ ٦ هـ حـ = ٢٠ + ٤ هـ حـ

∴ ٢ هـ حـ = ٢٠ ∴ هـ حـ = ١٠ سم

∴ ء هـ = ٢ + ١٠ = ١٢ سم (وهو المطلوب)

النموذج الثامن

١ (جـ) **٢** (د) **٣** (جـ)

٤

في Δ أ ب حـ :

قائم في ب ،

$\overline{ب هـ} \perp \overline{أحـ}$

∴ (أب)² = أهـ × أحـ (١)

∵ ΔΔ أ هـ و ، أ ء حـ فيهما :

ق(∠أ هـ و) = ق(∠أ ء حـ) = ٩٠° ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أ هـ و ~ Δ أ ء حـ

∴ $\frac{أهـ}{أء} = \frac{هـ و}{ء حـ} = \frac{أو}{أحـ}$

∴ أهـ × أحـ = أو × أء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ (أب)² = أو × أء (المطلوب أولاً)

∴ (٦)² = أو × ٨

∴ أو = ٤,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

٥ (ب) **٦** (د) **٧** (جـ) **٨** (ب) **٩** (جـ)

١٠

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ هـ ء)

∴ الشكل ء ب حـ هـ رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ أء × أب = أهـ × أحـ

∴ ٣ × ٥ = ٢,٥ (٢,٥ + هـ حـ)

∴ هـ حـ = ٣,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

١١ (جـ) **١٢** (جـ) **١٣** (جـ)

١٤

في Δ أ ب ء : ∵ $\overline{ب هـ}$ ينصف ∠أ ب ء

∴ $\frac{أهـ}{هـ ء} = \frac{أب}{ب ء}$ (١)

، في Δ أ ء حـ : ∵ $\overline{ء و}$ ينصف ∠أ ء حـ

∴ $\frac{أو}{و حـ} = \frac{أء}{ء حـ}$ (٢)

، ∵ ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ ب ء = ء حـ (٣)

، ∵ أب = أء (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : $\frac{أهـ}{هـ ء} = \frac{أو}{و حـ}$

∴ $\overline{هـ و} // \overline{ب حـ}$

١٥

(١) ل + م = ٤ ، ل م = -٤

نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة.

∴ هـ + و = ل² + م² = (ل + م)² - ٢ ل م

= (٤)² - ٢ (-٤) = ٢٤

، هـ و = ل² م² = (ل م)² = (-٤)² = ١٦

∴ المعادلة المطلوبة هي : س² - ٢٤ س + ١٦ = ٠

(٢) ∵ ل أحد جذرى المعادلة س² - ٤ س - ٤ = ٠

∴ ل² - ٤ ل - ٤ = ٠ ∴ ل² - ٤ ل = ٤

∴ القيمة العددية للمقدار :

ل² - ٤ ل + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

١٦ (ب) **١٧** (د) **١٨** (د)

١٩

∵ النسبة بين محيطي المضلعين المتشابهين = ٤ : ٣

∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٤ : ٣

∴ النسبة بين مساحتيهما = ١٦ : ٩

نفرض أن مساحة المضلع الأول ١٦ س

، مساحة الثاني = ٩ س

∴ ١٦ س + ٩ س = ٢٢٥

٢٥ س = ٢٢٥ ∴ س = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم²

، مساحة المضلع الثاني = ٩ × ٩ = ٨١ سم²

٢٠ (د) **٢١** (ب) **٢٢** (جـ)

٢٣ جا(-٣٠°) جتا(٤٢٠°) + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظتا } ٦٥°}$

= - جا ٣٠° × جتا(٣٦٠° + ٦٠°) + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظتا}(٩٠° - ٢٥°)}$

= - جا ٣٠° × جتا ٦٠° + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظا } ٢٥°}$ = $-\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٤}$

٢٤

∵ قتا ٦ θ = قا ٣ θ

∴ ٦ θ ± ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ إما ٦ θ + ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ ٩ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{١٨} + \frac{٢\pi}{٩}$ ن حيث ن ∈ ص

أو ٦ θ - ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ ن حيث ن ∈ ص

٢٥ (جـ) **٢٦** (د) **٢٧** (جـ)

٢٨

ببحث إشارة المميز :

ب² - ٤ أ حـ = (-١١)² - ٤ (٧) (٥) = ١٢١ - ١٤٠

= -١٩

∴ جذرى المعادلة مركبان غير حقيقيين

∴ س = $\frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ (٧)} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\ ت}{١٤}$

النموذج التاسع

١ (جـ) **٢** (أ) **٣** (جـ) **٤** (أ) **٥** (أ)

٦

∵ قياس الزاوية المحيطية = ٦٠°

∴ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس = ١٢٠°

∴ $\theta^{ر}$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ نق = $\frac{ل}{\theta^{ر}} = \frac{٤\pi}{(\frac{٢\pi}{٣})}$ = ٦ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π (٦) ≈ ٣٧,٧ سم

٧

جا ٤٢٠° جتا ٣٣٠° + $\frac{\text{جا } ١٥°}{\text{جا } ١٦٥°}$ + ظا² ٦٥° - ظتا ٢٥° ظا ٦٥°

= جا(٣٦٠° + ٦٠°) جتا(٣٦٠° - ٣٠°)

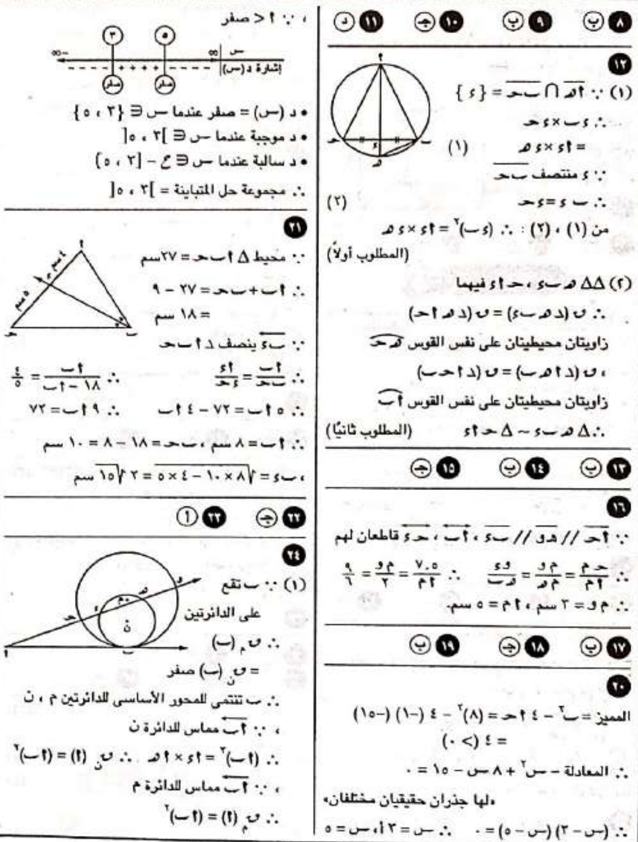
+ $\frac{\text{جا}(١٥°)}{\text{جا}(١٨٠° - ١٥°)}$ + ظا ٦٥° (ظا ٦٥° - ظتا ٢٥°)

= جا ٦٠° جتا ٣٠° + $\frac{\text{جا } ١٥°}{\text{جا } ١٥°}$

+ ظا ٦٥° (ظا ٦٥° - ظتا(٩٠° - ٦٥°))

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١ + ظا ٦٥° (ظا ٦٥° - ظا ٦٥°)

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ + صفر = ١ $\frac{٣}{٤}$



❽ ب ❾ ب ❿ ج ⓫ د

١٢

(١) ∵ أهـ ∩ بحـ = {ء}

∴ ءب × ءحـ

= ءأ × ءهـ   (١)

∵ ء منتصف بحـ

∴ ب ء = ء حـ   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $(ءب)^٢$ = ءأ × ءهـ   (المطلوب أولاً)

(٢) ΔΔ هـ ب ء ، حـ أ ء فيهما

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ هـ أ حـ)

زاويتان محيطيتان على نفس القوس هـ حـ

، ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ حـ ب)

زاويتان محيطيتان على نفس القوس أ ب

∴ Δ هـ ب ء ~ Δ حـ أ ء   (المطلوب ثانياً)

⓭ ب ⓮ ب ⓯ ج

١٦

∵ أحـ // هـ و // ب ء ، أب ، حـ ء قاطعان لهم

∴ حـ م / أ م = و م / هـ م = ء و / ب و ∴ ٧٫٥ / أ م = م و / ٢ = ٩ / ٦

∴ م و = ٣ سم ، أ م = ٥ سم.

⓱ ب ⓲ ج ⓳ ب

٢٠

المميز = $ب^٢$ - ٤ أ حـ = $(٨)^٢$ - ٤ (-١) (-١٥)

= ٤ (> ٠)

∴ المعادلة $-س^٢$ + ٨ س - ١٥ = ٠

لها جذران حقيقيان مختلفان.

∴ (س - ٣) (س - ٥) = ٠ ∴ س = ٣ ، س = ٥

، ∵ أ < صفر

إشارة د(س)

• د(س) = صفر عندما س ∈ {٣ ، ٥}

• د موجبة عندما س ∈]٣ ، ٥[

• د سالبة عندما س ∈ ح - [٣ ، ٥]

∴ مجموعة حل المتباينة =]٣ ، ٥[

٢١

∵ محيط Δ أ ب حـ = ٢٧ سم

∴ أب + ب حـ = ٢٧ - ٩

= ١٨ سم

∵ ب ء ينصف ∠ أ ب حـ

∴ أب / ب حـ = أء / ء حـ   ∴ أب / (١٨ - أب) = ٤ / ٥

∴ ٥ أب = ٧٢ - ٤ أب   ∴ ٩ أب = ٧٢

∴ أب = ٨ سم ، ب حـ = ١٨ - ٨ = ١٠ سم

، ب ء = √(٨ × ١٠ - ٤ × ٥) = ٢ √١٥ سم

㉒ ج ㉓ أ

٢٤

(١) ∵ ب تقع على الدائرتين

∴ ق م(ب)

= ق ن(ب) صفر

∴ ب تنتمي للمحور الأساسي للدائرتين م ، ن

، ∵ أب مماس للدائرة ن

∴ $(أب)^٢$ = أء × أهـ ∴ ق ن(أ) = $(أب)^٢$

، ∵ أب مماس للدائرة م

∴ ق م(أ) = $(أب)^٢$

∴ ق ن(أ) = ق م(أ)

∴ أ تنتمي للمحور الأساسي للدائرتين م ، ن

∴ أب هو المحور الأساسي للدائرتين م ، ن   (المطلوب أولاً)

(٢) ∵ ق م(أ) = ق ن(أ)

∴ أحـ × أء = أو × أهـ

∴ أحـ : أو = أهـ : أء   (المطلوب ثانياً)

㉕ د ㉖ ب ㉗ ب

٢٨

ص = (٣ + ت) / ت × ت / ت = (٣ت + $ت^٢$) / $ت^٢$ = ١ - ٣ت

قيمة المقدار : $س^٢$ + ٢ س ص + $ص^٢$

= $(س + ص)^٢$

= $(٢ + ٣ت + ١ - ٣ت)^٢$

= $(٣)^٢$ = ٩

النموذج العاشر

❶ ب ❷ د

٣

حاصل ضرب الجذرين = حـ / أ = ($ك^٢$ + ٤) / ٤ ك

، ∵ أحد جذري المعادلة هو معكوس ضربي للآخر

∴ حاصل ضرب الجذرين = ١

∴ ($ك^٢$ + ٤) / ٤ ك = ١

∴ $ك^٢$ + ٤ = ٤ ك

∴ $ك^٢$ - ٤ ك + ٤ = ٠

∴ $(ك - ٢)^٢$ = ٠

∴ ك = ٢

❹ ب ❺ ب ❻ ج ❼ ب

٨

∵ أب مماس للدائرة

∴ ٤٥° = ½ [ق(ب ء) - ق(ب حـ)]

= ½ [١٥٠° - ق(ب حـ)]

∴ ٤٥° = ٧٥° - ½ ق(ب حـ)

∴ ½ ق(ب حـ) = ٣٠°   ∴ ق(ب حـ) = ٦٠°

❾ ج ❿ د

١١

∵ جا ٢θ = جتا ٤θ ، θ زاوية حادة موجبة

∴ ٢θ + ٤θ = ٩٠° ∴ ٦θ = ٩٠° ∴ θ = ١٥°

∴ ظا(٩٠° - ٣θ) = ظا(٩٠° - ٣(١٥°)) = ظا ٤٥° = ١

⓬ ب ⓭ د

١٤

في Δ س ص ع : ع م ينصف ∠ س ع ص

∴ س م / م ص = س ع / ع ص   ∴ س م / م ص = ١٨ / ٩ = ٢ / ١

، ∵ س ن / ن ع = ١٢ / ٦ = ٢ / ١   ∴ س م / م ص = س ن / ن ع

∴ م ن // ص ع

⓯ ب ⓰ أ

١٧

∵ ٥ جا θ - ٣ = صفر

∴ جا θ = ٣ / ٥ ، π/٢ < θ < π

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ جا(π/٢ - θ) + جا(٢π - θ) - جا(٣π/٢ - θ)

= جتا θ - جا θ + جا θ + جتا θ

= جا θ + جتا θ = ٣ / ٥ + (-٤ / ٥) = -١ / ٥

⓲ ج ⓳ أ

٢٠

∆∆ أ ب جـ ، أ ء هـ فيهما :

$\frac{أب}{أء} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب جـ}{ء هـ} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{أ جـ}{أ هـ} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أب}{أء} = \frac{ب جـ}{ء هـ} = \frac{أ جـ}{أ هـ}$

∴ ∆ أ ب جـ ~ ∆ أ ء هـ (المطلوب أولاً)

، من التشابه ينتج أن : ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ء أ هـ)

∴ $\overline{أهـ}$ ينصف ∠ب أ ء

٢١ (د) **٢٢** (أ)

٢٣

∆∆ أ هـ ء ، أ ب جـ فيهما :

$\frac{أهـ}{أب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{أء}{أجـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أهـ}{أب} = \frac{أء}{أجـ}$ ، ∠أ مشتركة

∴ ∆ أ هـ ء ~ ∆ أ ب جـ (المطلوب أولاً)

، ينتج من التشابه : $\frac{م(∆ أ هـ ء)}{م(∆ أ ب جـ)} = \left(\frac{أهـ}{أب}\right)^٢$

∴ $\frac{٣}{م(∆ أ ب جـ)} = \left(\frac{٤}{٨}\right)^٢ = \frac{١}{٤}$

∴ م(∆ أ ب جـ) = ١٢ سم^٢

٢٤ (ب) **٢٥** (أ)

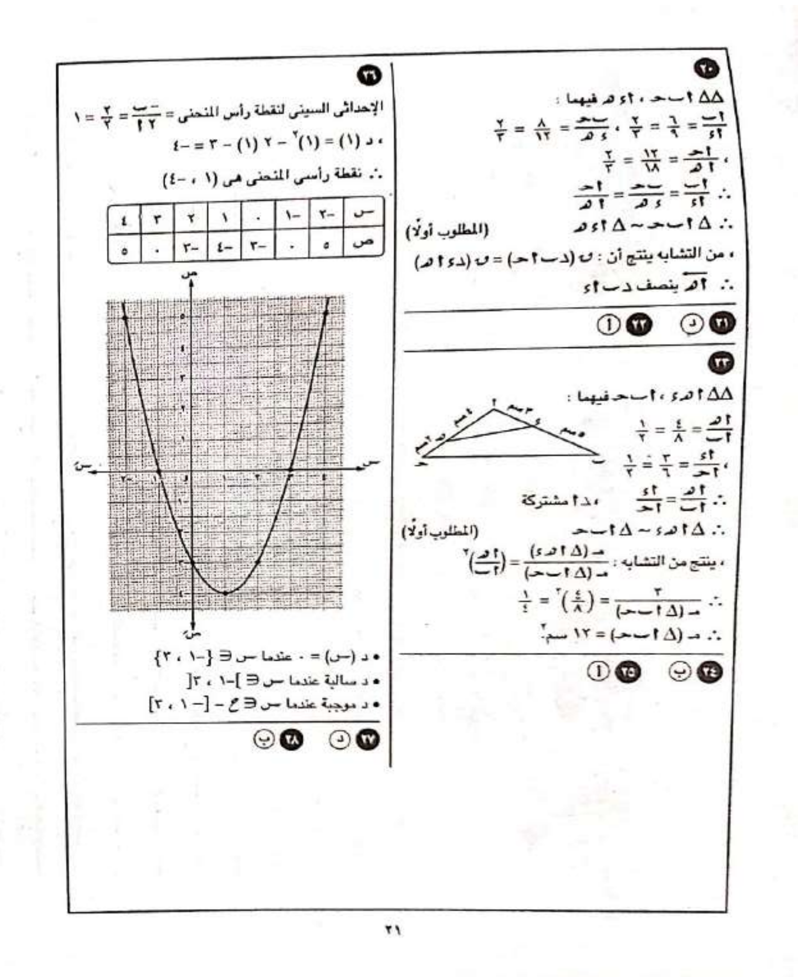
٣٦

الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٢}{٢} = ١$

، د(١) = (١)^٢ − ٢(١) − ٣ = −٤

∴ نقطة رأسي المنحنى هي (١ ، −٤)

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٣}

• د سالبة عندما س ∈]−١ ، ٣[

• د موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٣]

٣٧ (د) **٣٨** (ب)



الفصل الدراسى الأول

الجزء الخاص بالإجابات





إعداد نخبة من خبراء التعليم

1

ثانوى

2020



إرشادات الوحدة الأولى

إرشادات المتطلبات القبلية

١ (١) {-٢}   (٢) ∅   (٣) {-٢ ، ١}

---

٢ (١) (جـ)   (٢) (جـ)   (٣) (د)
(٤) (ب)   (٥) (أ)

٣

(١) ∵ س² − ١ = ٠

∴ (س + ١) (س − ١) = ٠

∴ س = −١ أو س = ١

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ١}

(٢) ∵ س² + ٩ = ٠   ∴ س² = −٩

∴ س = ± √−٩ ∉ ح   ∴ مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ س² + ٣ س = ٠   ∴ س (س + ٣) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٣

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٣}

(٤) ∵ س² − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)² = ٠   ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

٤

(١) ∵ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ١

∴ س = (٦ ± √(٣٦ − ٤ × ١ × ١)) / (٢ × ١) = (٦ ± ٤√٢) / ٢

= ٣ ± ٢√٢

∴ مجموعة الحل = {٥,٨ ، ٠,٢}

(٢) ∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ٥

∴ س = (−٣ ± √(٩ − ٤ × ١ × ٥)) / (٢ × ١) = (−٣ ± √−١١) / ٢

∴ مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٤

∴ س = (−٣ ± √(٩ − ٤ × ٢ × −٤)) / (٢ × ٢) = (−٣ ± √٤١) / ٤

∴ مجموعة الحل = {٠,٩ ، −٢,٤}

(٤) ∵ أ = ٣ ، ب = ٠ ، جـ = −٦٥

∴ س = (± √(−٤ × ٣ × −٦٥)) / (٢ × ٣) = (± √٧٨٠) / ٦

∴ مجموعة الحل = {٤,٧ ، −٤,٧}

(٥) بالضرب × س   ∴ س² − ٣ س − ٥ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −٥

∴ س = (٣ ± √(٩ − ٤ × ١ × −٥)) / (٢ × ١) = (٣ ± √٢٩) / ٢

∴ مجموعة الحل = {٤,٢ ، −١,٢}

(٦) ∵ ٣/(س − ٢) + ٢/(س + ٢) = ٢

∴ (٣ س + ٦ + ٢ س − ٤) / (س² − ٤) = ٢

∴ ٥ س + ٢ = ٢ س² − ٨

∴ ٢ س² − ٥ س − ١٠ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = −٥ ، جـ = −١٠

∴ س = (٥ ± √(٢٥ − ٤ × ٢ × −١٠)) / (٢ × ٢) = (٥ ± √١٠٥) / ٤

∴ مجموعة الحل = {٣,٨ ، −١,٣}

٥

(١) ∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٤

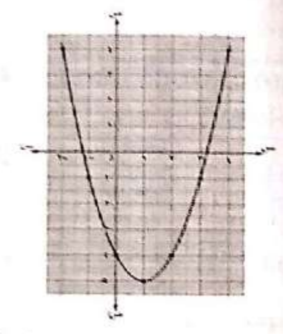
∴ س = (٢ ± √(٤ − ٤ × ١ × −٤)) / (٢ × ١)

= (٢ ± √٢٠) / ٢ = (٢ ± ٢√٥) / ٢ = ١ ± √٥

∴ مجموعة الحل = {−١,٢ ، ٣,٢}

بفرض أن : د (س) = س² − ٢ س − ٤

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٤	−١	−٤	−٥	−٤	−١	٤



من الرسم : مجموعة الحل = {−١,٢ ، ٣,٢} تقريبًا.

(٢) ∵ أ = −١ ، ب = ٣ ، جـ = ٢

∴ س = (−٣ ± √(٩ − ٤ × −١ × ٢)) / (٢ × −١) = (−٣ ± √١٧) / −٢

∴ مجموعة الحل = {−٠,٦ ، ٣,٦}

بفرض أن : د (س) = − س² + ٣ س + ٢

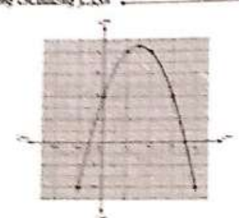
س	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢

∵ الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى

= −ب / ٢ أ = −٣ / (٢ × −١) = ٣/٢ = ١ ١/٢

، د (١ ١/٢) = − (١ ١/٢)² + ٣ × ١ ١/٢ + ٢ = ٤ ١/٤

∴ نقطة رأس المنحنى هي (١ ١/٢ ، ٤ ١/٤)



من الرسم : مجموعة الحل = {−٠,٦ ، ٣,٦} تقريبًا.

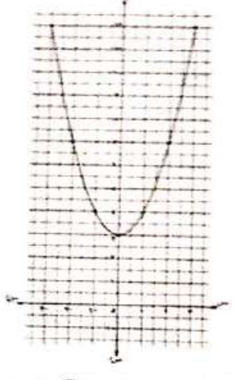
(٣) ∵ أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٣

∴ س = (± √(−٤ × ١ × ٣)) / (٢ × ١) = (± √−١٢) / ٢

∴ مجموعة الحل = ∅

بفرض أن : د (س) = س² + ٣

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅



(٤) ∵ أ = −٢ ، ب = −٤ ، جـ = ١

∴ $\text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times -٢ \times ١}}{٢ \times -٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٦}}{-٢}$

∴ مجموعة الحل = {٢,٠ ، −٢,٢}

بفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = -٢\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١$

∴ نقطة رأس المنحنى هي (−١ ، ٣)

س	−٣	−٢	−١	٠	١
ص	−٥	١	٣	١	−٥

ارسم بنفسك ومن الرسم :

مجموعة الحل = {٢,٠ ، −٢,٢} تقريبًا.

٦

(١) ∵ $٧٨ = \frac{\text{ن}}{٢}(١ + \text{ن})$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٧٨ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ١٥٦ = ٠$

∴ (ن − ١٢) (ن + ١٣) = ٠

∴ ن = ١٢ أ، ن = −١٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٢ عددًا.

(٢) ∵ $١٧١ = \frac{\text{ن}}{٢}(١ + \text{ن})$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ١٧١ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٣٤٢ = ٠$

∴ (ن − ١٨) (ن + ١٩) = ٠

∴ ن = ١٨ أ، ن = −١٩ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٨ عددًا.

(٣) ∵ $٢٥٣ = \frac{\text{ن}}{٢}(١ + \text{ن})$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٢٥٣ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٥٠٦ = ٠$

∴ (ن − ٢٢) (ن + ٢٣) = ٠

∴ ن = ٢٢ أ، ن = −٢٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٢٢ عددًا.

(٤) ∵ $٤٦٥ = \frac{\text{ن}}{٢}(١ + \text{ن})$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٤٦٥ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٩٣٠ = ٠$

∴ (ن − ٣٠) (ن + ٣١) = ٠

∴ ن = ٣٠ أ، ن = −٣١ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٣٠ عددًا.

٧ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (أ) (٥) (أ)
(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (أ)

٨

∵ س = ٢ أحد جذري المعادلة

∴ $٤ - ٤\text{أ} + ٢\text{أ}^٢ - ١٢ = ٠$ ∴ $\text{أ}^٢ - ٢\text{أ} - ٤ = ٠$

∴ $\text{أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

∴ أ = $١ + \sqrt{٥}$ أ، $١ - \sqrt{٥}$

٩

∵ د(٠) = −٣ ∴ جـ = −٣

∴ $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} - ٣$

، ∵ ٣ جذر للمعادلة : د(س) = ٠

∴ ٩أ + ٣ب − ٣ = ٠ ∴ ٣أ + ب = ١ (١)

، ∵ $-\frac{١}{٢}$ جذر للمعادلة : د(س) = ٠

∴ $\frac{١}{٤}\text{أ} - \frac{١}{٢}\text{ب} - ٣ = ٠$ ∴ أ − ٢ب = ١٢ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ب = −٥ ، أ = ٢

إرشادات تمارين 1

١ (١) ١ (٢) −١ (٣) −ت (٤) ت (٥) −١
(٦) ١ (٧) ١ (٨) ت (٩) ت

٢ (١) ١ (٢) −١ (٣) −ت (٤) ت

٣ (١) $\sqrt{١٥}$ ت (٢) ٤ ت (٣) ٦√١−
(٤) ٦ (٥) −١٤ (٦) −١١ ت

٤

(١) ٥ − ٣ ت (٢) ٥ + ٤ ت (٣) ٤

(٤) $٦ + \text{ت} - ١٢\text{ت}^٢ = ١٨ + \text{ت}$

(٥) $١٦ - ٩\text{ت}^٢ = ٢٥$

(٦) $٤ - ٢٠\text{ت} + ٢٥\text{ت}^٢ = -٢١ - ٢٠\text{ت}$

(٧) $٩ - ١٢\text{ت} + ٤\text{ت}^٢ + ٣ + ٢\text{ت} = ٨ - ١٠\text{ت}$

(٨) $[(١ + \text{ت})^٢]^٢ = (١ + ٢\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢ = (٢\text{ت})^٢$

$= ٤\text{ت}^٢ = -٤$

(٩) $[(١ + \text{ت})^٢]^٢ - [(١ - \text{ت})^٢]^٢$

$= (١ + ٢\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢ - (١ - ٢\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢$

$= (٢\text{ت})^٢ - (-٢\text{ت})^٢ = ٤\text{ت}^٢ - ٤\text{ت}^٢ =$ صفر

(١٠) $[(١ - \text{ت})^٢]^٥ = (١ - ٢\text{ت} + \text{ت}^٢)^٥ = (-٢\text{ت})^٥$

$= -٣٢\text{ت}^٥ = -٣٢\text{ت}$

(١١) $(١ - ٢)(٢ + ٣\text{ت} + ٤\text{ت}^٢)$

$= -١(٢ + ٣\text{ت} - ٤) = ٢ - ٣\text{ت}$

٥

(١) $\frac{٤ - ٥\text{ت}}{٧\text{ت}} \times \frac{-٧\text{ت}}{-٧\text{ت}} = \frac{-٢٨\text{ت} + ٣٥\text{ت}^٢}{-٤٩\text{ت}^٢}$

$= -\frac{٥}{٧} - \frac{٤}{٧}\text{ت}$

(٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢\text{ت}} \times \frac{٣ + ٢\text{ت}}{٣ + ٢\text{ت}} = \frac{٧٨ + ٥٢\text{ت}}{٩ - ٤\text{ت}^٢}$

$= \frac{٧٨ + ٥٢\text{ت}}{١٣} = ٦ + ٤\text{ت}$

(٣) $\frac{٢ - ٣\text{ت}}{٣ + \text{ت}} \times \frac{٣ - \text{ت}}{٣ - \text{ت}} = \frac{٦ - ١١\text{ت} + ٣\text{ت}^٢}{٩ - \text{ت}^٢}$

$= \frac{٣}{١٠} - \frac{١١\text{ت}}{١٠}$

(٤) $\frac{٣ + ٤\text{ت}}{٥ - ٢\text{ت}} \times \frac{٥ + ٢\text{ت}}{٥ + ٢\text{ت}} = \frac{١٥ + ٢٦\text{ت} + ٨\text{ت}^٢}{٢٥ - ٤\text{ت}^٢}$

$= \frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦\text{ت}}{٢٩}$

(٥) $\frac{(٢ + ١\text{ت})(١ - \text{ت})}{٢ + \text{ت}} = \frac{٢ + \text{ت} - ٢\text{ت}^٢}{٢ + \text{ت}} = \frac{٣ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}}$

∴ $\frac{٣ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} \times \frac{٢ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}} = \frac{٧ - \text{ت} - \text{ت}^٢}{٤ - \text{ت}^٢}$ [illegible]

$= \frac{١٥ - ٥\text{ت}}{١٠} = \frac{٣}{٢} - \frac{\text{ت}}{٢}$

(٦) $\frac{(٣ - \text{ت})(٣ + \text{ت})}{٣ - ٤\text{ت}} = \frac{٩ - \text{ت}^٢}{٣ - ٤\text{ت}} = \frac{١٠}{٣ - ٤\text{ت}}$

∴ $\frac{١٠}{٣ - ٤\text{ت}} \times \frac{٣ + ٤\text{ت}}{٣ + ٤\text{ت}} = \frac{١٠(٣ + ٤\text{ت})}{٩ - ١٦\text{ت}^٢}$

$= \frac{١٠(٣ + ٤\text{ت})}{٢٥}$

$= \frac{٦}{٥} + \frac{٨\text{ت}}{٥}$

(٧) $\frac{١}{(١ + ٢\text{ت})^٢} = \frac{١}{١ + ٤\text{ت} + ٤\text{ت}^٢} = \frac{١}{-٣ + ٤\text{ت}}$

∴ $\frac{١}{-٣ + ٤\text{ت}} \times \frac{-٣ - ٤\text{ت}}{-٣ - ٤\text{ت}} = \frac{-٣ - ٤\text{ت}}{٩ - ١٦\text{ت}^٢}$

$= -\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤\text{ت}}{٢٥}$

(٨) $\frac{١ + \text{ت} + ٢\text{ت}^٢ + ٢\text{ت}^٣}{١ - \text{ت} + ٢\text{ت}^٢ - ٢\text{ت}^٣} = \frac{-١ - \text{ت}}{-١ - ٢\text{ت}} = \frac{١}{٢}$

(٩) $\frac{\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٦}\,\text{ت}}{\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٦}\,\text{ت}} \times \frac{\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٦}\,\text{ت}}{\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٦}\,\text{ت}}$

$= \frac{٦ + ٨\sqrt{٦}\,\text{ت} + ١١\text{ت}^٢}{٢ - ١٨\text{ت}^٢} = \frac{-٦ + ٨\sqrt{٦}\,\text{ت}}{٢١}$

$= -\frac{٢}{٧} + \frac{٨\sqrt{٦}\,\text{ت}}{٢١}$

٦

(١) ∵ $٣\text{س}^٢ + ١٢ = ٠$ ∴ $٣\text{س}^٢ = -١٢$

∴ $\text{س}^٢ = -٤$ ∴ $\text{س} = \pm\sqrt{-٤}$

∴ $\text{س} = \pm\sqrt{٤\text{ت}^٢}$ ∴ $\text{س} = \pm ٢\text{ت}$

(٢) ∵ $٤\text{س}^٢ + ١٠٠ = ٧٥$ ∴ $٤\text{س}^٢ = -٢٥$

∴ $\text{س}^٢ = -\frac{٢٥}{٤}$ ∴ $\text{س} = \pm\sqrt{-\frac{٢٥}{٤}}$

∴ $\text{س} = \pm\sqrt{\frac{٢٥}{٤}\text{ت}^٢}$ ∴ $\text{س} = \pm\frac{٥}{٢}\text{ت}$



(٣) $\text{س} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}\,\text{ت}}{2} = 2 \pm \text{ت}$

(٤) $\text{س} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{4}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{4}\,\text{ت}}{4} = \frac{-3}{2} \pm \frac{1}{2}\text{ت}$

٧

(١) $\because \text{س} + \text{ص ت} = (3 + 2\text{ت}) + (2 - \text{ت})$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = 5 + \text{ت}$

$\therefore \text{س} = 5 \text{ ، } \text{ص} = 1$

(٢) $\because \text{س} + \text{ص ت} = (2 - 3\text{ت})^2$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = 4 - 12\text{ت} + 9\text{ت}^2$

$= -5 - 12\text{ت}$

$\therefore \text{س} = -5 \text{ ، } \text{ص} = -12$

(٣) $\because 3\text{س} - 2\text{ص ت} = (5 - 2\text{ت})^2$

$\therefore 3\text{س} - 2\text{ص ت} = 25 - 20\text{ت} + 4\text{ت}^2$

$= 21 - 20\text{ت}$

$\therefore 3\text{س} = 21 \qquad \therefore \text{س} = 7$

$\text{،} -2\text{ص} = -20 \qquad \therefore \text{ص} = 10$

(٤) $\because (2\text{س} - 3) + (3\text{ص} + 1)\text{ت} = 7 + 10\text{ت}$

$\therefore 2\text{س} - 3 = 7 \qquad \therefore 2\text{س} = 10$

$\therefore \text{س} = 5 \text{ ، } 3\text{ص} + 1 = 10$

$\therefore 3\text{ص} = 9 \qquad \therefore \text{ص} = 3$

(٥) $\because (2\text{س} - \text{ص}) + (\text{س} - 2\text{ص})\text{ت} = 5 + \text{ت}$

$\therefore 2\text{س} - \text{ص} = 5 \quad (1) \text{ ، } \text{س} - 2\text{ص} = 1 \quad (2)$

بضرب (١) × −٢ :

$\therefore -4\text{س} + 2\text{ص} = -10 \quad (3)$

بجمع (٢) ، (٣) : $\therefore -3\text{س} = -9$

$\therefore \text{س} = 3 \qquad \therefore \text{ص} = 1$

(٦) $\because 3\text{س} + \text{س ت} - 2\text{ص} + \text{ص ت} = 5$

$\therefore (3\text{س} - 2\text{ص}) + (\text{س} + \text{ص})\text{ت} = 5$

$\therefore 3\text{س} - 2\text{ص} = 5 \quad (1) \text{ ، } \text{س} + \text{ص} = 0 \quad (2)$

بضرب (٢) × ٢ : $\therefore 2\text{س} + 2\text{ص} = 0 \quad (3)$

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore 5\text{س} = 5$

$\therefore \text{س} = 1 \qquad \therefore \text{ص} = -1$

(٧) $\because \text{س}^2 - \text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ص})\text{ت} = 4\text{ت}$

$\therefore \text{س} + \text{ص} = 4 \text{ ، } \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 0$

$\therefore (\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = 0$

$\therefore 4(\text{س} - \text{ص}) = 0 \qquad \therefore \text{س} = \text{ص} = 2$

٨

(١) الطرف الأيمن $= \frac{10}{2 + \text{ت}} \times \frac{2 - \text{ت}}{2 - \text{ت}}$

$= \frac{10(2 - \text{ت})}{4 - \text{ت}^2} = \frac{10(2 - \text{ت})}{5}$

$= 4 - 2\text{ت}$

$\therefore 4 - 2\text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = 4 \text{ ، } \text{ص} = -2$

(٢) الطرف الأيمن $= \frac{6 - 4\text{ت}}{1 - \text{ت}} \times \frac{1 + \text{ت}}{1 + \text{ت}}$

$= \frac{6 + 2\text{ت} - 4\text{ت}^2}{1 - \text{ت}^2} = \frac{10 + 2\text{ت}}{2}$

$= 5 + \text{ت}$

$\therefore 5 + \text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = 5 \text{ ، } \text{ص} = 1$

(٣) الطرف الأيمن $= \frac{(2 + \text{ت})(2 - \text{ت})}{3 + 4\text{ت}}$

$= \frac{4 - \text{ت}^2}{3 + 4\text{ت}} = \frac{5}{3 + 4\text{ت}}$

بالضرب × مرافق المقام

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \frac{5}{3 + 4\text{ت}} \times \frac{3 - 4\text{ت}}{3 - 4\text{ت}}$

$= \frac{5(3 - 4\text{ت})}{9 - 16\text{ت}^2} = \frac{5(3 - 4\text{ت})}{25}$

$= \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\text{ت}$

$\therefore \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = \frac{3}{5} \text{ ، } \text{ص} = \frac{-4}{5}$

٩

$\because \text{س} = \frac{13}{5 - \text{ت}} \times \frac{5 + \text{ت}}{5 + \text{ت}} = \frac{13(5 + \text{ت})}{25 - \text{ت}^2}$

$= \frac{13(5 + \text{ت})}{26} = \frac{5}{2} + \frac{\text{ت}}{2}$

$\text{، ص} = \frac{3 + 2\text{ت}}{1 + \text{ت}} \times \frac{1 - \text{ت}}{1 - \text{ت}} = \frac{3 - \text{ت} - 2\text{ت}^2}{1 - \text{ت}^2}$

$= \frac{5}{2} - \frac{\text{ت}}{2}$

∴ س ، ص عددان مترافقان.

١٠

الطرف الأيسر $= \frac{2 + \text{ت}}{2 - \text{ت}} \times \frac{2 + \text{ت}}{2 + \text{ت}} = \frac{4 + 4\text{ت} + \text{ت}^2}{4 - \text{ت}^2}$

$= \frac{3 + 4\text{ت}}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{ت}$

$\therefore \text{أ} + \text{ب ت} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{ت} \qquad \therefore \text{أ} = \frac{3}{5} \text{ ، } \text{ب} = \frac{4}{5}$

$\therefore \text{أ}^2 + \text{ب}^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

١١

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ)

(٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (جـ)

(٧) (ب) (٨) (أ) (٩) (ب)

١٢

إجابة أحمد هى الصحيحة لأن طريقة فك كريم للقوس $(2 + 3\text{ت})^2$ خطأ

١٣

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (أ)

(٩) (جـ) (١٠) (جـ) (١١) (جـ) (١٢) (د)

(١٣) (د)

إرشادات لحل رقم **١٣**

(١) ∵ ل جذر من جذور المعادلة $\text{س}^2 + 1 = 0$

$\therefore \text{ل}^2 + 1 = 0 \qquad \text{ل}^2 = -1$

$\therefore \text{ل}^{2018} = (\text{ل}^2)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$

بالمثل $\text{م}^{2018} = -1$

$\therefore \text{ل}^{2018} + \text{م}^{2018} = (-1) + (-1) = -2$

(٢) $(1 + \text{ت})^{2020} = \left[(1 + \text{ت})^2\right]^{1010} = (2\text{ت})^{1010}$

$\text{،} (1 - \text{ت})^{2020} = \left[(1 - \text{ت})^2\right]^{1010}$

$= (-2\text{ت})^{1010} = (2\text{ت})^{1010}$

$\therefore (1 + \text{ت})^{2020} = (1 - \text{ت})^{2020}$

(٣) $\left(\frac{1 - \text{ت}}{1 + \text{ت}}\right)^{100} = \left(\frac{(1 - \text{ت})^2}{(1 + \text{ت})^2}\right)^{50} = \left(\frac{-2\text{ت}}{2\text{ت}}\right)^{50} = 1$

(٤) $(2 + \text{ت})^{-1} = \frac{1}{2 + \text{ت}} \times \frac{2 - \text{ت}}{2 - \text{ت}}$

$= \frac{2 - \text{ت}}{4 + 1} = \frac{2 - \text{ت}}{5}$

∴ مرافق العدد $(2 + \text{ت})^{-1}$ هو $\frac{2 + \text{ت}}{5}$

(٥) $\text{س}^2 + 4 = \text{س}^2 - 4\text{ت}^2$

$= (\text{س} - 2\text{ت})(\text{س} + 2\text{ت})$

(٦) $\because (\text{س} + 2) + 4\text{ص ت} = 3 - 4\text{ت}$

$\therefore \text{س} + 2 = 3 \qquad \therefore \text{س} = 1$

$\text{،} 4\text{ص} = -4 \qquad \therefore \text{ص} = -1$

(٧) $\frac{1 + \text{ت}}{1 - \text{ت}} \times \frac{1 + \text{ت}}{1 + \text{ت}} = \frac{1 + 2\text{ت} + \text{ت}^2}{1 - \text{ت}^2}$

$= \frac{1 + 2\text{ت} - 1}{1 - (-1)} = \text{ت}$

$\therefore \left(\frac{1 + \text{ت}}{1 - \text{ت}}\right)^{\text{ن}} = (\text{ت})^{\text{ن}}$

∴ أصغر عدد صحيح موجب يجعل $(\text{ت})^{\text{ن}} = 1$ هو ٤

(٨) ∵ أ ، ب ، جـ ، د هى أعداد صحيحة موجبة متتالية

$\therefore \text{ب} = \text{أ} + 1 \text{ ، } \text{جـ} = \text{أ} + 2 \text{ ، } \text{د} = \text{أ} + 3$

$\therefore \text{ت}^{\text{أ}} + \text{ت}^{\text{ب}} + \text{ت}^{\text{جـ}} + \text{ت}^{\text{د}}$

$= \text{ت}^{\text{أ}} + \text{ت}^{\text{أ}+1} + \text{ت}^{\text{أ}+2} + \text{ت}^{\text{أ}+3}$

$= \text{ت}^{\text{أ}}(1 + \text{ت} + \text{ت}^2 + \text{ت}^3)$

$= \text{ت}^{\text{أ}}(1 + \text{ت} - 1 - \text{ت})$

$= \text{ت}^{\text{أ}} \times$ صفر = صفر

(٩) $ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + \dots + ت^{١٠٠}$

$= ت - ١ - ت + ١ + \dots + ت^{١٠٠}$

(مجموع كل أربع حدود متتالية = صفر)

∴ المجموع الكلى = صفر

(١٠) $(١ + ت)(١ + ت^٢)(١ + ت^٣)(١ + ت^٤)$

$\dots (١ + ت^{١٠٠})$

، ∵ $(١ + ت^٢) = (١ - ١) =$ صفر

∴ ناتج الضرب $(١ + ت)$ (صفر) $(١ + ت^٣)$

$(١ + ت^٤) \dots (١ + ت^{١٠٠}) =$ صفر

(١١) ∵ $ت = ت^م$ ∴ ليس بالضرورة م = ن

، $ت^م = ت^ن$

∴ $ت^م = ت^{ن + ٤ك}$ حيث ك عدد صحيح

∴ م = ن + ٤ ك ∴ م − ن = ٤ ك

∴ م − ن مضاعف لـ ٤

، ∵ $ت^م × ت^ن = ت^ن × ت^ن$

∴ $ت^{م + ن} = ت^{٢ن + ٤ك}$

∴ م + ن = ٢ن + ٤ ك

∴ م + ن = ٢ (ن + ٢ ك) عدد زوجى

(١٢) ∵ أ < ب < ٠

∴ أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

∴ $\sqrt{أب}$ عدد حقيقى

، ∵ جـ > ٠

∴ ب جـ < ٠ ، ب أ > ٠

∴ $\sqrt{ب(جـ - أ)} = \sqrt{ب جـ - ب أ}$ عدد تخيلى

∴ $\sqrt{أب} = ٢$ ∴ أ ب = ٤

، $\sqrt{ب جـ - ب أ} = ٣ ت$

∴ ب جـ − ب أ = −٩

∴ ب جـ − ٤ = −٩ ∴ ب جـ = −٥

(١٣) ∵ لا يوجد ترتيب فى مجموعة الأعداد المركبة غير الحقيقية.

∴ الاختيار الصحيح هو (د)

١٤

∵ ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

$= س ص - س ت + ٣ ص ت - ٣ ت^٢ - ٩$

= س ص − س ت + ٣ ص ت − ٦

= (س ص − ٦) + (−س + ٣ ص) ت

∴ س ص − ٦ = ٠ ∴ س ص = ٦

، −س + ٣ ص = ٧ ∴ س = ٣ ص − ٧

∴ ص (٣ ص − ٧) = ٦ ∴ $٣ ص^٢ - ٧ ص = ٦$

∴ $٣ ص^٢ - ٧ ص - ٦ = ٠$

∴ (ص − ٣) (٣ ص + ٢) = ٠

∴ ص = ٣ ∴ س = ٢

أ، ص = $-\frac{٢}{٣}$ ∴ س = −٩

١٥

$س = \frac{٢ + ت}{٢ - ت} × \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{٤ + ٤ ت + ت^٢}{٤ - ت^٢}$

$= \frac{٣ + ٤ ت}{٥} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$

، $ص = \frac{٢ + ٣ ت}{٢ + ت} × \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٤ + ٤ ت - ٣ ت^٢}{٤ - ت^٢}$

$= \frac{٧ + ٤ ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$

، ∵ ٢ س − ص = أ + ب ت

∴ $\frac{٦}{٥} + \frac{٨}{٥} ت - \frac{٧}{٥} - \frac{٤}{٥} ت = أ + ب ت$

∴ $-\frac{١}{٥} + \frac{٤}{٥} ت = أ + ب ت$

∴ $أ = -\frac{١}{٥}$ ، $ب = \frac{٤}{٥}$

∴ $٩ أ^٢ + ب^٢ = ٩ \left(-\frac{١}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢ = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$

إرشادات تمارين 2

١

(١) المميز = $(-٢)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = -١٦ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقين.

(٢) المميز = $(-١١)^٢ - ٤ × ١ × ١٠ = ٨١ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٣) المميز = $(-١٠)^٢ - ٤ × ١ × ٢٥ = ٠$

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٤) المميز = $(-١٤)^٢ - ٤ × ٤٩ × ١ = ٠$

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٥) المميز = $(٥)^٢ - ٤ × (-١) × (-٣٠) = -٩٥ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقين.

(٦) المميز = $(-٧)^٢ - ٤ × ٢ × ٠ = ٤٩ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

٢

(١) ∵ $س^٢ - ٢ س = ٥$ ∴ $س^٢ - ٢ س - ٥ = ٠$

∴ المميز = $(-٢)^٢ - ٤ × ١ × -٥ = ٢٤ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٢) ∵ $٦ س^٢ - ١٩ س + ١٥ = ٠$

∴ المميز = $(-١٩)^٢ - ٤ × ٦ × ١٥ = ١ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٣) ∵ $س - ١١ - س^٢ + ٦ س = ٠$

∴ $س^٢ - ٧ س + ١١ = ٠$

∴ المميز = $(-٧)^٢ - ٤ × ١ × ١١ = ٥ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٤) ∵ $س^٢ + ٤ س + ٤ + ٥ = ٠$

∴ $س^٢ + ٤ س + ٩ = ٠$

∴ المميز = $(٤)^٢ - ٤ × ١ × ٩ = -٢٠ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقين.

(٥) ∵ $س + \frac{٩}{س} = ٦$ بالضرب × س

∴ $س^٢ + ٩ = ٦ س$

∴ $س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠$

∴ المميز = $(-٦)^٢ - ٤ × ١ × ٩ = ٠$

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٦) ∵ $س - \frac{٢}{س - ١} = ٤$ بالضرب × (س − ١)

∴ $س^٢ - س - ٢ = ٤ س - ٤$

∴ $س^٢ - ٥ س + ٢ = ٠$

∴ المميز = $(-٥)^٢ - ٤ × ١ × ٢ = ١٧ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٧) ∵ $\frac{س}{س + ١} + \frac{س}{س - ١} = ٣$

∴ $\frac{س^٢ - س + س^٢ + س}{(س + ١)(س - ١)} = ٣$

∴ $\frac{٢ س^٢}{س^٢ - ١} = ٣$ ∴ $٢ س^٢ = ٣ س^٢ - ٣$

∴ $س^٢ - ٣ = ٠$

∴ المميز = $(٠)^٢ - ٤ × ١ × -٣ = ١٢ > ٠$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٨) ∵ (س − ١) (س − ٧) = ٢ (س − ٣) (س − ٤)

∴ $س^٢ - ٨ س + ٧ = ٢ س^٢ - ١٤ س + ٢٤$

∴ $س^٢ - ٦ س + ١٧ = ٠$

∴ المميز = $(-٦)^٢ - ٤ × ١ × ١٧ = -٣٢ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

٣

∵ المميز = $(-٣)^٢ - ٤ × ٢ × ٢ = -٧ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧} ت}{٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{٣ + \sqrt{٧} ت}{٤}$ ، $\frac{٣ - \sqrt{٧} ت}{٤}$



٤

(١) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(-٦)^{٢}$ − ٤ × ٣ × ك = ٠

∴ ١٢ ك = ٣٦ ∴ ك = ٣

(٢) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(-ك)^{٢}$ − ٤ × ١٨ × ٨ = ٠

∴ $ك^{٢}$ = ٥٧٦ ∴ ك = ± ٢٤

(٣) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(٥)^{٢}$ − ٤ × ٢ × ٤ ك = ٠

∴ ٣٢ ك = ٢٥ ∴ ك = $\frac{٢٥}{٣٢}$

(٤) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(٧ ك)^{٢}$ − ٤ × ٧٥ × ٣ = ٠

∴ ٤٩ $ك^{٢}$ = ٩٠٠ ∴ ك = ± $\frac{٣٠}{٧}$

(٥) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(-٣)^{٢}$ − ٤ × ١ × $\left(٢ + \frac{١}{ك}\right)$ = ٠

∴ ٨ + $\frac{٤}{ك}$ = ٩ ∴ $\frac{٤}{ك}$ = ١

∴ ك = ٤

(٦) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = صفر

∴ $(٢ ك + ٣)^{٢}$ − ٤ × ١ × $ك^{٢}$ = ٠

∴ ~~٤ $ك^{٢}$~~ + ١٢ ك + ٩ − ~~٤ $ك^{٢}$~~ = ٠

∴ ك = $\frac{-٣}{٤}$

(٧) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $[٢ (ك - ١)]^{٢}$ − ٤ × ١ × (٢ ك + ١) = ٠

∴ ٤ $ك^{٢}$ − ٨ ك + ٤ − ٨ ك − ٤ = ٠

∴ ٤ $ك^{٢}$ − ١٦ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ٤) = ٠

∴ ك = ٠ ، أ، ك = ٤

، ∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{-٢ ك + ٢ \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٢ ك + ٢}{٢}$ = − ك + ١

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ١

، عندما ك = ٤

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى −٣

(٨) المعادلة هى :

$س^{٢}$ − (٢ ك + ٦) س + (٧ ك + ٩) = ٠

∵ الجذرين متساويان ∴ المميز = ٠

∴ $(٢ ك + ٦)^{٢}$ − ٤ × ١ × (٧ ك + ٩) = ٠

∴ ٤ $ك^{٢}$ + ٢٤ ك + ٣٦ − ٢٨ ك − ٣٦ = ٠

∴ ٤ $ك^{٢}$ − ٤ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ١) = ٠

∴ ك = ٠ ، أ، ك = ١

∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{(٢ ك + ٦) \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = ك + ٣

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٣

، عندما ك = ١

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٤

٥

(١) ∵ الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

∴ $(٤)^{٢}$ − ٤ × ١ × ك > ٠

∴ ٤ ك < ١٦ ∴ ك < ٤

∴ ك ∈]−∞ ، ٤[

(٢) ∵ الجذران مركبان وغير حقيقيين. ∴ المميز < ٠

∴ $(-٨)^{٢}$ − ٤ × ك × ١٦ < ٠

∴ ٦٤ ك > ٦٤ ∴ ك > ١

∴ ك ∈]١ ، ∞[

(٣) ∵ $س^{٢}$ − ك − ٢ = ٠

، الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

∴ −٤ × ١ × (− ك − ٢) > ٠

∴ ٤ ك + ٨ > ٠ ∴ ك > −٢

∴ ك ∈]−٢ ، ∞[

٦

∵ المميز = $(-٢ م)^{٢}$ − ٤ × (م − ١) × م

= ٤ $م^{٢}$ − ٤ $م^{٢}$ + ٤ م = ٤ م

، ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ ٤ م < ٠ ∴ م < ٠ ∴ م ∈]−∞ ، ٠[

٧

(١) ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = $(-٣)^{٢}$ − ٤ × ٢ × −٢

= ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان

- التحقق الجبرى : ∵ ٢ $س^{٢}$ − ٣ س − ٢ = ٠

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٤}$

∴ الجذران هما ٢ ، −$\frac{١}{٢}$ (نسبيان)

(٢) ∵ أحد المعاملات ليس عددًا نسبيًا

، المميز = $(\sqrt{٥})^{٢}$ − ٤ × ١ × −٥ = ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

- التحقق الجبرى : ∵ $س^{٢}$ + $\sqrt{٥}$ س − ٥ = ٠

∴ س = $\frac{-\sqrt{٥} \pm \sqrt{٢٥}}{٢}$ = $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ ، أ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

(٣) ∵ ٢ س + ٦ + $س^{٢}$ − س = ٩

∴ $س^{٢}$ + س − ٣ = ٠

، ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = $(١)^{٢}$ −٤ × ١ × −٣ = ١٣ (ليس مربعًا كاملاً)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

- التحقق الجبرى : ∵ $س^{٢}$ + س − ٣ = ٠

∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{-١ + \sqrt{١٣}}{٢}$ ، $\frac{-١ - \sqrt{١٣}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

٨

∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = $ب^{٢}$ − ٤ × أ × (ب − أ)

= $ب^{٢}$ − ٤ أ ب + ٤ $أ^{٢}$

= $(ب - ٢ أ)^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

٩

∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = $(ل - م)^{٢}$ − ٤ × ل × − م

∴ $ل^{٢}$ − ٢ ل م + ٤ ل م + $م^{٢}$

= $ل^{٢}$ + ٢ ل م + $م^{٢}$ = $(ل + م)^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

١٠

∵ $س^{٢}$ + ك س + ك − ١ = ٠

∴ المعاملات نسبية ، المميز = $ك^{٢}$ − ٤ × ١ × (ك − ١)

= $ك^{٢}$ − ٤ ك + ٤

= $(ك - ٢)^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

١١

∵ المعاملات نسبية

، المميز = $(-٢ أ^{٣})^{٢}$ − ٤ × ١ × ($أ^{٦}$ − $ب^{٦}$)

= ٤ $أ^{٦}$ − ٤ $أ^{٦}$ + ٤ $ب^{٦}$

= ٤ $ب^{٦}$ = $(٢ ب^{٣})^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

١٢

المميز = (٢ أ + ٣)^{٢} − ٤ × (أ + ٢) × (أ − ١)

= ٤ أ^{٢} + ١٢ أ + ٩ − ٤ (أ^{٢} + أ − ٢)

= ٤ أ^{٢} + ١٢ أ + ٩ − ٤ أ^{٢} − ٤ أ + ٨ = ٨ أ + ١٧

، ∵ الجذرين حقيقيان ∴ ٨ أ + ١٧ ≥ ٠

∴ أ ≥ $-\frac{١٧}{٨}$ ∴ أ ∈ [$-\frac{١٧}{٨}$ ، ∞[

١٣

∵ المميز = (−٢ أ^{٣})^{٢} − ٤ (أ^{٢} + ١) × أ^{٤}

= ٤ أ^{٦} − ٤ أ^{٦} − ٤ أ^{٤} = −٤ أ^{٤}

، ∵ أ^{٤} عدد موجب لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر

∴ −٤ أ^{٤} يكون عددًا سالبًا

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر.

١٤

∵ (س − أ) (س − ب) = ٥

∴ س^{٢} − (أ + ب) س + أ ب − ٥ = ٠

∴ المميز = (أ + ب)^{٢} − ٤ × ١ × (أ ب − ٥)

= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} − ٤ أ ب + ٢٠

= أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢} + ٢٠ = (أ − ب)^{٢} + ٢٠

«مقدار موجب دائمًا لكل قيم أ ، ب الحقيقية»

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

١٥

المميز = (−أ)^{٢} − ٤ × (أ − ١) × ١

= أ^{٢} − ٤ أ + ٤ = (أ − ٢)^{٢}

، ∵ أ ≠ ٢ ∴ (أ − ٢)^{٢} > ٠ لكل قيم أ

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

١٦ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (د) (٧) (جـ)

إرشادات لحل رقم **١٦**

(١) ∵ المميز = (−٢ $\sqrt{٥}$)^{٢} − ٤ (١) (١) = ٢٠ − ٤ = ١٦

∴ الجذران حقيقيان.

، ∵ معامل س ليس عددًا نسبيًا.

∴ الجذران حقيقيان ولكن غير نسبيين.

(٢) ∵ (ب^{٢} − ٤ أ حـ) غير موجب.

∴ (ب^{٢} − ٤ أ حـ) أما أن تكون سالبة فيكون جذرى المعادلة مركبين مترافقين

وأما (ب^{٢} − ٤ أ حـ) = صفر

∴ الجذران حقيقيين متساويين.

، ∵ أ ، ب ، حـ ∈ ع

∴ الجذران مركبان مترافقان.

(٣) ∵ الجذران حقيقيان مختلفان.

∴ المميز > ٠ ∴ −٤ أ ب > ٠

∴ أ ب < ٠

(٤) ∵ أ + ب + حـ = ٠

∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

(−٢ أ) س^{٢} − ٢ ب س − ٢ حـ = ٠

∴ أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

، المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (− أ − حـ)^{٢} − ٤ أ حـ

= أ^{٢} + ٢ أ حـ + حـ^{٢} − ٤ أ حـ

= أ^{٢} − ٢ أ حـ + حـ^{٢} = (أ − حـ)^{٢}

، ∵ أ ≠ حـ ∴ (أ − حـ)^{٢} > صفر

∵ جذرى المعادلة حقيقيان مختلفان.

، ∵ أ ، ب ، حـ ∈ ص

∴ الجذران حقيقيان مختلفان نسبيان.

(٥) • س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

المميز : (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × −٥ = ٣٦ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• $\sqrt{٣}$ س^{٢} + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠

المميز : ٥ − ٤ $\sqrt{٣}$ × −١ = ٥ + ٤ $\sqrt{٣}$ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• س^{٢} − ٣ $\sqrt{٢}$ س + ٤ = ٠

المميز : (−٣ $\sqrt{٢}$)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = ٢ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• ٣ س^{٢} − $\sqrt{٧}$ س + ٥ = ٠

المميز : ٧ − ٤ × ٣ × ٥ = −٥٣ < ٠

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية.

، المميز سالب.

∴ الجذران مركبان مترافقان وغير حقيقيين.

(٦) ∵ الجذران مركبان مترافقان

∴ المميز ≤ صفر

∴ (−٢ $\sqrt{٢}$)^{٢} − ٤ × ١ × أ ≤ ٠

∴ −٤ أ ≤ −٨ ∴ أ ≥ ٢

∴ أ ∈ [٢ ، ∞[

(٧) ∵ جذرى المعادلة ينتميان للفترة]−١ ، ١[

∴ $\frac{٢ + \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ (٤) م}}{٢ (٤)}$ < ١

∴ ٢ + $\sqrt{٤ - ١٦ م}$ < ٨ ∴ $\sqrt{٤ - ١٦ م}$ < ٦

∴ ٠ ≤ ٤ − ١٦ م < ٣٦

∴ −٤ ≤ − ١٦ م < ٣٢

∴ $\frac{-٤}{-١٦}$ ≥ م > $\frac{٣٢}{-١٦}$ ∴ −٢ < م ≤ $\frac{١}{٤}$

١٧

المميز = (٢ أ)^{٢} − ٤ × ١ × (أ^{٢} − ب^{٢} − حـ^{٢})

= ٤ أ^{٢} − ٤ أ^{٢} + ٤ ب^{٢} + ٤ حـ^{٢}

= ٤ (ب^{٢} + حـ^{٢}) ≥ صفر (لأى ب ، حـ حقيقيين)

∴ الجذران حقيقيان.

١٨

∵ $\frac{١}{س + أ}$ = $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{أ}$ ∴ $\frac{١}{س + أ}$ = $\frac{س + أ}{أ س}$

∴ (س + أ)^{٢} − أ س = ٠

∴ س^{٢} + ٢ أ س + أ^{٢} − أ س = ٠

∴ س^{٢} + أ س + أ^{٢} = ٠

∴ المميز = أ^{٢} − ٤ × ١ × أ^{٢}

= −٣ أ^{٢} < صفر لكل أ ∈ ع*

∴ جذرا المعادلة غير حقيقيين.

إرشادات تمارين 3

١

(١) −٣ ، −١٠ (٢) ٥ ، ٦ (٣) −١ ، $\frac{-٣٥}{٤}$

(٤) $\frac{٧}{٢}$ ، −٣ (٥) ٠ ، $\frac{-٤}{٣}$ (٦) ٣ ، ٠

(٧) ∵ ٣ س^{٢} − ٣٢ س + ٣٠ = ٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{٣٢}{٣}$ ، حاصل ضربهما = ١٠

(٨) ∵ ٤ س^{٢} + ٢٥ س + ٦ = ٣ س^{٢} − ١٠ س + ٨

∴ س^{٢} + ٣٥ س − ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = −٣٥

، حاصل ضربهما = −٢

(٩) بضرب الطرفين فى م. م. أ المقامات وهو ٢ س

∴ س^{٢} + ٢ = ٣ س ∴ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضربهما = ٢

(١٠) ∵ (٢ س + ٢) (س − ١) = (س + ١) (س + ٢)

∴ ٢ س^{٢} − س − ٢ = س^{٢} + ٣ س + ٢

∴ ٢ س^{٢} − ٤ س − ٤ = ٠

∴ س^{٢} − ٢ س − ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = −٢

(١١) ∵ (أ − ١) س^{٢} + (١ − أ^{٢}) س + أ − ١ = ٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-(١-\text{أ}^٢)}{\text{أ}-١} = \frac{\text{أ}^٢-١}{\text{أ}-١}$

$= \frac{(\text{أ}-١)(\text{أ}+١)}{\text{أ}-١} = \text{أ}+١$

، حاصل ضربهما = $\frac{\text{أ}-١}{\text{أ}-١} = ١$

(٢) مجموع الجذرين = $\frac{-(\text{أ}^٢-\text{ب}^٢)}{\text{أ}+\text{ب}}$

$= \frac{-(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})}{\text{أ}+\text{ب}} = -(\text{أ}-\text{ب})$

، حاصل ضربهما

$= \frac{\text{أ}^٢+٢\text{أ}\text{ب}+\text{ب}^٢}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{(\text{أ}+\text{ب})^٢}{\text{أ}+\text{ب}} = \text{أ}+\text{ب}$

٢

(١) (جـ)　(٢) (ب)　(٣) (جـ)

(٤) (أ)　(٥) (جـ)　(٦) (جـ)

(٧) (د)　(٨) (جـ)　(٩) (أ)

٣

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

∴ $\frac{-\text{جـ}}{٣} = \frac{-٨}{٣}$　∴ جـ = ٨

∴ $٣\text{س}^٢ + ١٠\text{س} - ٨ = ٠$

∴ $(٣\text{س} - ٢)(\text{س} + ٤) = ٠$

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أو س = -٤

٤

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$　∴ $\frac{-\text{ب}}{٢} = -\frac{٣}{٢}$

∴ ب = ٣　∴ $٢\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٥ = ٠$

∴ $(٢\text{س} + ٥)(\text{س} - ١) = ٠$

∴ س = $\frac{-٥}{٢}$ أو س = ١

٥

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = ٢$

∴ -١ + الجذر الأخر = ٢　∴ الجذر الاخر = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \text{أ}$

∴ $-١ \times ٣ = \text{أ}$　∴ أ = -٣

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ × الجذر الأخر = $\frac{٣}{٢}$　∴ الجذر الاخر = ٣

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{\text{أ}}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} + ٣ = \frac{\text{أ}}{٢}$　∴ أ = ٧

(٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = ٢$

∴ (١ + ت) + الجذر الآخر = ٢

∴ الجذر الآخر = ١ − ت

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \text{أ}$

∴ $(١ + \text{ت})(١ - \text{ت}) = \text{أ}$

∴ $١ - \text{ت}^٢ = \text{أ}$　∴ أ = ٢

(٤) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = ٥$

∴ (٢ + ت) × الجذر الآخر = ٥

∴ الجذر الآخر = ٢ − ت

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -\text{أ}$

∴ $(٢ + \text{ت}) + (٢ - \text{ت}) = -\text{أ}$

∴ أ = -٤

٦

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -\text{أ}$

∴ $٢ + ٥ = -\text{أ}$　∴ أ = -٧

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \text{ب}$

∴ $٢ \times ٥ = \text{ب}$　∴ ب = ١٠

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-٢١}{\text{أ}}$

∴ $-٣ \times ٧ = \frac{-٢١}{\text{أ}}$　∴ أ = ١

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \text{ب}$

∴ $-٣ + ٧ = \text{ب}$　∴ ب = ٤

(٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{١}{\text{أ}}$

∴ $-١ + \frac{٣}{٢} = \frac{١}{\text{أ}}$　∴ أ = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{\text{ب}}{٢}$

∴ $-١ \times \frac{٣}{٢} = \frac{\text{ب}}{٢}$　∴ ب = -٣

(٤) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -\text{أ}$

∴ $\sqrt{٣}\,\text{ت} + (-\sqrt{٣}\,\text{ت}) = -\text{أ}$　∴ أ = ٠

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \text{ب}$

∴ $\sqrt{٣}\,\text{ت} \times (-\sqrt{٣}\,\text{ت}) = \text{ب}$　∴ ب = ٣

٧

(١) ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

∴ ك − ١ = ٠　∴ ك = ١

(٢) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ ك − ٢ = -٤　∴ ك = -٢

(٣) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ $٤\text{ك} = \text{ك}^٢ + ٤$　∴ $\text{ك}^٢ - ٤\text{ك} + ٤ = ٠$

∴ $(\text{ك} - ٢)^٢ = ٠$　∴ ك = ٢

(٤) ∵ $٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ك}^٢ - ٢ = ٠$

، ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ $\text{ك}^٢ - ٢ = ٢$　∴ ك = ± ٢

٨

بفرض أن الجذرين هما : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = ٣ ل = ٣　∴ ل = ١

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ = جـ　∴ جـ = ٢

٩

بفرض أن أحد الجذرين = ل　∴ الجذر الآخر = -٢ ل

∴ حاصل ضرب الجذرين = $-٢\text{ل}^٢$

∴ $-٩٨ = -٢\text{ل}^٢$　∴ $\text{ل}^٢ = ٤٩$　∴ ل = ± ٧

، ∵ مجموع الجذرين = $-\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$

∴ ل − ٢ ل = − ك　∴ − ل = − ك

∴ ل = ك　∴ ك = ± ٧

١٠

نفرض أن أحد الجذرين = ل　∴ الجذر الآخر = ل + ١

∴ ل + ل + ١ = ٥　∴ ل = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = م

∴ ل (ل + ١) = م وبالتعويض عن ل = ٢

∴ ٢ × ٣ = م　∴ م = ٦

١١

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = ٢ ل + ١

∴ ل (٢ ل + ١) = ٢١　∴ $٢\text{ل}^٢ + \text{ل} - ٢١ = ٠$

∴ (٢ ل + ٧) (ل − ٣) = ٠

∴ ل = $\frac{-٧}{٢}$ أو ل = ٣

، ∵ ل + (٢ ل + ١) = أ　∴ ٣ ل + ١ = أ

∴ أ = $-٩٫٥$ أو أ = ١٠

١٢

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-(\text{أ} - ٣)}{\text{أ} - ٢}$

∴ $٣ = \frac{-\text{أ} + ٣}{\text{أ} - ٢}$

∴ $٣\text{أ} - ٦ = -\text{أ} + ٣$　∴ أ = $\frac{٩}{٤}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-٤}{\text{أ} - ٢}$

∴ $-٤ = \frac{-٤}{\text{أ} - ٢}$　∴ أ = ٣

١٣

(١) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{٣ - \text{ك}}{\text{ك} - ٤} = ٥$

$\therefore ٣ - \text{ك} = ٥\text{ك} - ٢٠$

$\therefore ٦\text{ك} = ٢٣ \qquad \therefore \text{ك} = \frac{٢٣}{٦}$

(٢) $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{-٣}{\text{ك} - ٤} = -٣$

$\therefore \text{ك} - ٤ = ١ \qquad \therefore \text{ك} = ٥$

(٣) $\because$ مجموع الجذرين $= ٠ \qquad \therefore ٣ - \text{ك} = ٠$

$\therefore \text{ك} = ٣$

(٤) $\because$ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

$\therefore -٣ = \text{ك} - ٤ \qquad \therefore \text{ك} = ١$

١٤

بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{\text{ك} - ١}{٢} = ٣\text{ل}$

$\therefore \text{ك} - ١ = ٦\text{ل} \qquad \therefore \text{ل} = \frac{\text{ك} - ١}{٦} \qquad (١)$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{ك}^٢ + ٢\text{ك} - ٣}{٢} = ٢\text{ل}^٢ \qquad (٢)$

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{ك}^٢ + ٢\text{ك} - ٣}{٢} = ٢\left(\frac{\text{ك} - ١}{٦}\right)^٢$

$\therefore \text{ك}^٢ + ٢\text{ك} - ٣ = ٤ \times \frac{\text{ك}^٢ - ٢\text{ك} + ١}{٣٦}$

$\therefore ٩\text{ك}^٢ + ١٨\text{ك} - ٢٧ = \text{ك}^٢ - ٢\text{ك} + ١$

$\therefore ٨\text{ك}^٢ + ٢٠\text{ك} - ٢٨ = ٠$

$\therefore ٢\text{ك}^٢ + ٥\text{ك} - ٧ = ٠$

$\therefore (٢\text{ك} + ٧)(\text{ك} - ١) = ٠$

$\therefore \text{ك} = -٣.٥$ أو $\text{ك} = ١$

١٥

بفرض أن الجذرين : ل ، ٤ ل

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \text{أ} = ٥\text{ل} \qquad \therefore \text{ل} = \frac{١}{٥}\text{أ} \qquad (١)$

، حاصل ضرب الجذرين $= ٢\text{أ} - ٤ = ٤\text{ل}^٢ \qquad (٢)$

من (١) ، (٢) : $\therefore ٢\text{أ} - ٤ = ٤\left(\frac{١}{٥}\text{أ}\right)^٢$

$\therefore ٢\text{أ} - ٤ = \frac{٤}{٢٥}\text{أ}^٢ \qquad \therefore ٢\text{أ}^٢ - ٢٥\text{أ} + ٥٠ = ٠$

$\therefore (\text{أ} - ١٠)(٢\text{أ} - ٥) = ٠$

$\therefore \text{أ} = ١٠$ أو $\text{أ} = ٢\frac{١}{٢}$

١٦

$\because$ مجموع الجذرين $= \frac{\text{أ}}{\text{أ} - ٢} = ٣$

$\therefore \text{أ} = ٣\text{أ} - ٦ \qquad \therefore \text{أ} = ٣$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{ب}^٢}{\text{أ} - ٢} = ٥$

$\therefore \text{ب}^٢ = ٥ \qquad \therefore \text{ب} = \pm\sqrt{٥}$

١٧

نفرض أن الجذرين : ل ، ل^٢

، $\because$ مجموع الجذرين $= \text{ل} + \text{ل}^٢ = ٦$

$\therefore \text{ل}^٢ + \text{ل} - ٦ = ٠$

$\therefore (\text{ل} + ٣)(\text{ل} - ٢) = ٠ \qquad \therefore \text{ل} = -٣$ أو $\text{ل} = ٢$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \text{ل} \times \text{ل}^٢ = \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = \text{ل}^٣$

، عندما $\text{ل} = -٣ \qquad \therefore \text{جـ} = (-٣)^٣ = -٢٧$

، عندما $\text{ل} = ٢ \qquad \therefore \text{جـ} = ٢^٣ = ٨$

١٨

نفرض أن الجذرين : ل ، ل^٢

، $\because$ مجموع الجذرين $= \text{ل} + \text{ل}^٢ = \frac{٣٠}{٨} = \frac{١٥}{٤}$

$\therefore ٤\text{ل}^٢ + ٤\text{ل} - ١٥ = ٠$

$\therefore (٢\text{ل} - ٣)(٢\text{ل} + ٥) = ٠ \qquad \therefore \text{ل} = \frac{٣}{٢}$ أو $\text{ل} = -\frac{٥}{٢}$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \text{ل} \times \text{ل}^٢ = \frac{\text{جـ}}{٨}$

$\therefore \text{جـ} = ٨\text{ل}^٣$

، عندما $\text{ل} = \frac{٣}{٢} \qquad \therefore \text{جـ} = ٨\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣ = ٢٧$

، عندما $\text{ل} = -\frac{٥}{٢} \qquad \therefore \text{جـ} = ٨\left(\frac{-٥}{٢}\right)^٣ = -١٢٥$

١٩

بفرض أن الجذرين : ل ، ١ - ل

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{\text{أ}}{٤} = ١ \qquad \therefore \text{أ} = ٤$

٢٠

نفرض أن الجذرين : ل ، $\frac{١}{\text{ل}} + ١$

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين $= \text{ل}\left(\frac{١}{\text{ل}} + ١\right) = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ١ + \text{ل} = \frac{٣}{٢} \qquad \therefore \text{ل} = \frac{١}{٢}$

، $\because$ مجموع الجذرين $= \text{ل} + \frac{١}{\text{ل}} + ١ = \frac{\text{أ}}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢} + ٢ + ١ = \frac{\text{أ}}{٢} \qquad \therefore \text{أ} = ٧$

٢١

نفرض أن الجذرين : ل ، ل^٢ - ٢

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \text{ل}^٢ + \text{ل} - ٢ = ١٠$

$\therefore \text{ل}^٢ + \text{ل} - ١٢ = ٠ \qquad \therefore (\text{ل} + ٤)(\text{ل} - ٣) = ٠$

$\therefore \text{ل} = -٤$ أو $\text{ل} = ٣$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \text{ل}^٣ - ٢\text{ل} = \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = -٥٦$ أو $\text{جـ} = ٢١$

٢٢

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٥\text{ل}$

$\therefore \text{ل} = \frac{-\text{ب}}{٥\text{أ}} \qquad (١)$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٦\text{ل}^٢ \qquad (٢)$

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٦\left(\frac{-\text{ب}}{٥\text{أ}}\right)^٢$

$\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٦\text{ب}^٢}{٢٥\text{أ}^٢} \qquad \therefore ٢٥\text{أ}\text{جـ} = ٦\text{ب}^٢$

٢٣

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= ٦\text{ل}^٢ = \frac{٣}{٨}$

$\therefore \text{ل}^٢ = \frac{١}{١٦} \qquad \therefore \text{ل} = \frac{١}{٤}$ (الحل السالب مرفوض)

، $\because$ مجموع الجذرين $= ٥\text{ل} = \frac{\text{ب}}{٨}$

$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ب}}{٤٠}$ وبالتعويض عن $\text{ل} = \frac{١}{٤} \qquad \therefore \text{ب} = ١٠$

٢٤

نفرض أن جذرى المعادلة هما : ل ، م

$\therefore \text{ل} + \text{م} = \frac{-(٣\text{أ} - ١)}{\text{أ} + ١}$ ، $\text{ل}\,\text{م} = \frac{\text{أ}^٢ + ١}{\text{أ} + ١}$

$\therefore \frac{١ - ٣\text{أ}}{\text{أ} + ١} = \frac{\text{أ}^٢ + ١}{\text{أ} + ١} \qquad \therefore \text{أ}^٢ + ١ = ١ - ٣\text{أ}$

$\therefore \text{أ}^٢ + ٣\text{أ} = ٠ \qquad \therefore \text{أ} = ٠$ أو $\text{أ} = -٣$

٢٥

(١) بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٣\text{ل}$

$\therefore \text{ل} = \frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}} \qquad (١)$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٢\text{ل}^٢ \qquad (٢)$

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٢\left(\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}\right)^٢$

$\therefore \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٢\text{ب}^٢}{٩\text{أ}^٢}$

$\therefore ٩\text{أ}\text{جـ} = ٢\text{ب}^٢$ وهو الشرط اللازم

(٢) بفرض أن الجذرين : ل ، ل + ٣

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٢\text{ل} + ٣$

$\therefore \text{ل} = \frac{١}{٢}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right) \qquad (١)$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \text{ل}^٢ + ٣\text{ل} \qquad (٢)$

من (١) ، (٢):

$\therefore \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{١}{٤}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)^{٢} + \frac{٣}{٢}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + ٦\frac{\text{ب}}{\text{أ}} + ٩\right) - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٩}{٤} - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} - \frac{٩}{٤}$

$\therefore \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٩\text{أ}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}}$

$\therefore$ ٤ أ حـ $=$ ب^{٢} $-$ ٩ أ^{٢} وهو الشرط اللازم.

26

$\because$ مجموع جذري المعادلة الأولى $=$ أ $+$ ٤

، حاصل ضرب جذري المعادلة الثانية $= \frac{\text{أ}^{٢}}{٢}$

$\therefore$ أ $+$ ٤ $= \frac{\text{أ}^{٢}}{٢}$ $\quad \therefore$ أ^{٢} $-$ ٢ أ $-$ ٨ $=$ ٠

$\therefore$ (أ $-$ ٤) (أ $+$ ٢) $=$ ٠ $\quad \therefore$ أ $=$ ٤ ، أ $=$ $-$٢

27

إجابة نورا هي الصحيحة لأنها وضعت المعادلة على الصورة

أ س^{٢} $+$ ب س $+$ حـ $=$ ٠.

28 (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

إرشادات لحل رقم **28**

(١) $\because$ المعاملات أعداد حقيقية وأحد الجذرين ٢ ت

فإن الجذر الآخر هو $-$٢ ت

، مجموع الجذرين $=$ ٢ ت $-$ ٢ ت $=$ صفر

، حاصل ضربهما $=$ ٢ ت $\times$ ($-$٢ ت) $=$ $-$٤ $\times$ $-$١ $=$ ٤

، المميز $<$ صفر

(٢) $\because$ ب ، حـ عددين حقيقيين

$\therefore$ إذا كان أحد الجذرين (٣ $+$ ت) يكون الجذر الآخر (٣ $-$ ت) وهذا كافى لإيجاد ب ، حـ

(٣) من الرسم جذرا المعادلة هما ٥ ، ٢

$\therefore$ مجموع الجذرين $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٧$

، حاصل ضربهما $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = ١٠$

$\therefore \frac{\text{ب} + \text{حـ}}{\text{أ}} = (-٧) + (١٠) = ٣$

(٤) حاصل ضرب جذرى المعادلة الأولى $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثالثة $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

$\therefore$ حاصل ضربهم $= \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = ١$

(٥) $\because$ س$_{١}$ $<$ ٠ $<$ س$_{٢}$

$\therefore$ س$_{١}$ س$_{٢}$ $<$ ٠ $\quad \therefore \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} < ٠$

، $\because$ |س$_{١}$| $>$ |س$_{٢}$| $\quad \therefore$ س$_{١}$ $+$ س$_{٢}$ $<$ ٠

$\therefore \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} < ٠ \quad \therefore \frac{\text{حـ}}{\text{أ}} \cdot \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} > ٠$

$\therefore -\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ}^{٢}} > ٠ \quad \therefore$ $-$ب حـ $>$ ٠

$\therefore$ ب حـ $<$ ٠

29

$\because$ المميز $=$ (٢ أ $-$ ١)^{٢} $-$ ١٢ (أ $-$ ٤)

$=$ ٤ أ^{٢} $-$ ٤ أ $+$ ١ $-$ ١٢ أ $+$ ٤٨

$=$ ٤ أ^{٢} $-$ ١٦ أ $+$ ٤٩

$=$ ٤ (أ^{٢} $-$ ٤ أ $+$ ٤) $+$ ٣٣

$=$ ٤ (أ $-$ ٢)^{٢} $+$ ٣٣ $>$ ٠ مهما كانت قيمة أ

$\therefore$ للمعادلة جذران مختلفان ولكى يكون الجذران مختلفى الإشارة

يكون حاصل ضرب الجذرين $<$ ٠

$\therefore \frac{\text{أ} - ٤}{٣} < ٠ \quad \therefore$ أ $-$ ٤ $<$ ٠

$\therefore$ أ $<$ ٤ $\quad \therefore$ أ $\in$]$-\infty$ ، ٤[

إرشادات تمارين 4

1 (١) (د) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (جـ)

2

(١) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٢ ، حاصل ضربهما $=$ $-$٨

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٢ س $-$ ٨ $=$ ٠

(٢) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ١٤ ، حاصل ضربهما $=$ ٤٩

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ١٤ س $+$ ٤٩ $=$ ٠

(٣) $\because$ مجموع الجذرين $=$ $-$٧ ، حاصل ضربهما $=$ ٠

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $+$ ٧ س $=$ ٠

(٤) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{١٣}{٦}$ ، حاصل ضربهما $=$ ١

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $- \frac{١٣}{٦}$ س $+$ ١ $=$ ٠

أى ٦ س^{٢} $-$ ١٣ س $+$ ٦ $=$ ٠

(٥) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-٨}{٥}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{-٣٣}{٢٥}$

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $- \frac{-٨}{٥}$ س $+ \frac{-٣٣}{٢٥} = ٠$

أى ٢٥ س^{٢} $+$ ٤٠ س $-$ ٣٣ $=$ ٠

(٦) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٢$\sqrt{٣}$ ، حاصل ضربهما $=$ $-$٣٠

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٢$\sqrt{٣}$ س $-$ ٣٠ $=$ ٠

(٧) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ١٤ ، حاصل ضربهما $=$ ٢٩

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ١٤ س $+$ ٢٩ $=$ ٠

(٨) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٠ ، حاصل ضربهما $=$ ٢٥

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $+$ ٢٥ $=$ ٠

(٩) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٢ ، حاصل ضربهما $=$ ١٠

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٢ س $+$ ١٠ $=$ ٠

(١٠) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٦ ، حاصل ضربهما $=$ ١٧

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٦ س $+$ ١٧ $=$ ٠

(١١) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{٣}{\text{ت}} + \frac{٣ + ٣\text{ت}}{١ - \text{ت}}$

$= \frac{٣ - ٣\text{ت} + ٣\text{ت} - ٣}{١ + \text{ت}} = ٠$

، حاصل ضربهما $= \frac{٣}{\text{ت}} \times \frac{٣ + ٣\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٩ + ٩\text{ت}}{١ + \text{ت}} = ٩$

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $+$ ٩ $=$ ٠

(١٢) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-٢ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} + \frac{-٢ - ٤\text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{-٢ + ٦\text{ت} - ٦\text{ت} + ٢}{٣ + \text{ت}} = ٠$

، حاصل ضربهما $= \frac{-٢ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} \times \frac{-٢ - ٤\text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{١٢ + ٤\text{ت}}{٣ + \text{ت}} = ٤$

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $+$ ٤ $=$ ٠

(١٣) $\because$ مجموع الجذرين $=$ ٢ أ

، حاصل ضربهما $=$ أ^{٢} $-$ ب^{٢}

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٢ أ س $+$ أ^{٢} $-$ ب^{٢} $=$ ٠

(١٤) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})}{\text{أ} - \text{ب}}$

$+ \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{ب}^{٢})}{\text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{ب}^{٢}}$

$=$ أ $+$ ب $+$ أ $-$ ب $=$ ٢ أ

، حاصل ضربهما $=$ (أ $+$ ب) (أ $-$ ب) $=$ أ^{٢} $-$ ب^{٢}

$\therefore$ المعادلة هى: س^{٢} $-$ ٢ أ س $+$ أ^{٢} $-$ ب^{٢} $=$ ٠

3

ل $+$ م $=$ ٧ ، ل م $=$ ٥

(١) ل^{٢} م $+$ م^{٢} ل $=$ ل م (ل $+$ م) $=$ ٥ $\times$ ٧ $=$ ٣٥

(٢) $\frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{\text{ل}} = \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}} = \frac{٧}{٥}$

(٣) (ل $-$ ٢) (م $-$ ٢) $=$ ل م $-$ ٢ (ل $+$ م) $+$ ٤

$=$ ٥ $-$ ١٤ $+$ ٤ $=$ $-$٥

(٤) $\left(\text{ل} + \frac{١}{\text{م}}\right)\left(\text{م} + \frac{١}{\text{ل}}\right) = \text{ل م} + ٢ + \frac{١}{\text{ل م}}$

$= ٥ + ٢ + \frac{١}{٥} = ٧\frac{١}{٥}$



٤

$ل + م = ٤$ ، $ل م = ٢$

(١) $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = ٤^٢ - ٢ \times ٢ = ١٢$

(٢) ∵ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م$

$= ٤^٢ - ٤ \times ٢ = ٨$

∴ $ل - م = ٢\sqrt{٢}$ حيث $ل > م$

(٣) $ل^٣ + م^٣ = (ل + م) \left[(ل + م)^٢ - ٣ ل م\right]$

$= ٤ (١٦ - ٦) = ٤٠$

(٤) ∵ ل جذر للمعادلة: $س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$

∴ $ل^٢ - ٤ ل + ٢ = ٠$ ∴ $ل^٢ - ٤ ل + ٧ = ٥$

(٥) ∵ م جذر للمعادلة: $س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$

∴ $م^٢ - ٤ م + ٢ = ٠$ ∴ $٢ م^٢ - ٨ م + ٤ = ٠$

∴ $٢ م^٢ - ٨ م + ١٥ = ١١$

٥

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = -٥$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ل - ٤$ ، $و = م - ٤$

∴ $هـ + و = ل - ٤ + م - ٤ = (ل + م) - ٨$

$= ٣ - ٨ = -٥$

، $هـ و = (ل - ٤)(م - ٤) = ل م - ٤ (م + ل) + ١٦$

$= -٥ - ٤ (٣) + ١٦ = -١$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ + ٥ س - ١ = ٠$

٦

∵ $ل + م = ٥$ ، $ل م = ٣$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ٢ ل$ ، $و = ٢ م$

∴ $هـ + و = ٢ ل + ٢ م = ٢ (ل + م) = ٢ \times ٥ = ١٠$

، $هـ و = ٢ ل \times ٢ م = ٤ ل م = ٤ \times ٣ = ١٢$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ - ١٠ س + ١٢ = ٠$

٧

∵ $ل + م = \frac{٥}{٢}$ ، $ل م = \frac{-٧}{٢}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ١ - ل$ ، $و = ١ - م$

∴ $هـ + و = ١ - ل + ١ - م = ٢ - (ل + م)$

$= ٢ - \frac{٥}{٢} = \frac{-١}{٢}$

، $هـ و = (١ - ل)(١ - م) = ١ - (ل + م) + ل م$

$= ١ - \frac{٥}{٢} + \frac{-٧}{٢} = -٥$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ + \frac{١}{٢} س - ٥ = ٠$

أي $٢ س^٢ + س - ١٠ = ٠$

٨

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = ١$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ل + م$ ، $و = ل م$

∴ $هـ + و = (ل + م) + ل م = ٣ + ١ = ٤$

، $هـ و = (ل + م) \times ل م = ٣ \times ١ = ٣$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ - ٤ س + ٣ = ٠$

٩

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = -٤$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = \frac{١}{ل}$ ، $و = \frac{١}{م}$

∴ $هـ + و = \frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٣}{-٤}$

، $هـ و = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{-١}{٤}$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ + \frac{٣}{٤} س - \frac{١}{٤} = ٠$

أي $٤ س^٢ + ٣ س - ١ = ٠$

١٠

∵ $ل + م = \frac{٣}{٢}$ ، $ل م = -٢$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = \frac{ل}{٤}$ ، $و = \frac{م}{٤}$

∴ $هـ + و = \frac{ل}{٤} + \frac{م}{٤} = \frac{١}{٤}(ل + م) = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٨}$

، $هـ و = \frac{ل}{٤} \times \frac{م}{٤} = \frac{ل م}{١٦} = \frac{-٢}{١٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ - \frac{٣}{٨} س - \frac{٢}{١٦} = ٠$

أي $١٦ س^٢ - ٦ س - ٢ = ٠$

١١

∵ $ل + م = \frac{٥}{٢}$ ، $ل م = \frac{١}{٢}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ٢ ل^٢$ ، $و = ٢ م^٢$

∴ $هـ + و = ٢ ل^٢ + ٢ م^٢ = ٢ [ل^٢ + م^٢]$

$= ٢ [(ل + م)^٢ - ٢ ل م]$

$= ٢ \left[\frac{٢٥}{٤} - ١\right] = \frac{٢١}{٢}$

، $هـ و = ٢ ل^٢ \times ٢ م^٢ = ٤ (ل م)^٢ = ٤ \times \frac{١}{٤} = ١$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ - \frac{٢١}{٢} س + ١ = ٠$

أي $٢ س^٢ - ٢١ س + ٢ = ٠$

١٢

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما: ل ، م

، جذري المعادلة المطلوبة هما: هـ ، و

∴ $هـ = ل + ١$ ، $و = م + ١$ ∴ $ل = هـ - ١$ (١)

، ∵ ل أحد جذري المعادلة: $س^٢ - ٧ س - ٩ = ٠$

∴ $ل^٢ - ٧ ل - ٩ = ٠$

ومن (١): ∴ $(هـ - ١)^٢ - ٧ (هـ - ١) - ٩ = ٠$

∴ $هـ^٢ - ٢ هـ + ١ - ٧ هـ + ٧ - ٩ = ٠$

∴ $هـ^٢ - ٩ هـ - ١ = ٠$

∴ هـ جذر للمعادلة: $س^٢ - ٩ س - ١ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة.

١٣

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما: ل ، م

، جذري المعادلة المطلوبة هما: هـ ، و

∴ $هـ = \frac{١}{٢} ل$ ، $و = \frac{١}{٢} م$ ∴ $ل = ٢ هـ$ (١)

، ∵ ل أحد جذري المعادلة: $٤ س^٢ - ١٢ س + ٧ = ٠$

∴ $٤ ل^٢ - ١٢ ل + ٧ = ٠$

ومن (١): ∴ $٤ (٢ هـ)^٢ - ١٢ (٢ هـ) + ٧ = ٠$

∴ $١٦ هـ^٢ - ٢٤ هـ + ٧ = ٠$

∴ هـ جذر للمعادلة: $١٦ س^٢ - ٢٤ س + ٧ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة.

١٤

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما: ل ، م

∴ $ل + م = -٣$ ، $ل م = -٥$

، نفرض أن جذري المعادلة المطلوبة هما: هـ ، و

∴ $هـ = ل^٢$ ، $و = م^٢$

∴ $هـ + و = ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

$= ٩ + ١٠ = ١٩$

، $هـ و = (ل م)^٢ = ٢٥$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ - ١٩ س + ٢٥ = ٠$

١٥

$ل + م = \frac{٣}{٢}$ ، $ل م = \frac{-١}{٢}$

ويفرض أن جذري المعادلة المطلوبة هما: هـ ، و

∴ $هـ = \frac{ل}{م}$ ، $و = \frac{م}{ل}$

∴ $هـ + و = \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م}$

$= \frac{(ل + م)^٢ - ٢ ل م}{ل م}$

$= \frac{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - ٢ \times \frac{-١}{٢}}{\frac{-١}{٢}} = -\frac{١٣}{٢}$

، $هـ و = \frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = ١$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $س^٢ + \frac{١٣}{٢} س + ١ = ٠$

أي $٢ س^٢ + ١٣ س + ٢ = ٠$



١٦

∵ ل + م = −٥ ، ل م = ٦

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل − م ، و = م − ل

∴ هـ + و = ل − م + م − ل = صفر

، هـ و = (ل − م) (م − ل) = − (ل − م)^{٢}

= − [(ل + م)^{٢} − ٤ ل م] = − [٢٥ − ٢٤] = −١

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ١ = ٠

١٧

∵ ل + م = ٢ ، ل م = −٤

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = $\frac{١}{\text{ل}^{٢}}$ ، و = $\frac{١}{\text{م}^{٢}}$

∴ هـ + و = $\frac{١}{\text{ل}^{٢}} + \frac{١}{\text{م}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢} + \text{ل}^{٢}}{(\text{ل م})^{٢}}$

= $\frac{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\,\text{ل م}}{(\text{ل م})^{٢}} = \frac{٤ + ٨}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

، هـ و = $\frac{١}{\text{ل}^{٢}} \times \frac{١}{\text{م}^{٢}} = \frac{١}{(\text{ل م})^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١}{١٦}$ = ٠

أى ١٦ س^{٢} − ١٢ س + ١ = ٠

١٨

∵ ل + م = $\frac{٥}{٣}$ ، ل م = $\frac{٢}{٣}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = $\frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}}$ ، و = $\frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}}$

∴ هـ + و = $\frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}} + \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{٣} + \text{م}^{٣}}{\text{ل م}}$

= $\frac{(\text{ل} + \text{م}) [(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٣\,\text{ل م}]}{\text{ل م}}$

= $\frac{\frac{٥}{٣} \left[\frac{٢٥}{٩} - ٢\right]}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٣٥}{١٨}$

، هـ و = $\frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}}$ = ل م = $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − $\frac{٣٥}{١٨}$ س + $\frac{٢}{٣}$ = ٠

أى ١٨ س^{٢} − ٣٥ س + ١٢ = ٠

١٩

∵ ل + م = $\frac{-١٢}{١٠} = \frac{-٦}{٥}$ ، ل م = $-\frac{١}{١٠}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٢ ل + $\frac{١}{\text{م}}$ ، و = ٢ م + $\frac{١}{\text{ل}}$

∴ هـ + و = ٢ ل + $\frac{١}{\text{م}}$ + ٢ م + $\frac{١}{\text{ل}}$

= ٢ (ل + م) + $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}}$ = ٢ $\left(\frac{-٦}{٥}\right) + \frac{-\frac{٦}{٥}}{-\frac{١}{١٠}}$

= $\frac{-١٢}{٥} + ١٢ = \frac{٤٨}{٥}$

، هـ و = $\left(٢\,\text{ل} + \frac{١}{\text{م}}\right) \left(٢\,\text{م} + \frac{١}{\text{ل}}\right)$

= ٤ ل م + ٤ + $\frac{١}{\text{ل م}}$

= ٤ $\left(-\frac{١}{١٠}\right)$ + ٤ − ١٠ = $\frac{-٣٢}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − $\frac{٤٨}{٥}$ س − $\frac{٣٢}{٥}$ = ٠

أى ٥ س^{٢} − ٤٨ س − ٣٢ = ٠

٢٠

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −٥

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل^{٢} م ، و = م^{٢} ل

∴ هـ + و = ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م)

= −٥ × ٣ = −١٥

، هـ و = ل^{٢} م × م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (−٥)^{٣} = −١٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} + ١٥ س − ١٢٥ = ٠

٢١

∵ ل + م = ٣ ، ل م = ٥

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٦ ، و = ل^{٢} + م^{٢}

∴ هـ + و = ٦ + ل^{٢} + م^{٢} = ٦ + (ل + م)^{٢} − ٢ ل م

= ٦ + ٩ − ٢ × ٥ = ٥

، هـ و = ٦ (ل^{٢} + م^{٢}) = ٦ [(ل + م)^{٢} − ٢ ل م]

= ٦ (٩ − ١٠) = −٦

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٥ س − ٦ = ٠

٢٢

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −١

، يفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٣ ل − ٢ م ، و = ٢ ل − ٣ م

∴ هـ + و = ٥ ل − ٥ م = ٥ (ل − م)

، ∵ (ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ ل م = ٩ + ٤ = ١٣

∴ ل − م = $\sqrt{١٣}$ (حيث ل > م)

∴ هـ + و = ٥ (ل − م) = ٥ $\sqrt{١٣}$

، هـ و = (٣ ل − ٢ م) (٢ ل − ٣ م)

= ٦ ل^{٢} − ٩ ل م − ٤ ل م + ٦ م^{٢}

= ٦ (ل^{٢} + م^{٢}) − ١٣ ل م

= ٦ [(ل + م)^{٢} − ٢ ل م] − ١٣ ل م

= ٦ (ل + م)^{٢} − ٢٥ ل م

= ٦ × ٩ + ٢٥ = ٧٩

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٥ $\sqrt{١٣}$ س + ٧٩ = ٠

٢٣

∵ ل + ٢ + م + ٢ = ١١ ∴ ل + م = ٧

، ∵ (ل + ٢) (م + ٢) = ٣

∴ ل م + ٢ (ل + م) + ٤ = ٣

∴ ل م + ٢ × ٧ + ٤ = ٣ ∴ ل م = −١٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٧ س − ١٥ = ٠

٢٤

∵ ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + ٣ + م + ٣ = ٥ ∴ **ل + م = −١**

، ∵ (ل + ٣) (م + ٣) = ١١

∴ ل م + ٣ (ل + م) = ٢

∴ ل م + ٣ (−١) = ٢ ∴ **ل م = ٥**

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل^{٢} م ، و = م^{٢} ل

∴ هـ + و = ل^{٢} م + م^{٢} ل

= ل م (ل + م) = ٥ (−١) = −٥

، هـ و = ل^{٢} م × م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} + ٥ س + ١٢٥ = ٠

٢٥

∵ $\frac{١}{\text{ل}}$ ، $\frac{١}{\text{م}}$ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $\frac{١}{\text{ل}} + \frac{١}{\text{م}}$ = ٢ ∴ $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}}$ = ٢

∴ ل + م = ٢ ل م (١)

، $\frac{١}{\text{ل}} \times \frac{١}{\text{م}}$ = ١ ∴ $\frac{١}{\text{ل م}}$ = ١ ∴ **ل م = ١** (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ **ل + م = ٢**

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل م − ٧ = ١ − ٧ = −٦

، و = ل + م + ٣ = ٢ + ٣ = ٦

∴ هـ + و = صفر ، هـ و = −٣٦

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٣٦ = ٠

٢٦

∵ ل + م = ٢ ، ل م = −٥

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل^{٢} + م ، و = م^{٢} + ل

∴ هـ + و = ل^{٢} + م^{٢} + م + ل

= (ل + م)^{٢} − ٢ ل م + (م + ل)

= ٤ + ١٠ + ٢ = ١٦

، هـ و = (ل^{٢} + م) (م^{٢} + ل)

= (ل م)^{٢} + ل^{٣} + م^{٣} + ل م

= ٢٥ − ٥ + (ل + م) [(ل + م)^{٢} − ٣ ل م]

= ٢٠ + ٢ [(٢)^{٢} − ٣ × −٥] = ٥٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ١٦ س + ٥٨ = ٠

٢٧

$\because \frac{٣}{ل}+\frac{٣}{م}=١٢$ $\therefore \frac{٣ل+٣م}{ل م}=١٢$

$\therefore م+ل=٤ ل م$ (١)

، $\frac{٣}{ل}\times\frac{٣}{م}=٩$ $\therefore ل م=١$ (٢)

من (١)، (٢): $\therefore م+ل=٤$

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

$\therefore هـ=\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $و=\frac{١}{م^{٢}}$

$\therefore هـ+و=\frac{١}{ل^{٢}}+\frac{١}{م^{٢}}=\frac{ل^{٢}+م^{٢}}{ل^{٢}م^{٢}}$

$=\frac{(ل+م)\,[(ل+م)^{٢}-٢ل م]}{(ل م)^{٢}}$

$=\frac{٤\,[(٤)^{٢}-٢\times١]}{(١)^{٢}}=٥٢$

، $هـ و=\frac{١}{ل^{٢}}\times\frac{١}{م^{٢}}=\frac{١}{(ل م)^{٢}}=١$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^{٢}-٥٢س+١=٠$

٢٨

بفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

$\therefore ل+م=\frac{٧}{٦}$ (١)

، $ل م=\frac{١-حـ}{٦}$ (٢)

، $ل-م=\frac{١١}{٦}$ (٣)

وبجمع (١)، (٣): $\therefore ٢ل=\frac{١٨}{٦}$ $\therefore ل=\frac{٣}{٢}$

وبالتعويض فى (١): $\therefore م=\frac{٧}{٦}-\frac{٩}{٦}=-\frac{١}{٣}$

$\therefore ل م=-\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (٢):

$\therefore -\frac{١}{٢}=\frac{١-حـ}{٦}$ $\therefore حـ=٤$

٢٩

نفرض أن جذرى المعادلة الأولى هما : ل ، م

$\therefore ل-م=\pm\frac{\sqrt{(-٢)^{٢}-٤\times٣\times حـ}}{٣}$

$=\pm\frac{\sqrt{٤-١٢حـ}}{٣}$

ونفرض أن جذرى المعادلة الثانية هما : هـ ، و

$\therefore هـ-و=\pm\frac{\sqrt{(-حـ)^{٢}-٤\times٢\times٣}}{٢}$

$=\pm\frac{\sqrt{حـ^{٢}-٢٤}}{٢}$

، $\because ل-م=هـ-و$

$\therefore \frac{\sqrt{٤-١٢حـ}}{٣}=\frac{\sqrt{حـ^{٢}-٢٤}}{٢}$ وبالتربيع

$\therefore \frac{٤-١٢حـ}{٩}=\frac{حـ^{٢}-٢٤}{٤}$

$\therefore ٩حـ^{٢}-٢١٦-١٦+٤٨حـ=٠$

$\therefore ٩حـ^{٢}+٤٨حـ-٢٣٢=٠$

٣٠

نفرض أن جذرى المعادلة الأولى هما : ل ، م

$\therefore ل-م=\pm\sqrt{ك^{٢}-٨ك}$

ونفرض أن جذرى المعادلة الثانية هما : هـ ، و

$\therefore هـ و=ك$

، $\because ل-م=٢هـ و$

$\therefore \pm\sqrt{ك^{٢}-٨ك}=٢ك$ وبالتربيع .

$\therefore ك^{٢}-٨ك=٤ك^{٢}$ $\therefore ٣ك^{٢}+٨ك=٠$

$\therefore ك(٣ك+٨)=٠$ $\therefore ك=٠$ أ، $ك=\frac{-٨}{٣}$

٣١

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

$\therefore ل+م=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}$ ، $ل م=\frac{أ}{٤}$

، $\because ل^{٢}+م^{٢}=٧ل م$

$\therefore ل^{٢}+م^{٢}+٢ل م=٩ل م$

$\therefore (ل+م)^{٢}=٩ل م$ $\therefore \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}=٩\times\frac{أ}{٤}$

$\therefore أ=١$

٣٢

$\because ل+م=٨$ ، $ل م=حـ$

، $\because ل^{٢}+م^{٢}=٤٠$ $\therefore (ل+م)^{٢}-٢ل م=٤٠$

$\therefore ٦٤-٢حـ=٤٠$ $\therefore حـ=١٢$

$\therefore ل+م=٨$ ، $ل م=١٢$

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

$\therefore هـ=ل^{٢}م+م^{٢}ل=ل م(ل+م)$ ، $و=ل م$

$\therefore هـ+و=ل م(ل+م)+ل م=١٢\times٨+١٢=١٠٨$

، $هـ و=ل م(ل+م)\times ل م=١٢\times٨\times١٢=١١٥٢$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^{٢}-١٠٨س+١١٥٢=٠$

٣٣

$\because س^{٢}-٤س-٥=٠$

$\therefore (س-٥)(س+١)=٠$

$\therefore س=٥$ أ، $س=-١$

، $\because ل>م$ $\therefore ل=٥$ ، $م=-١$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما : −٢ ، ٣

∴ المعادلة هى : $(س+٢)(س-٣)=٠$

أى : $س^{٢}-س-٦=٠$

٣٤ حل يوسف هو الصحيح لأنه استخدم جذرى المعادلة الأولى لإيجاد جذرى المعادلة الثانية ومنها أوجد المعادلة المجهولة.

٣٥ (١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (جـ)
(٦) (د) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (جـ)

إرشادات لحل رقم ٣٥

(١) نفرض أن جذرى المعادلة (بعدى المستطيل) هما ل ، م

$\therefore ل م=١٥$

، $٢(ل+م)=٢٦$ $\therefore ل+م=١٣$

∴ المعادلة التربيعية هى $س^{٢}-١٣س+١٥=٠$

(٢) $\because أ^{٢}+٢أ+١=٠$ ، $ب^{٢}+٢ب+١=٠$

∴ أ ، ب هما جذرا المعادلة $س^{٢}+٢س+١=٠$

$\therefore أ+ب=-٢$ ، $أ ب=١$

$\therefore \frac{أ}{ب}+\frac{ب}{أ}=\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{أ ب}=\frac{(أ+ب)^{٢}-٢أ ب}{أ ب}$

$=\frac{(-٢)^{٢}-٢(١)}{(١)}=٧$

(٣) $\because (س-أ)(س-ب)=ك$

$\therefore س^{٢}-(أ+ب)س+أ ب-ك=٠$

$\therefore ل+م=أ+ب$ ، $ل م=أ ب-ك$

ومنها $أ ب=ل م+ك$

∴ المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى

$س^{٢}-(ل+م)س+ل م+ك=٠$

$\therefore (س-ل)(س-م)+ك=٠$

(٤) $\because (ل+م+٤)^{٢}+(ل م-٣)^{٢}=$ صفر

$\therefore ل+م+٤=٠$ ومنها $ل+م=-٤$

، $ل م-٣=٠$ ومنها $ل م=٣$

∴ لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م

مجموع الجذرين $٤ل+٤م=٤(ل+م)$

$=٤\times-٤=-١٦$

، حاصل ضربهما $٤ل\times٤م=١٦ل م$

$=١٦\times٣=٤٨$

∴ الشرط الكافى لتكوين المعادلة هو (ب)

(٥) ∵ عمر أخطأ فى الحد المطلق وكان جذرا المعادلة هما ٣ ، ٤

∴ مجموع الجذرين هو ٧

، ∵ خالد أخطأ فى معامل س وكان جذرا المعادلة هما ٢ ، ٣

∴ حاصل ضرب الجذرين هو ٦

∴ المعادلة التربيعية هى : $س^{٢}-٧س+٦=٠$

وجذراها هما ٦ ، ١



(٦) نفرض أن جذرى المعادلة هما ل ، ل + ٢

∴ مجموع الجذرين (−ب) = (٢ ل + ٢)

، حاصل ضربهما حـ = ل^{٢} + ٢ ل

∴ ب^{٢} − ٤ حـ = (٢ ل + ٢)^{٢} − ٤ (ل^{٢} + ٢ ل)

= ٤ ل^{٢} + ٨ ل + ٤ − ٤ ل^{٢} − ٨ ل = ٤

(٧) ∵ حاصل ضرب الجذران = حـ وهو عدد أولى

∴ الجذران هما ١ ، حـ

، ∵ حاصل جمعهما = ب (حيث ب عدد أولى)

∴ ب = ١ + حـ

∴ ب ، حـ عددان أوليان متتاليان

∴ ب = ٣ ، حـ = ٢

∴ ب − حـ = ١ (عدد فردى)

، ب^{٢} − حـ = ٩ − ٢ = ٧ (عدد أولى)

، ب + حـ = ٣ + ٢ = ٥ (عدد أولى)

∴ الإجابة هى (د)

(٨) ∵ ل أحد جذرى المعادلة

∴ د (ل) = ٠

، ∵ |ل − م| > ١

ل ، م ، ل+١ ، ل−١

∴ د (ل + ١) ، د (ل − ١) فى جميع الحالات مختلفة الإشارة

∴ د (ل + ١) × د (ل − ١) < صفر

(٩) ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

∴ ل + م = ظا θ ، ل م = −١

∴ (ل + م)^{٢} = (ظا θ)^{٢}

∴ ل^{٢} + م^{٢} + ٢ ل م = ظا^{٢} θ

، ∵ ل^{٢} + م^{٢} = ٢

∴ ٢ + ٢ (−١) = ظا^{٢} θ

∴ ظا^{٢} θ = ١ ∴ ظا θ = ±١

، ∵ ٠ < θ < ٩٠° ∴ ظا θ = ١

∴ θ = $\frac{\pi}{٤}$

٣٦

ل + م = $\frac{-٢ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{حـ}{أ}$

(١) ∵ ل − م = ٢ ∴ (ل − م)^{٢} = ٤

∴ (ل + م)^{٢} − ٤ ل م = ٤

∴ $\frac{٤ب^{٢}}{أ^{٢}}$ − $\frac{٤حـ}{أ}$ = ٤

∴ ب^{٢} = أ^{٢} + أ حـ = أ (أ + حـ)

(٢) ∵ ل + م = $\frac{-٢ب}{أ}$ ، ل − م = ٢

وبالجمع ∴ ٢ ل = $\frac{-٢ب}{أ}$ + ٢

∴ ل = ١ − $\frac{ب}{أ}$

٣٧

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{حـ}{أ}$

، ∵ ل − م = ٢ $\left(\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}\right)$ وبالتربيع

∴ (ل − م)^{٢} = ٤ $\left(\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}\right)^{٢}$

∴ (ل + م)^{٢} − ٤ ل م = $\frac{٤ (م + ل)^{٢}}{(ل م)^{٢}}$

∴ $\left(\frac{-ب}{أ}\right)^{٢}$ − ٤ × $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{٤ × \left(\frac{-ب}{أ}\right)^{٢}}{\left(\frac{حـ}{أ}\right)^{٢}}$

∴ $\left(\frac{-ب}{أ}\right)^{٢}$ − ٤ × $\frac{حـ}{أ}$ = ٤ $\left(\frac{ب}{حـ}\right)^{٢}$

وبالضرب × أ^{٢} حـ^{٢}

∴ ب^{٢} حـ^{٢} − ٤ أ حـ^{٣} = ٤ أ^{٢} ب^{٢}

∴ حـ^{٢} (ب^{٢} − ٤ أ حـ) = ٤ أ^{٢} ب^{٢}

إرشادات تمارين 5

١

(١) الدالة د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

(٢) الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٣) ∵ د (س) = ٢ س

- د (س) = ٠ عندما س = ٠
- وتكون إشارة د موجبة
  إذا كان ٢ س > ٠ أى س > ٠
- وتكون إشارة د سالبة
  إذا كان ٢ س < ٠ أى س < ٠

(٤) ∵ د (س) = −٣ س

- د (س) = ٠ عندما س = ٠
- وتكون إشارة د سالبة إذا كان س > ٠
- وتكون إشارة د موجبة إذا كان س < ٠

(٥) ∵ د (س) = ٥ س − ٧

∴ د (س) = ٥ $\left(س − \frac{٧}{٥}\right)$

- د (س) = ٠ عندما س = $\frac{٧}{٥}$
- وتكون إشارة د موجبة عندما س − $\frac{٧}{٥}$ > ٠
  أى س > $\frac{٧}{٥}$
- وتكون إشارة د سالبة عندما س − $\frac{٧}{٥}$ < ٠
  أى س < $\frac{٧}{٥}$

(٦) ∵ د (س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

∴ د (س) = −$\frac{١}{٢}$ س + ٣ = −$\frac{١}{٢}$ (س − ٦)

- د (س) = ٠ عندما س = ٦
- وتكون إشارة د سالبة
  إذا كان س − ٦ > ٠ أى س > ٦
- وتكون إشارة د موجبة
  إذا كان س − ٦ < ٠ أى س < ٦

٢

(١) ∵ د (س) = (س − ٢) (س + ٣)

∴ جذرا المعادلة : د (س) = ٠

هما : س = ٢ ، س = −٣

س: ∞ ، ٢ ، −٣ ، −∞
د(س): + + + + | − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

- د تكون موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٢]
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٢}
- د تكون سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٢[

(٢) ∵ د (س) = (٢ س − ٣)^{٢} ∴ د (س) = ٠

أى (٢ س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠

س: ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ ، −∞
د(س): + + + + | + + + + + +
(صفر)

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − $\left\{\frac{٣}{٢}\right\}$

(٣) ∵ د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س − ٧

- نوجد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ٥ س − ٧ = ٠

∴ (٢ س + ٧) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{-٧}{٢}$ أ، س = ١

س: ∞ ، ١ ، $\frac{-٧}{٢}$ ، −∞
د(س): + + + | − − − | + + + + + +
(صفر) (صفر)

- تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ٢ > ٠)
  أى موجبة عندما س ∈ ح − $\left[-\frac{٧}{٢} ، ١\right]$
- د (س) = ٠ عندما س ∈ $\left\{-\frac{٧}{٢} ، ١\right\}$
- تكون إشارة د سالبة عندما س ∈ $\left]-\frac{٧}{٢} ، ١\right[$

(٤) ∵ د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٣

- نوجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س − ١) (س − ٣) = ٠

∴ س = ١ أ، س = ٣

س: ∞ ، ٣ ، ١ ، −∞
د(س): + + + | − − − | + + + + + + +
(صفر) (صفر)

• تكون إشارة د مثل إشارة أ (حيث أ = ١ > ٠)

أى موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}

• تكون إشارة د سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

(٥) ∵ د (س) = س^{٢} − ٨ س + ١٦

• توجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠

∴ (س − ٤)^{٢} = ٠ ∴ س = ٤

• تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ١ > ٠)

أى موجبة عندما س ∈ ح − {٤}

• د (س) = ٠ عندما س = ٤

(٦) ∵ د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٥

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٥

= ٩ − ٤٠ = −٣١ > ٠

∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة

أى ليس للمعادلة جذور حقيقية

، ∵ أ (معامل س^{٢}) = ٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٧) ∵ د (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٧

∴ المميز = −١٢ > ٠

∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة

أى ليس للمعادلة جذور حقيقية

، ∵ أ (معامل س^{٢}) = −١ > ٠

∴ د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

(٨) ∵ د (س) = ٩ − ٤ س^{٢}

∴ د (س) = ٠ عندما ٤ س^{٢} − ٩ = ٠

أى (٢ س − ٣) (٢ س + ٣) = ٠

أى س = $\frac{٣}{٢}$ أ، −$\frac{٣}{٢}$

• تكون د لها إشارة أ (حيث أ = −٤ > ٠) أى سالبة

عندما س ∈ ح − [−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

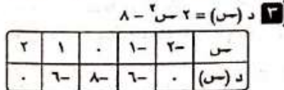
• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}

• د تكون موجبة عندما س ∈]−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$[

(٩) ∵ د (س) = ٢ س^{٢}

∴ د (س) = ٠

عندما س = ٠

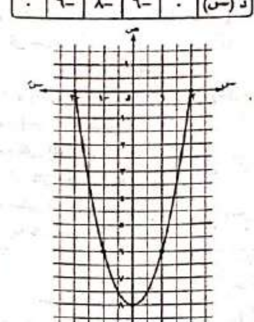


، ∵ أ (معامل س^{٢}) = ٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {٠}

٣ د (س) = ٢ س^{٢} − ٨

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٠	−٦	−٨	−٦	٠



ومن الرسم نجد أن :

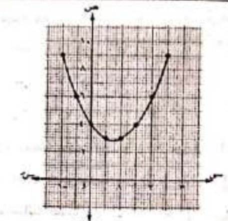
• د سالبة عندما س ∈]−٢ ، ٢[

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ٢}

• د موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٢]

٤ د (س) = ٢ س^{٢} − ٢ س + ٤

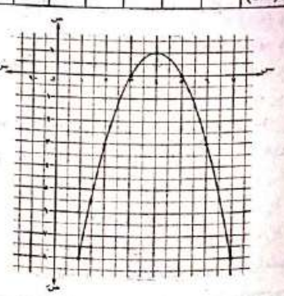
س	−١	−$\frac{١}{٢}$	٠	$\frac{١}{٢}$	١	١$\frac{١}{٢}$	٢	٢$\frac{١}{٢}$
د (س)	٩	٦	٤	٣	٣	٤	٦	٩



ومن الرسم نجد أن : د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

٥ د (س) = − س^{٢} + ٨ س − ١٥

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
د (س)	−٨	−٣	٠	١	٠	−٣	−٨



ومن الرسم نجد أن :

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣ ، ٥}

• د سالبة عندما س ∈ ح − [٣ ، ٥]

• د موجبة عندما س ∈]٣ ، ٥[

∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٥}

٦

د (س) = س^{٢} − ٩

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٠	−٥	−٨	−٩	−٨	−٥	٠	٧

ومن الرسم نجد أن :

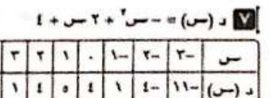
• د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٣[

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

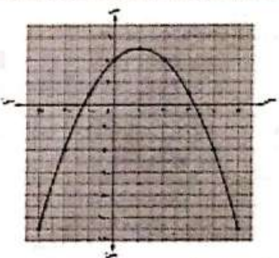
• د موجبة عندما س ∈]٣ ، ٤]



٧ د (س) = − س^{٢} + ٢ س + ٤



س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	−١١	−٤	١	٤	٥	٤	١	−٤	−١١



ومن الرسم نجد أن :

- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢,١ ، ٣,٢}
- د موجبة عندما س ∈]−٢,١ ، ٣,٢[
- د سالبة عندما س ∈ [−٣ ، −٢,١[∪]٣,٢ ، ٥]

لاحظ أن : −٢,١ ، ٣,٢ هي قيم تقريبية لجذرى المعادلة المرتبطة بالدالة.

٨ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (جـ)
(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (د) (١٤) (ب) (١٥) (جـ)
(١٦) أولاً : (د) ثانيًا : (جـ)
(١٧) أولاً : (د) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (أ)

٩

(١) ∵ د (س) = ٣ − س

- د (س) = ٠ عندما س = ٣
- وتكون إشارة د موجبة عندما ٣ − س > ٠

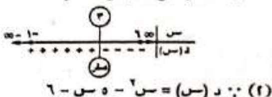
أى : س < ٣

∴ د موجبة فى الفترة [−١ ، ٣[

- وتكون إشارة د سالبة عندما ٣ − س < ٠

أى س > ٣

∴ د سالبة فى الفترة]٣ ، ٦]



(٢) ∵ د (س) = س^{٢} − ٥ س − ٦

- نوجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٥ س − ٦ = ٠

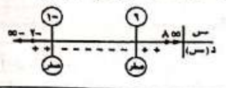
∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

∴ س = −١ أ، س = ٦

- ∵ أ = ١ > ٠

أى د موجبة عندما س ∈ [−٢ ، ٨] − [−١ ، ٦]

- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٦}
- د سالبة عندما س ∈]−١ ، ٦[



١٠

(١) ∵ د (س) = س + ١ عندما س ≥ −١

∴ عندما س = −١ فإن د (س) = ٠

- وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ١ > ٠ أى س > −١

- ∵ د (س) = − س − ١ عندما س < −١

∴ د (س) = − (س + ١)

أى الدالة د تكون موجبة إذا كان

س + ١ < ٠ أى س < −١

∴ د (س) موجبة فى ح − {−١}

، د (س) = ٠ عندما س = −١

(٢) ∵ د (س) = ٣ س + ٦ عندما س ≥ −٢

∴ د (س) = ٣ (س + ٢)

∴ عندما س = −٢ فإن د (س) = ٠

- وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ٢ > ٠ أى س > −٢

- ∵ د (س) = −٣ س − ٦ عندما س < −٢

∴ د (س) = −٣ (س + ٢)

وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ٢ < ٠ أى س < −٢

∴ د (س) موجبة فى ح − {−٢}

- د (س) = ٠ عندما س = −٢

١١

(١) من الرسم نجد أن :

- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}
- د سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]
- د موجبة عندما س ∈]−١ ، ٥[

(٢) من الرسم نجد أن :

- د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}
- د موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]
- د سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

١٢

د (س) = س − ٣

- د (س) = ٠ عندما س = ٣
- د موجبة عندما س > ٣
- د سالبة عندما س < ٣

، ر (س) = س^{٢} − ٥ س − ٦

= (س − ٦) (س + ١)

س = ٦ أ، س = −١

- ر (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٦}
- ر موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٦]
- ر سالبة عندما س ∈]−١ ، ٦[

الدالتان موجبتان معًا عندما س > ٦

١٣

- د$_{١}$ (س) = س − ٣
- د$_{١}$ (س) = صفر عندما س = ٣
- د$_{١}$ موجبة عندما س > ٣
- د$_{١}$ سالبة عندما س < ٣
- د$_{٢}$ (س) = ٥ + ٤ س − س^{٢}

نوجد جذرى المعادلة : − س^{٢} + ٤ س + ٥ = ٠

∴ س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ جذرا المعادلة هما ٥ ، −١

- د$_{٢}$ (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}
- د$_{٢}$ سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]
- د$_{٢}$ موجبة عندما س ∈]−١ ، ٥[

د$_{١}$ ، د$_{٢}$ سالبتان معًا عندما س ∈]−∞ ، −١[

١٤

- د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦

نوجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

• د موجبة عندما س ∈ ح - [٢ ، ٣]

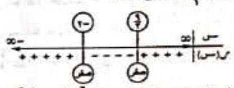
• د سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

• ر (س) = ٢ س^{٢} - ٥ س - ١٨

نوجد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} - ٥ س - ١٨ = ٠

∴ (٢ س - ٩) (س + ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٩}{٢}$ أ، س = -٢



• ر (س) = ٠ عندما س ∈ {-٢ ، $\frac{٩}{٢}$}

• ر موجبة عندما س ∈ ح - [-٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• ر سالبة عندما س ∈]-٢ ، $\frac{٩}{٢}$[

∴ • الدالتان موجبتان معًا عندما

س ∈]$\frac{٩}{٢}$ ، ∞[∪]-∞ ، -٢[

أى س ∈ ح - [-٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• الدالتان سالبتان معًا عندما س ∈]٢ ، ٣[

١٥

∵ ٢ س^{٢} - ك س + ك - ٣ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = -ك ، جـ = ك - ٣

∴ المميز = (-ك)^{٢} - ٤ × ٢ × (ك - ٣)

= ك^{٢} - ٨ ك + ٢٤

∴ نبحث إشارة د : د (ك) = ك^{٢} - ٨ ك + ٢٤

، ∵ المميز = (-٨)^{٢} - ٤ × ١ × ٢٤ = -٣٢ < ٠

∴ المعادلة : ك^{٢} - ٨ ك + ٢٤ = ٠

ليس لها جذور حقيقية

، ∵ معامل ك^{٢} > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ح

∴ مميز المعادلة : ٢ س^{٢} - ك س + ك - ٣ = ٠

موجب لجميع قيم س ∈ ح

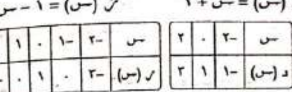
∴ جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} - ك س + ك - ٣ = ٠

حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ح

١٦

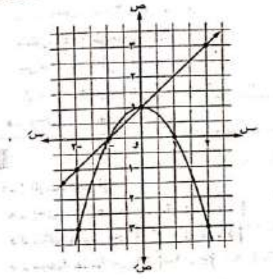
إجابة أميرة هى الصحيحة :

د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ - س^{٢}



س	-٢	٠	٢
د (س)	-١	١	٣

س	-٢	-١	٠	١	٢
ر (س)	-٣	٠	١	٠	-٣



من الرسم نجد أن :

الدالتان تكونان موجبتين فى الفترة]-١ ، ١[

١٧

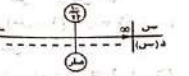
(١) د (س) = -٢ س^{٢} - ٢ $\sqrt{٢}$ س - ١

• نوجد جذرى المعادلة :

-٢ س^{٢} - ٢ $\sqrt{٢}$ س - ١ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + ٢ $\sqrt{٢}$ س + ١ = ٠

∴ $(\sqrt{٢}$ س + ١$)^{٢}$ = ٠ ∴ س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$



• د (س) = ٠ عندما س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

• د سالبة عندما س ∈ ح - {$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$}

(٢) د (س) = س + (س + ١) (٢ س + ٣)

- ٤ (س + ١) + ١

= س + ٢ س^{٢} + ٥ س + ٣ - ٤ س

- ٤ + ١ = ٢ س^{٢} + ٢ س

= ٢ س (س + ١)

∴ جذرا المعادلة : د (س) = ٠

هما س = ٠ ، س = -١

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ٠}

• د موجبة عندما س ∈ ح - [-١ ، ٠]

• د سالبة عندما س ∈]-١ ، ٠[

١٨

(١) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح - [-٣ ، ٢]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {-٣ ، ٢}

• د سالبة عندما س ∈]-٣ ، ٢[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س - ٢) (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، -٦)

∴ -٦ = أ × -٢ × ٣ ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س - ٢) (س + ٣) = س^{٢} + س - ٦

(٢) من الرسم نجد أن :

• د سالبة عندما س ∈ ح - [-٣ ، ٠]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {-٣ ، ٠}

• د موجبة عندما س ∈]-٣ ، ٠[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ س (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (-١ ، ٢)

∴ ٢ = -أ (-١ + ٣) ∴ أ = -١

∴ د (س) = - س (س + ٣) = - س^{٢} - ٣ س

(٣) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح - [١ ، ٤]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٤}

• د سالبة عندما س ∈]١ ، ٤[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س - ١) (س - ٤)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٣ ، -٤)

∴ -٤ = أ (٣ - ١) (٣ - ٤)

∴ -٤ = أ × ٢ × -٢ ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س - ١) (س - ٤)

= س^{٢} - ٦ س + ٤

إرشادات تمارين 6

١

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س - ٨

، بوضع س^{٢} + ٢ س - ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س - ٢) = ٠

∴ س = -٤ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة عندما س ∈ ح - [-٤ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [-٤ ، ٢]

(٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س - ٤





، بوضع س² + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ١

، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ١]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]−٤ ، ١[

(٣) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = س² − ٥ س − ٦

، بوضع س² − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

∴ س = −١ أو س = ٦

، ∵ أ > ٠

∴ د سالبة عندما س ∈]−١ ، ٦[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−١ ، ٦[

(٤) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = س² − س − ٢

، بوضع س² − س − ٢ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٢) = ٠

∴ س = −١ أو س = ٢

، ∵ أ > ٠

∴ د سالبة عندما س ∈]−١ ، ٢[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−١ ، ٢]

(٥) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٤ − ٣ س − س²

، بوضع ٤ − ٣ س − س² = ٠

∴ س² + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ١

، ∵ أ < ٠

∴ د موجبة عندما س ∈]−٤ ، ١[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٤ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٤ ، ١]

(٦) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٥ س − س² − ٦

، بوضع ٥ س − س² − ٦ = ٠

∴ س² − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٣

، ∵ أ < ٠

∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٢ ، ٣]

(٧) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = س² − ١

، بوضع س² − ١ = ٠

∴ (س + ١) (س − ١) = ٠

∴ س = −١ أو س = ١

، ∵ أ > ٠

∴ د سالبة عندما س ∈]−١ ، ١[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−١ ، ١]

(٨) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٤ − س²

، بوضع ٤ − س² = ٠

∴ (٢ + س) (٢ − س) = ٠

∴ س = −٢ أو س = ٢

، ∵ أ < ٠

∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٢ ، ٢]

(٩) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٧ + س² − ٤ س

، بوضع س² − ٤ س + ٧ = ٠

، ∵ المميز = ب² − ٤ أ حـ

= (−٤)² − ٤ × ١ × ٧ = −١٢ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٠) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٢ س + س² + ٥

، بوضع س² + ٢ س + ٥ = ٠

، ∵ المميز = ب² − ٤ أ حـ

= (٢)² − ٤ × ١ × ٥ = −١٦ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية ، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(١١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = س² − ٤ س + ٤

، بوضع س² − ٤ س + ٤ = ٠

∴ (س − ٢)² = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د(س) = ٠ عندما س = ٢

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(١٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٦ س − س² − ٩

، بوضع ٦ س − س² − ٩ = ٠

∴ س² − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)² = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ < ٠

∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − {٣}



(١٣) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = $س^{٢}$ − ٨ س + ١٦

، بوضع $س^{٢}$ − ٨ س + ١٦ = ٠

∴ $(س − ٤)^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٤

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← (٤) → ∞
إشارة د(س): + + + + (صفر) + + + +

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٤) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = − $س^{٢}$ − ١٠ س − ٢٥

، بوضع − $س^{٢}$ − ١٠ س − ٢٥ = ٠

∴ $س^{٢}$ + ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ $(س + ٥)^{٢}$ = ٠ ∴ س = −٥

، ∵ أ < ٠

س: −∞ ← (−٥) → ∞
إشارة د(س): − − − − (صفر) − − − −

∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {−٥}

، د (س) = ٠ عندما س = −٥

∴ مجموعة حل المتباينة = {−٥}

(١٥) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٢ س − $س^{٢}$

، بوضع ٢ س − $س^{٢}$ = ٠

∴ س (٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢

، ∵ أ < ٠

س: −∞ ← (صفر) (٢) → ∞
إشارة د(س): − − − (صفر) + + + + (صفر) − − −

∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [٠ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٠ ، ٢]

٢

(١) ∵ $س^{٢}$ ≤ ٩ ∴ $س^{٢}$ − ٩ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

∴ د (س) = $س^{٢}$ − ٩

، بوضع $س^{٢}$ − ٩ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ٣

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← (−٣) (٣) → ∞
إشارة د(س): + + + + (صفر) − − − − (صفر) + + + +

∴ د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٣[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ٣]

(٢) ∵ $س^{٢}$ > ١٦ ∴ $س^{٢}$ − ١٦ > ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

∴ د (س) = $س^{٢}$ − ١٦

، بوضع $س^{٢}$ − ١٦ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ٤

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← (−٤) (٤) → ∞
إشارة د(س): + + + + + (صفر) − − − − (صفر) + + + +

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٤]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٤ ، ٤]

(٣) ∵ $س^{٢}$ + ٥ س < −٤

∴ $س^{٢}$ + ٥ س + ٤ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س + ٤

، بوضع $س^{٢}$ + ٥ س + ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← (−٤) (−١) → ∞
إشارة د(س): + + + + + (صفر) − − − − (صفر) + + + +

∴ د سالبة عندما س ∈]−٤ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٤ ، −١[

(٤) ∵ ٥ $س^{٢}$ + ١٢ س ≥ ٤٤

∴ ٥ $س^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٥ $س^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤

، بوضع ٥ $س^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤ = ٠

∴ (٥ س + ٢٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = $\frac{-٢٢}{٥}$ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← ($\frac{-٢٢}{٥}$) (٢) → ∞
إشارة د(س): + + + + (صفر) − − − − − − (صفر) + + + +

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [$\frac{-٢٢}{٥}$ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-٢٢}{٥}$ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]−$\frac{٢٢}{٥}$ ، ٢[

(٥) ∵ ٣ $س^{٢}$ ≤ ١١ س + ٤

∴ ٣ $س^{٢}$ − ١١ س − ٤ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١١ س − ٤

، بوضع ٣ $س^{٢}$ − ١١ س − ٤ = ٠

∴ (٣ س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = $\frac{-١}{٣}$ أ، س = ٤

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← ($\frac{-١}{٣}$) (٤) → ∞
إشارة د(س): + + + + (صفر) − − − − − − (صفر) + + + +

∴ د سالبة عندما س ∈]$\frac{-١}{٣}$ ، ٤[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-١}{٣}$ ، ٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = [$\frac{-١}{٣}$ ، ٤]

(٦) ∵ $س^{٢}$ ≥ ٦ س − ٩

∴ $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = $س^{٢}$ − ٦ س + ٩

، بوضع $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ $(س − ٣)^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ > ٠

س: −∞ ← (٣) → ∞
إشارة د(س): + + + + + + (صفر) + + + + +

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٧) ∵ ٣ − ٢ س ≥ $س^{٢}$

∴ $س^{٢}$ + ٢ س − ٣ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، ١ ، −٣ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(٨) ∵ ٧ س + ١٥ ≤ ٢ س^{٢}

∴ ٢ س^{٢} − ٧ س − ١٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٢ س^{٢} − ٧ س − ١٥

، بوضع ٢ س^{٢} − ٧ س − ١٥ = ٠

∴ (٢ س + ٣) (س − ٥) = ٠

∴ س = $\frac{-٣}{٢}$ أ، س = ٥

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، ٥ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥[

(٩) ∵ س^{٢} + ٥ ≤ ١ ∴ س^{٢} + ٤ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٤

، بوضع س^{٢} + ٤ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ − ٤ × ١ × ٤

= −١٦ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٠) ∵ − س^{٢} − ٧ < ٢

∴ − س^{٢} − ٩ < ٠ ∴ س^{٢} + ٩ > ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٩ ، بوضع س^{٢} + ٩ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ − ٤ × ١ × ٩

= −٣٦ < ٠

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(١١) ∵ (س − ٢)^{٢} ≥ ٩

∴ س^{٢} − ٤ س + ٤ ≥ ٩

∴ س^{٢} − ٤ س − ٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٤ س − ٥

، بوضع س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ س = ٥ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، ٥ ، −١ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]−١ ، ٥[

(١٢) ∵ (س − ٢)^{٢} ≤ −٥

∴ س^{٢} − ٤ س + ٤ ≤ −٥

∴ س^{٢} − ٤ س + ٩ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٩

، بوضع س^{٢} − ٤ س + ٩ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ

= (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٩ = −٢٠ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٣) ∵ س (س + ٢) − ٣ ≤ ٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، ١ ، −٣ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(١٤) ∵ (س + ٢)^{٢} + (س + ١) (س − ٤) < ٠

∴ س^{٢} + ٤ س + ٤ + س^{٢} − ٣ س − ٤ < ٠

∴ ٢ س^{٢} + س < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٢ س^{٢} + س

، بوضع ٢ س^{٢} + س = ٠

∴ س (٢ س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-١}{٢}$

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، صفر ، $\frac{-١}{٢}$ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د سالبة عندما س ∈]$\frac{-١}{٢}$ ، ٠[

∴ مجموعة حل المتباينة =]$\frac{-١}{٢}$ ، ٠[

(١٥) ∵ (س + ٣)^{٢} < ١٠ − ٣ (س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦ س + ٩ < ١ − ٣ س

∴ س^{٢} + ٩ س + ٨ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٩ س + ٨

، بوضع س^{٢} + ٩ س + ٨ = ٠

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠

س | ∞ ، −١ ، −٨ ، −∞
إشارة د(س) | + + + + | − − − − | + + + +
(صفر) (صفر)

∴ د سالبة عندما س ∈]−٨ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٨ ، −١[

(١٦) ∵ ٥ − ٢ س ≤ س^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س − ٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٥

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٥ = ٠

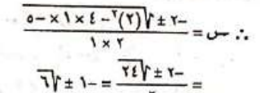


∴ س = (-٢ ± √((٢)^٢ - ٤ × ١ × -٥)) ÷ (٢ × ١)

= (-٢ ± √٢٤) ÷ ٢ = -١ ± √٦

∴ س = -١ + √٦ أ، س = -١ - √٦

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما
س ∈ ح - [-١ - √٦ ، -١ + √٦]
، د (س) = ٠ عندما
س ∈ {-١ - √٦ ، -١ + √٦}
∴ مجموعة حل المتباينة
= ح -]-١ - √٦ ، -١ + √٦[

٣

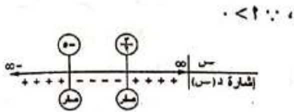
∵ د (س) = س^٢ - ٥ س + ٦
، بوضع س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = ٣
، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة عندما س ∈ ح - [٢ ، ٣]
، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}
، د سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[
∴ مجموعة حل المتباينة =]٢ ، ٣[

٤

∵ د (س) = ٢ س^٢ + ٧ س - ١٥
، بوضع ٢ س^٢ + ٧ س - ١٥ = ٠
∴ (٢ س - ٣) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٣/٢ أ، س = -٥
، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح - [-٥ ، ٣/٢]
، د (س) = ٠ عندما س ∈ {-٥ ، ٣/٢}
، د سالبة عندما س ∈]-٥ ، ٣/٢[
∴ مجموعة حل المتباينة = [-٥ ، ٣/٢]

٥

∵ د (س) = س^٢ + ٤ ، بوضع س^٢ + ٤ = ٠
∴ المميز = -٤ × ١ × ٤ = -١٦ < ٠
∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية
، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح
∴ مجموعة الحل للمتباينة = ∅

٦

د (س) = - س^٢ + ٢ س + ٣

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	-٥	٠	٣	٤	٣	٠	-٥

ومن الرسم نجد أن :

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ هى {-١ ، ٣}

(٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠
هى ح -]-١ ، ٣[

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠ هى]-١ ، ٣[

٧

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (أ) (٦) (د)

---

٨ حل نور هو الصحيح

---

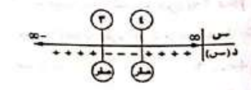
٩ حل إسلام هو الصحيح لأن مجموعة الحل = ح

---

١٠ (١) (د) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (أ)
(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)
(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٠

(١) ∵ د (س) = س^٢ - ٧ س + ١٢
، بوضع س^٢ - ٧ س + ١٢ = ٠
∴ (س - ٣) (س - ٤) = ٠
∴ س = ٣ أ، س = ٤



∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}
، مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠
هى ح - [٣ ، ٤]
، مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى]٣ ، ٤[
∴ الاختيار الخاطئ هو (د)

(٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :
د (س) = (س - ٢) (٣ س - ١)
، بوضع (س - ٢) (٣ س - ١) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = ١/٣

∴ مجموعة حل المتباينة = [١/٣ ، ٢]
∴ مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة الحل = ١ + ٢ = ٣

(٣) ∵ (س + ٣)^٢ < ٤ (س + ١)^٢
∴ س^٢ + ٦ س + ٩ < ٤ س^٢ + ٨ س + ٤
∴ ٣ س^٢ + ٢ س - ٥ > صفر
∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :
د (س) = ٣ س^٢ + ٢ س - ٥
، بوضع ٣ س^٢ + ٢ س - ٥ = ٠
∴ (٣ س + ٥) (س - ١) = ٠
∴ س = -٥/٣ أ، س = ١

∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [-٥/٣ ، ١]

(٤) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة
أ س^٢ + ب س + جـ = ٠
، أ > ٠ ، بفرض د (س) = أ س^٢ + ب س + جـ

∴ مجموعة حل المتباينة =]ل ، م[

(٥) ∵ المميز سالب ، أ < ٠

∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة تقع بالكامل أسفل محور السينات (سالبة).

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٦) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

∴ (ك − ٢)^{٢} − ٤ (٢) (−٥) ≥ ٠

∴ (ك − ٢)^{٢} ≥ −٤٠ متحققة لجميع قيم ك ∈ ح (١)

، ∵ الجذران أكبر من −١

∴ (معامل س^{٢}) × د (−١) > ٠

∴ ٢ (٢ − (ك −٢) −٥) > ٠

∴ ٢ (−ك − ١) > ٠   ∴ −ك − ١ > ٠

∴ ك < −١ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك < −١

(٧) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

∴ (−٢ ك)^{٢} − ٤ (ك^{٢} + ك − ٥) ≥ ٠

∴ ٤ ك^{٢} − ٤ ك^{٢} − ٤ ك + ٢٠ ≥ ٠

∴ ٤ ك ≤ ٢٠   ∴ ك ≤ ٥ (١)

، ∵ الجذران أقل من ٥   ∴ د (٥) > ٠

∴ ٢٥ − ١٠ ك + ك^{٢} + ك − ٥ > ٠

∴ ك^{٢} − ٩ ك + ٢٠ > ٠

∴ (ك − ٤) (ك − ٥) > ٠

∴ ك ∈ ح − [٤ ، ٥] (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ك ∈]−∞ ، ٤[

(٨) ∵ جذرا المعادلة غير حقيقيين

∴ المميز < صفر

∴ (− ك)^{٢} − ٤ (١) (١) < ٠

∴ ك^{٢} − ٤ < ٠

، المعادلة المرتبطة بالمتباينة ك^{٢} − ٤ = ٠

ك^{٢} = ٤

∴ ك = ٢   أ، ك = −٢

، ∵ أ > صفر

∴ حل المتباينة هو −٢ < ك < ٢

(٩) ∵ س^{٢} − ٤ ≤ س + ك

∴ س^{٢} − س − ٤ − ك ≤ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى [−٢ ، ٣]

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٣

∴ (−٢)^{٢} − (−٢) − ٤ − ك = ٠

∴ ك = ٢

(١٠) ∵ س^{٢} − ١٠ < ب س

∴ س^{٢} − ب س − ١٠ < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى]−٢ ، ٥[

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٥

∴ ب = −٢ + ٥   ∴ ب = ٣

(١١) ∵ أحد الجذرين فقط يقع فى الفترة]١ ، ٢[

∴ د (١) × د (٢) < ٠

∴ (١ − ب + ٣) × (٤ − ٢ ب + ٣) < ٠

∴ (٤ − ب) (٧ − ٢ ب) < ٠

∴ ب ∈]٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٤[

(١٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :

د (س) = س^{٢} − س − ٢

، بوضع س^{٢} − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢   أ، س = −١

، ∵ أ > ٠

∴ م$_{١}$ = [−١ ، ٢]

، الدالة المرتبطة بالمتباينة د :

د (س) = س^{٢} + س − ٢

، بوضع : س^{٢} + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢   أ، س = ١

، ∵ أ > ٠

∴ م$_{٢}$ = [−٢ ، ١]

∴ م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [−١ ، ١]

(١٣) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة

أ س^{٢} + أ س + أ + ٢ = ٠

، الدالة المرتبطة بالمعادلة

د (س) = أ س^{٢} + أ س + أ + ٢

∴ د (ل) = د (م) = صفر

فإذا كان : أ > صفر ، ٢ ∈]ل ، م[

∴ د (٢) < صفر

∴ (٢)^{٢} أ + ٢ أ + أ + ٢ < صفر

∴ ٧ أ + ٢ < صفر

∴ أ < $\frac{-٢}{٧}$ (مرفوض)

وإذا كان أ < صفر ، ٢ ∈]ل ، م[

∴ د (٢) > صفر   ∴ ٧ أ + ٢ > صفر

∴ أ > $\frac{-٢}{٧}$ ∴ $\frac{-٢}{٧}$ < أ < صفر

١١

∵ ١٠ > س^{٢} + ٢ س − ٥ ≥ ٣

∴ س^{٢} + ٢ س − ٥ < ١٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ١٥ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ١٥

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٣

، ∵ أ > ٠

∴ د سالبة عندما س ∈]−٥ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٥ ، ٣[(١)

، ∵ س^{٢} + ٢ س − ٥ ≥ ٣

∴ س^{٢} + ٢ س − ٨ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٨

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠



إشارة د(س): + + + + | − − − − − | + + + + ، س: $-\infty$ ... (−٤) ... (٢) ... ∞ ، صفر ، صفر

∴ د موجبة عندما س $\in$ ح − [−٤ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س $\in$ {−٤ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]−٤ ، ٢[(٢)

من (١) ، (٢) : $-\infty$ ... −٥ ... −٤ ... ٢ ... ٣ ... ∞

∴ مجموعة حل المتباينة ١٠ > س^{٢} + ٢س − ٥ ≥ ٣

=]−٥ ، −٤] ∪ [٢ ، ٣[

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

بالتعويض عن : ف = ٢٩,٤ متر ، ع = ٢٤,٥ متر/ث.

في العلاقة : ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}

∴ ٢٩,٤ = ٢٤,٥ ن − ٤,٩ ن^{٢}

∴ ٦ = ٥ ن − ن^{٢}

∴ ن^{٢} − ٥ ن + ٦ = ٠

∴ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٠

∴ ن = ٢ ثانية أ، ن = ٣ ثانية

<u>تفسير وجود جوابين :</u>

القذيفة تصعد إلى أعلى حتى تصل إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر

(رسم: ٢٩,٤ متر ، نقطة القذف)

بعد مرور [٢ ثانية] ثم تستمر في الصعود حتى تصل لأقصى ارتفاع ، ثم تعود إلى نفس الارتفاع (٢٩,٤ متر) بعد مرور [٣ ثانية] من لحظة إطلاقها.

٢

بالتعويض عن : ف = ١٠ أمتار

في العلاقة : ف = − ٤,٩ ن^{٢} + ٣,٥ ن + ١٠

∴ ١٠ = − ٤,٩ ن^{٢} + ٣,٥ ن + ١٠

∴ ٤,٩ ن^{٢} = ٣,٥ ن

∴ ٤,٩ ن = ٣,٥ حيث ن ≠ ٠ ∴ ن = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

٣

∵ مساحة الأرض الحالية = ٦ × ٩ = ٥٤ م^{٢}

∴ مساحة الأرض بعد مضاعفة مساحتها

= ٢ × ٥٤ = ١٠٨ م^{٢}

ونفرض أن الزيادة في بُعدي الأرض = س م

∴ (٦ + س) (٩ + س) = ١٠٨

∴ س^{٢} + ١٥ س + ٥٤ = ١٠٨

∴ س^{٢} + ١٥ س − ٥٤ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١٨) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١٨ (مرفوض)

∴ المقدار المضاف = ٣ أمتار.

٤

(١) ∵ − ١٦ ن^{٢} + ٨٠ ن + ٢٠ = ٠

∴ أ = − ١٦ ، ب = ٨٠ ، جـ = ٢٠

∴ ن = $\frac{-٨٠ \pm \sqrt{٦٤٠٠ + ١٢٨٠}}{-٣٢}$ = $\frac{-٨٠ \pm \sqrt{٧٦٨٠}}{-٣٢}$

∴ ن ≈ ٥,٢٤ أ، ن ≈ −٠,٢٤ (مرفوض)

∴ الكرة ستصل إلى سطح الأرض بعد ٥,٢٤ ثانية تقريبًا

(٢) نحسب نقطة رأس المنحنى لمعرفة أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

∵ نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

= (٢,٥ ، ١٢٠)

أي أن : أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو ١٢٠ قدمًا وتصله بعد ٢,٥ ثانية وبالتالي فإنها لن تصل إلى ارتفاع ١٣٠ قدمًا.

٥

(١) عند ن = ٠ ∴ ع = ٩١ مليونًا

(٢) عند ن = ٢٠

∴ ع = (٢٠)^{٢} + ١,٢ × ٢٠ + ٩١ = ٥١٥ مليونًا

(٣) عند ع = ٢٠٣ ∴ ٢٠٣ = ن^{٢} + ١,٢ ن + ٩١

∴ ن^{٢} + ١,٢ ن − ١١٢ = ٠

ن = $\frac{-١,٢ \pm \sqrt{١,٤٤ - ٤ \times ١ \times -١١٢}}{٢}$

∴ ن = ١٠ أ، ن = −١١,٢ (مرفوض)

∴ يبلغ عدد السكان ٢٠٣ ملايين بعد ١٠ سنوات أي في عام ٢٠٢٣

٦

شدة التيار الكلية = ٤ − ٢ ت + $\frac{٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{(٤ - ٢ ت)(٢ + ت) + ٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{٨ - ٢ ت^{٢} + ٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ = $\frac{١٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{١٦ + ٣ ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

= $\frac{٣٢ - ١٠ ت - ٣ ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}}$

= $\frac{٣٥ - ١٠ ت}{٥}$ = (٧ − ٢ ت) أمبير.

٧

شدة التيار المار في المقاومة الأخرى

= ٦ + ٤ ت − $\frac{١٧}{٤ - ت}$ = $\frac{(٦ + ٤ ت)(٤ - ت) - ١٧}{٤ - ت}$

= $\frac{٢٤ + ١٠ ت - ٤ ت^{٢} - ١٧}{٤ - ت}$ = $\frac{١١ + ١٠ ت}{٤ - ت}$

= $\frac{١١ + ١٠ ت}{٤ - ت} \times \frac{٤ + ت}{٤ + ت}$ = $\frac{٤٤ + ٥١ ت + ١٠ ت^{٢}}{١٦ - ت^{٢}}$

= $\frac{٣٤ + ٥١ ت}{١٧}$ = (٢ + ٣ ت) أمبير.

٨

(١) ∵ د (ن) = ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن + ٤٨٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= (−٩٦)^{٢} − ٤ × ١٢ × ٤٨٠

= −١٣٨٢٤ < ٠

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة

، ∵ أ = ١٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم ن $\in$ ح

(٢) • في عام ١٩٩٠ : ن = ٠ ∴ د (٠) = ٤٨٠

∴ إنتاج المنجم = ٤٨٠ ألف أوقية

• في عام ٢٠٠٥ : ن = ١٥

∴ د (١٥) = ١٢ × (١٥)^{٢} − ٩٦ × ١٥ + ٤٨٠

= ١٧٤٠

∴ إنتاج المنجم = ١٧٤٠ ألف أوقية

(٣) ∵ د (ن) = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن + ٤٨٠ = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن − ١٥٣٦ = ٠

∴ ن^{٢} − ٨ ن − ١٢٨ = ٠

∴ (ن − ١٦) (ن + ٨) = ٠

∴ ن = ١٦ أ، ن = −٨ (مرفوض)

∴ العام المطلوب هو : ٢٠٠٦

إرشادات الوحدة الثانية

إرشادات تمارين 7

١

(١) (ب)　(٢) (ب)　(٣) (جـ)

(٤) (ب)　(٥) (أ)　(٦) (جـ)

٢

(١) الزاوية الموجهة د أ حـ ء ليست فى وضعها القياسى ، لأن رأس الزاوية حـ ليست نقطة الأصل و

(٢) الزاوية الموجهة د أ و هـ فى وضعها القياسى.

(٣) الزاوية الموجهة د هـ و أ ليست فى وضعها القياسى ، لأن ضلعها الابتدائى و هـ لا يقع على و س

(٤) الزاوية الموجهة د أ و ن فى وضعها القياسى.

(٥) الزاوية الموجهة د ب و ن ليست فى وضعها القياسى ، لأن ضلعها الابتدائى و ب لا يقع على و س

(٦) الزاوية الموجهة د أ و ب فى وضعها القياسى.

٣

(١) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليست نقطة الأصل و

(٢) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٣) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٤) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٥) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليس نقطة الأصل و

(٦) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٧) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٨) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٩) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

٤

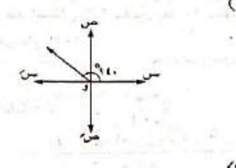
(١) -٣٠٦°　(٢) ٢٧٠°　(٣) ٢٢٥°

(٤) ٢٨َ ٣٠٠°　(٥) ٢٤٥°　(٦) -٢٠َ ٦٩°

٥

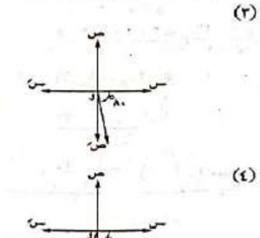
(١)

(٢)

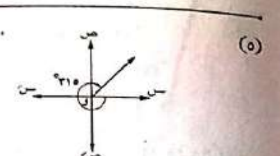


(٣)

(٤)



(٥)



٦

(١) الأول　(٢) الثالث　(٣) الرابع

(٤) الثانى　(٥) الثانى　(٦) الأول

(٧) ربعية　(٨) ربعية

٧

(١) ٣٠٤° ، الرابع　(٢) ٢٤٠° ، الثالث

(٣) ١٤٥° ، الثانى　(٤) ٢٢٠° ، الثالث

(٥) ٥٥° ، الأول　(٦) ٢١٠° ، الثالث

(٧) ٤٠َ ٦٥° ، الأول　(٨) ٤٢َ ١٢٩° ، الثانى

٨

(١) -٢٧٧°　(٢) -٢٢٤°　(٣) -٢٧٠°

(٤) -٩٦°　(٥) -١١٦°　(٦) -١٠°

٩

(١) ٤٠٠° ، -٣٢٠°　(٢) ٥١٠° ، -٢١٠°

(٣) ٢٣٥° ، -٤٨٥°　(٤) ١٢٠° ، -٦٠٠°

(٥) ١٨٠° ، -٥٤٠°

١٠

(١) (د)　(٢) (جـ)　(٣) (ب)　(٤) (جـ)

(٥) (جـ)　(٦) (جـ)　(٧) (جـ)　(٨) (جـ)

(٩) (ب)　(١٠) (ب)

١١

إجابة زياد هى الإجابة الصحيحة.

١٢

(١) (د)　(٢) (جـ)　(٣) (جـ)　(٤) (د)

(٥) (جـ)　(٦) (جـ)　(٧) (د)

إرشادات لحل رقم ١٢

(١) ∵ أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين.

∴ ب = أ ± ٣٦٠° ن

∴ ب + حـ = أ + حـ ± ٣٦٠° ن

∴ (ب + حـ) ، (أ + حـ) يمثلان قياسى زاويتين متكافئتين.

، ب − حـ = أ − حـ ± ٣٦٠° ن

∴ (ب − حـ) ، (أ − حـ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.

، حـ ب = حـ أ ± ٣٦٠° حـ ن ، حـ ∈ ص

∴ (حـ ب) ، (حـ أ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.

∴ الإجابة هى (د)

(٢) ∵ أ = − أ ± ٣٦٠° ن

بوضع ن = ١　أ = − أ + ٣٦٠°

∴ ٢ أ = ٣٦٠°　∴ أ = ١٨٠°

(٣) (٣ س − ٥)° = (٣ ص − ٥)° + ٣٦٠°

∴ ٣ س − ٣ ص = ٣٦٠°

∴ س − ص = ١٢٠°

(٤) (θ + ٢٠)° = (٢٠ − ٨ θ)° + ٣٦٠°

∴ ٩ θ = ٣٦٠°　∴ θ = ٤٠°

(٥) الضلع النهائى يمثل الزاوية = ٦٠° + ٢ ١/٤ × ٣٦٠°
= ٨٧٠°

وهذه الزاوية مكافئة للزاوية التى قياسها
= ٨٧٠° − ٢ × ٣٦٠° = ١٥٠°

(٦) الضلع النهائى يمثل الزاوية
= ٣٠° − ٢ ١/٢ × ٣٦٠° = −١٢٣٠°

وهذه الزاوية مكافئة للزاوية التى قياسها
= −١٢٣٠° + ٤ × ٣٦٠° = ٢١٠° والضلع النهائى لهذه الزاوية يقع فى الربع الثالث.

(٧) الضلع النهائى يمر بالنقطة (−١ ، ٠)

∴ الزاوية الموجهة المعطاة هى زاوية ربعية.

∴ الإجابة هى (د)

إرشادات تمارين 8

١

$\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{١٣٥^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{٣}{٤}\pi$

(٢) $\theta^{ء} = \frac{٩٠^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{١}{٢}\pi$

(٣) $\theta^{ء} = \frac{٣٠٠^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{٥}{٣}\pi$

(٤) $\theta^{ء} = \frac{-٢٣٥^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = -\frac{٤٧}{٣٦}\pi$

(٥) $\theta^{ء} = -\frac{٢١٠^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = -\frac{٧}{٦}\pi$

(٦) $\theta^{ء} = \frac{١١٢,٥^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{٥}{٨}\pi$

(٧) $\theta^{ء} = \frac{٣٩٠^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{١٣}{٦}\pi$

(٨) $\theta^{ء} = \frac{٧٨٠^\circ}{١٨٠^\circ}\pi = \frac{١٣}{٣}\pi$

٢

$\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

(١) $\theta^{ء} = ٥٨^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ١,٠١٢^{ء}$

(٢) $\theta^{ء} = ٥٦,٦^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٠,٩٨٨^{ء}$

(٣) $\theta^{ء} = ٣٧^\circ\ ١٥' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٠,٦٥٠^{ء}$

(٤) $\theta^{ء} = ١١٥^\circ\ ٢٨'\ ٩'' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٢,٠١٨^{ء}$

(٥) $\theta^{ء} = ٢٥٧^\circ\ ٥٤' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٤,٤٨٦^{ء}$

(٦) $\theta^{ء} = ١٦٠^\circ\ ٥٠'\ ٤٨'' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٢,٨٠٧^{ء}$

٣

$س^\circ = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

(١) $س^\circ = \frac{١١}{١٥} \times ١٨٠^\circ = ١٣٢^\circ$

(٢) $س^\circ = ٠,٧٢ \times ١٨٠^\circ = ١٢٩^\circ\ ٣٦'$

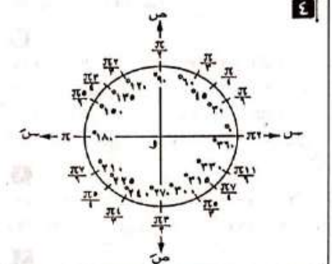
(٣) $س^\circ = ٠,٤٩ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ٢٨^\circ\ ٤'\ ٤٠''$

(٤) $س^\circ = -١,٦٧ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq -(٩٥^\circ\ ٤١'\ ٣'')$

(٥) $س^\circ = ٢,٢٧ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ١٣٠^\circ\ ٤١'\ ٣''$

(٦) $س^\circ = -٣\frac{١}{٢} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq -(٢٠٠^\circ\ ٣٢'\ ٧'')$

٤



٥

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{ء}$

$\therefore س^\circ = ١,٢ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ٦٨^\circ\ ٤٥'\ ٦٨''$

(٢) $\theta^{ء} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ء}$

$\therefore س^\circ = ٢ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ١١٤^\circ\ ٣٥'\ ٣٠''$

(٣) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore س^\circ = \frac{١}{٣} \times ١٨٠^\circ = ٦٠^\circ$

(٤) $\theta^{ء} = \frac{١٥,٧٢}{٩,١٧} = ١\frac{٥}{٧}^{ء}$

$\therefore س^\circ = ١\frac{٥}{٧} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ٩٨^\circ\ ١٣'\ ٦٧''$

٦

$نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{٩}{٨}\pi \simeq ٣,٥٣٤^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٢٢,٥}{٣,٥٣٤} \simeq ٦,٣٧$ سم

(٢) $نق = \frac{٣٨,٣٥}{٠,٧٦٧} = ٥٠$ سم

(٣) $\theta^{ء} = ١٣٩^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٢,٤٢٦^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٢٤,٣٢٥}{٢,٤٢٦} \simeq ١٠$ سم

(٤) $\theta^{ء} = ٧٨^\circ\ ٣٦'\ ٣٦'' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ١,٣٧^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٤٣,٩٢}{١,٣٧} \simeq ٣٢$ سم

٧

(١) $ل = \theta^{ء} \times نق = ١,٦ \times ١٢,٥ = ٢٠$ سم

(٢) $ل = \theta^{ء} \times نق = ٢,٤٣ \times ٢٠ = ٤٨,٦$ سم

(٣) $ل = \theta^{ء} \times نق = ٦٧^\circ\ ٤٠' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ٧,٥$

$\simeq ٨,٩$ سم

(٤) $ل = \theta^{ء} \times نق = ١٠٤^\circ\ ٥٨'\ ٩'' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ١٥$

$\simeq ٢٧,٥$ سم

٨

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (جـ)		

٩

$\because$ قياس الزاوية المحيطية $= ٤٥^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

$= ٢ \times ٤٥^\circ = ٩٠^\circ$

$\therefore \theta^{ء} = ٩٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore نق = \frac{ل}{\theta^{ء}} = ١٢ \div \frac{\pi}{٢} = \frac{٢٤}{\pi}$ سم

$\therefore$ محيط الدائرة $= ٢\pi$ نق $= ٢\pi \times \frac{٢٤}{\pi} = ٤٨$ سم

١٠

$\because ل = ٢$ نق $\quad \therefore \theta^{ء} = \frac{٢\ نق}{نق} = ٢^{ء}$

$\therefore س^\circ = ٢ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ١١٤^\circ\ ٣٥'\ ٢٩''$

١١

$\because \theta^{ء} = ١٠٥^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{٧\pi}{١٢}$

$\therefore نق = \frac{ل}{\theta^{ء}} = \frac{٧}{٣}\pi \div \frac{٧\pi}{١٢}$

$= \frac{٧}{٣}\pi \times \frac{١٢}{٧\pi} = ٤$ سم

$\therefore$ طول القطر $= ٨$ سم

١٢

القياس الستينى للزاوية الأخرى $= \frac{١}{٤} \times ١٨٠^\circ = ٤٥^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الثالثة $= ١٨٠^\circ - (٦٠^\circ + ٤٥^\circ) = ٧٥^\circ$

$\therefore$ القياس الدائرى لها $= ٧٥^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{٥}{١٢}\pi$

١٣

$\frac{١١}{٦}^{ء}$ تكافئ $\frac{١١}{٦} \times \frac{١٨٠^\circ}{\frac{٢٢}{٧}} = ١٠٥^\circ$

، $٢\frac{٤}{٩}^{ء}$ تكافئ $\frac{٢٢}{٩} \times \frac{١٨٠^\circ}{\frac{٢٢}{٧}} = ١٤٠^\circ$

$\therefore$ القياس الستينى للزاوية الرابعة

$= ٣٦٠^\circ - (١٠٥^\circ + ١٤٠^\circ + ٤٥^\circ) = ٧٠^\circ$

$\therefore$ القياس الدائرى لها $= ٧٠^\circ \times \frac{\frac{٢٢}{٧}}{١٨٠^\circ} = \frac{١١}{٩}^{ء}$

١٤

بفرض أن قياسى الزاويتين هما :

$س^\circ$ ، $ص^\circ$ ، $س^\circ > ص^\circ$

$\therefore س^\circ + ص^\circ = ٧٠^\circ$ (١)

، س° – ص° = $\frac{١}{٥}$ × ١٨٠° = ٣٦° (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ س = ١٠٦° ∴ س° = ٥٣°

∴ س ء = ٥٣° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٥٣}{١٨٠}\pi$

، ص° = ٧٠° – ٥٣° = ١٧°

∴ ص ء = ١٧° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{١٧}{١٨٠}\pi$

١٥

بفرض أن قياسى الزاويتين هما :

س ، ص ، س° > ص° ∴ س ء + ص ء = π

، س ء – ص ء = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ٢ س ء = $\frac{٤}{٣}\pi$ ∴ س ء = $\frac{٢}{٣}\pi$

، ص ء = $\frac{١}{٣}\pi$

، س° = $\frac{٢}{٣}$ × ١٨٠° = ١٢٠°

، ص° = $\frac{١}{٣}$ × ١٨٠° = ٦٠°

١٦

مساحة Δ أ م ب = $\frac{١}{٢}$ × أ م × م ب

، ∵ أ م = ب م = نق ∴ $\frac{١}{٢}$ نق² = ٣٢

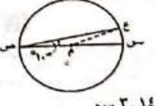
∴ نق² = ٦٤ ∴ نق = ٨ سم

∴ طول أب⌒ = ٩٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٨ ≈ ١٢,٥٧ سم

∴ محيط الشكل المظلل = ٨ + ٨ + ١٢,٥٧

= ٢٨,٥٧ سم

١٧



ق(∠ ع م س) = ٢٠°

∴ طول س ع⌒

= ٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٩ = ٣,١٤ سم

١٨

العمل : نرسم أ م

البرهان :

∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة م

∴ م ب ⊥ أ ب ، م حـ ⊥ أ حـ

، م ب نصف قطر فيها

∴ ق(∠م) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠م) المنعكسة = ٣٦٠° – ١٢٠° = ٢٤٠°

، ∵ أ م ينصف ∠أ ∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°

∴ م ب = $\frac{١}{٢}$ أ م

، ∵ م ب = نق ∴ أ م = ٢ نق

فى Δ أ ب م القائم الزاوية فى ب

(٢ نق)² = نق² + (١٢)² ∴ ٣ نق² = ١٤٤

∴ نق² = ٤٨ ∴ نق = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ طول ب حـ⌒ الأكبر = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٤ $\sqrt{٣}$

≈ ٢٩ سم

١٩

∵ ∠حـ قائمة

∴ أب قطر

∴ نق = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢ سم

، ∵ ∠حـ قائمة ، ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

نرسم م حـ حيث م مركز الدائرة منتصف أب

∴ ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠أ م حـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ب حـ⌒ يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠°

∴ طول ب حـ⌒ = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ ≈ ١٢,٦ سم

، ∵ أ حـ⌒ يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠°

∴ طول أ حـ⌒ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ ≈ ٢٥,١ سم

، ∵ أب⌒ يقابل زاوية مركزية قياسها ١٨٠°

∴ طول أب⌒ (وهو نصف محيط الدائرة)

= ١٨٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ ≈ ٣٧,٧ سم

٢٠



ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠أ)

= ١٢٠°

∴ طول ب حـ⌒ الأصغر

= ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥ ≈ ١٥,٧ سم

، ق(∠أ م حـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٠٨°

∴ طول أ حـ⌒ الأصغر = ١٠٨° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥

≈ ١٤,١ سم

، ق(∠أ م ب) = ٣٦٠° – (١٢٠° + ١٠٨°) = ١٣٢°

∴ طول أب⌒ الأصغر = ١٣٢° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥

≈ ١٧,٣ سم

٢١

(١) (ب)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (حـ)
(٥) (ب)	(٦) (حـ)	(٧) (حـ)	(٨) (ب)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	

إرشادات لحل رقم ٢١

(١) طول القوس = θ ء نق = $\frac{٧٢°}{١٨٠°}$ × π × ١٤

= $\frac{٢٨}{٥}\pi$ سم

∴ محيط الدائرة = $\frac{٢٨}{٥}\pi$

∴ ٢ π نق = $\frac{٢٨}{٥}\pi$

∴ نق = $\frac{١٤}{٥}$ = ٢,٨ سم

(٢) ∵ ٥ < طول القوس أب⌒ < ٦

∴ ٥ < $\frac{س°}{١٨٠°}$ × π × ١٠ < ٦

∴ ٥ < $\frac{\pi}{١٨}$ س < ٦

∴ ٢٨,٦° < س < ٣٤,٤°

(٣) ∵ النسبة بين قياسات زوايا الشكل الرباعى

= ٥ : ٤ : ٩ : ٦

∴ ٥ س + ٤ س + ٩ س + ٦ س = ٣٦٠°

∴ ٢٤ س = ٣٦٠° ∴ س = ١٥°

∴ قياس أصغر زوايا الشكل الرباعى = ٤ × ١٥°

= ٦٠°

، بالقياس الدائرى = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{\pi}{٣}$

(٤) عدد الساعات بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات عند الثانية والنصف تمامًا = ٣,٥ ساعة

∴ الزاوية بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات

= $\frac{٣,٥}{١٢}$ × ٢ π = $\frac{٧}{١٢}\pi$

(٥) القياس الدائرى للزاوية ٦٠° = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{\pi}{٣}$

بفرض أن نصف قطر دائرته نق١

∴ طول القوس = نق١ × $\frac{\pi}{٣}$

، القياس الدائرى للزاوية ٨٠° = ٨٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$

= $\frac{٤}{٩}\pi$

بفرض أن نصف قطر دائرته نق٢

∴ طول القوس = نق٢ × $\frac{٤}{٩}\pi$

∴ نق١ × $\frac{\pi}{٣}$ = نق٢ × $\frac{٤}{٩}\pi$ ∴ $\frac{نق١}{نق٢}$ = $\frac{٤}{٣}$

(٦) عدد الدورات فى الثانية الواحدة = $\frac{٤٥}{٦٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ الزاوية التى تدورها نقطة على سطحها الجانبى فى الثانية = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ π = $\frac{٣\pi}{٢}$

(٧) (قياس الدائرة)ء = ٢ π ≈ ٦,٢٨

، ∵ ٦,٢٨ < ن حيث ن أكبر عدد صحيح ممكن

∴ ن = ٦

(٨) عدد الدورات التى يقطعها عقرب الدقائق من السادسة صباحًا حتى الثالثة والربع عصرًا

= ٩ $\frac{١}{٤}$ دورة

∴ المسافة التى يقطعها رأس عقرب الدقائق

= ٩ $\frac{١}{٤}$ × ٢ π × ٨ = ١٤٨ π سم



(٩) عند دوران الترس الأصغر لفة واحدة عكس عقرب الساعات يدور الترس الأكبر $\frac{١}{٢}$ دورة فى اتجاه عقرب الساعات.

∴ الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر

$= -\frac{١}{٢} \times ٢\pi = \frac{-٢\pi}{٢}$

(١٠) محيط الدائرة م $= ٢\pi \times ٧ = ١٤\pi$ سم

∴ طول $(\overset{\frown}{أب}) = ١٤\pi$

∴ ق $(\angle أ م ب) = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نق}} = \frac{١٤\pi}{٢١} = \frac{٢\pi}{٣}$

(١١) ∵ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم.

∴ ق $(\angle أ م ب) = \frac{٢\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

∵ $\triangle$ أ م ب مثلث متساوى الأضلاع

∴ نق = ٤ سم

∴ طول $(\overset{\frown}{أب}) = \frac{\pi}{٣} \times ٤ = \frac{٤\pi}{٣}$ سم

٢٢

القياس الستينى للزاوية التى يصنعها المستقيم مع محور السينات $= \frac{١٨٠^\circ}{٣} = ٦٠^\circ$

∴ ميل المستقيم = طا $٦٠^\circ = \sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى : ص $= \sqrt{٣}$ س + حـ

∵ الزاوية فى وضعها القياسى

∴ حـ = ٠ ∴ ص $= \sqrt{٣}$ س

٢٣

العمل : نرسم $\overline{ب م}$

البرهان :

∵ ب م = حـ ء

(قطران فى المستطيل)

∴ ب م = ١٠ سم ∴ نق = ١٠ سم

، ∵ قياس الزاوية المركزية $= \frac{\pi}{٢}$

∴ ل (طول القوس $\overset{\frown}{أ ب هـ}$) $= \theta^{د} \times$ نق

$= \frac{\pi}{٢} \times ١٠ = ٥\pi$ سم

إرشادات تمارين 9

١

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (أ)	(٧) (أ)	(٨) (د)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (أ)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)		

٢

(١) ∵ $٢٧٠^\circ < ٣٥٠^\circ < ٣٦٠^\circ$

∴ ٣٥٠° تقع فى الربع الرابع

∴ جتا ٣٥٠° موجبة

(٢) ∵ $٩٠^\circ < ١٠٠^\circ < ١٨٠^\circ$

∴ ١٠٠° تقع فى الربع الثانى

∴ طا ١٠٠° سالبة

(٣) ∵ $١٨٠^\circ < ٢٦٥^\circ < ٢٧٠^\circ$

∴ ٢٦٥° تقع فى الربع الثالث

∴ قا ٢٦٥° سالبة

(٤) ∵ $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠^\circ}{٤} = ٢٢٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثالث

∴ جا $\frac{٥\pi}{٤}$ سالبة

(٥) ∵ $\frac{٣\pi}{٧} = \frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٧} = ٧٧\frac{١}{٧}^\circ$

وهى تقع فى الربع الأول

∴ قتا $\frac{٣\pi}{٧}$ موجبة

(٦) ∵ $\frac{٣\pi}{٤} = \frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٤} = ١٣٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثانى

∴ ظتا $\frac{٣\pi}{٤}$ سالبة

(٧) ∵ طا ٤١٠° = طا $(٥٠^\circ + ٣٦٠^\circ)$ = طا ٥٠°

، ∵ ٥٠° تقع فى الربع الأول

∴ طا ٤١٠° موجبة

(٨) ∵ قتا ١٢٠٠° = قتا $(١٢٠^\circ + ٣ \times ٣٦٠^\circ)$

= قتا ١٢٠°

، ∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ قتا ١٢٠٠° موجبة

(٩) ∵ جتا -١٦٥° = جتا $(-١٦٥^\circ + ٣٦٠^\circ)$ = جتا ١٩٥°

، ∵ ١٩٥° تقع فى الربع الثالث

∴ جتا (-١٦٥°) سالبة

(١٠) ∵ $\frac{٣٢\pi}{٣} = \frac{٣٢ \times ١٨٠^\circ}{٣} = ١٩٢٠^\circ$

$= (١٢٠^\circ + ٥ \times ٣٦٠^\circ)$

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ = ظتا ١٢٠°

، ∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ سالبة

(١١) ∵ $\frac{-٣\pi}{٤} = \frac{-٣ \times ١٨٠^\circ}{٤} = -١٣٥^\circ$

$= (-١٣٥^\circ + ٣٦٠^\circ) = ٢٢٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثالث

∴ ظتا $\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)$ موجبة

(١٢) ∵ $-\frac{٢٥\pi}{٦} = -\frac{٢٥ \times ١٨٠^\circ}{٦} = -٧٥٠^\circ$

$= (-٧٥٠^\circ + ٣ \times ٣٦٠^\circ) = ٣٣٠^\circ$

∴ قا $\left(\frac{-٢٥\pi}{٦}\right)$ = قا ٣٣٠°

، ∵ ٣٣٠° تقع فى الربع الرابع

∴ قا $\left(-\frac{٢٥\pi}{٦}\right)$ موجبة

٣

(١) ∵ س $= \frac{١}{٢}$ ، ص $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا $\theta = \frac{١}{٢}$

، طا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{١}$ ، ظتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

، قتا $\theta = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، قا $\theta = \frac{٢}{١}$

(٢) ∵ س $= -\frac{٣}{٥}$ ، ص $= -\frac{٤}{٥}$

∴ جا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، جتا $\theta = -\frac{٣}{٥}$

، طا $\theta = \frac{٤}{٣}$ ، ظتا $\theta = \frac{٣}{٤}$

، قتا $\theta = -\frac{٥}{٤}$ ، قا $\theta = -\frac{٥}{٣}$

(٣) ∵ س = ٠ ، ص = −١

∴ جا θ = −١ ، جتا θ = ٠

، طا θ غير معرفة ، ظتا θ = ٠

، قتا θ = −١ ، قا θ غير معرفة.

٤

(١) ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $(٠,٦)^٢ + ص^٢ = ١$

∴ $ص^٢ = ٠,٦٤$ ∴ ص = ٠,٨ حيث ص > ٠

∴ ب (٠,٦ ، ٠,٨)

∴ جتا θ = ٠,٦ ، جا θ = ٠,٨ ، طا $\theta = \frac{٤}{٣}$

، قا $\theta = \frac{٥}{٣}$ ، قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$ ، ظتا $\theta = \frac{٣}{٤}$

(٢) ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$

∴ $س^٢ + (-٠,٦)^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = ٠,٦٤$

∴ س = ٠,٨ حيث س > ٠

∴ ب (٠,٨ ، −٠,٦)

∴ جتا θ = ٠,٨ ، جا θ = −٠,٦ ، طا $\theta = -\frac{٣}{٤}$

، قا $\theta = \frac{٥}{٤}$ ، قتا $\theta = \frac{-٥}{٣}$ ، ظتا $\theta = \frac{-٤}{٣}$

(٣) ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $\frac{٣}{٤} + ص^٢ = ١$

∴ $ص^٢ = \frac{١}{٤}$

∴ ص $= \frac{١}{٢}$ حيث $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$



∴ ب $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا θ = $\frac{1}{2}$

، ظا θ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، قا θ = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

، قتا θ = ٢ ، ظتا θ = $-\sqrt{3}$

(٤) ∵ $س^2 + ص^2 = 1$ ∴ $س^2 + \frac{5}{9} = 1$

∴ $س^2 = \frac{4}{9}$

∴ س = $-\frac{2}{3}$ حيث س < ٠

∴ ب $\left(-\frac{2}{3} ، \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{2}{3}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$

، ظا θ = $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ، قا θ = $-\frac{3}{2}$

، قتا θ = $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ، ظتا θ = $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

(٥) ∵ $س^2 + ص^2 = 1$ ∴ $1 + ص^2 = 1$

∴ $ص^2 = 0$ ∴ ص = ٠

∴ ب (−١ ، ٠)

∴ جتا θ = −١ ، جا θ = ٠ ، ظا θ = ٠

، قا θ = −١ ، قتا θ غير معرفة

، ظتا θ غير معرفة

(٦) ∵ $س^2 + ص^2 = 1$

∴ $(-س)^2 + س^2 = 1$ ∴ $2 س^2 = 1$

∴ س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث س < ٠

∴ ب $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظا θ = −١

، قا θ = $-\sqrt{2}$ ، قتا θ = $\sqrt{2}$ ، ظتا θ = −١

(٧) ∵ $س^2 + ص^2 = 1$

∴ $س^2 + س^2 = 1$ ∴ $س^2 = \frac{1}{2}$

∴ س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث س < ٠

∴ ب $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

∴ جتا θ = جا θ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظا θ = ظتا θ = ١

، قا θ = قتا θ = $-\sqrt{2}$

(٨) ∵ θ فى الربع الثالث

∴ كل من ٩ أ ، ١٢ أ سالبة ∴ أ < ٠

، ∵ $س^2 + ص^2 = 1$

∴ $81 أ^2 + 144 أ^2 = 1$ ∴ $225 أ^2 = 1$

∴ $أ^2 = \frac{1}{225}$ ∴ أ = $-\frac{1}{15}$

∴ ب $\left(-\frac{9}{15} ، -\frac{12}{15}\right) = \left(-\frac{3}{5} ، -\frac{4}{5}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{3}{5}$ ، جا θ = $-\frac{4}{5}$ ، ظا θ = $\frac{4}{3}$

، قا θ = $-\frac{5}{3}$ ، قتا θ = $-\frac{5}{4}$ ، ظتا θ = $\frac{3}{4}$

(٩) ∵ θ فى الربع الرابع

∴ $\frac{3}{2}$ أ > ٠ ، −٢ أ < ٠ ∴ أ > ٠

، ∵ $س^2 + ص^2 = 1$ ∴ $\frac{9}{4} أ^2 + 4 أ^2 = 1$

∴ $\frac{25}{4} أ^2 = 1$ ∴ $أ^2 = \frac{4}{25}$

∴ أ = $\frac{2}{5}$ ∴ ب $\left(\frac{3}{5} ، -\frac{4}{5}\right)$

∴ جتا θ = $\frac{3}{5}$ ، جا θ = $-\frac{4}{5}$ ، ظا θ = $-\frac{4}{3}$

، قا θ = $\frac{5}{3}$ ، قتا θ = $-\frac{5}{4}$ ، ظتا θ = $-\frac{3}{4}$

٥

(١) جا ٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠° + جا ٢٧٠°

= ٠ + ١ + ٠ − ١ = ٠

(٢) ظا ٠° + ظا ٤٥° + ظا ١٨٠° = ٠ + ١ + ٠ = ١

(٣) جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظتا ٤٥° = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

(٤) ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° + جتا² ٩٠°

= $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

(٥) جا ١٨٠° جتا ٤٥° − جتا ١٨٠° جا ٤٥°

= $0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(٦) قا $\frac{\pi}{6}$ ظا $\frac{\pi}{3}$ − ظتا $\frac{\pi}{3}$ جتا $\frac{\pi}{6}$

= قا ٣٠° ظا ٦٠° − ظتا ٦٠° جتا ٣٠°

= $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(٧) جتا $\frac{\pi}{2}$ جتا ٠° + جا $\frac{3\pi}{2}$ جا $\frac{\pi}{2}$

= جتا ٩٠° × جتا ٠° + جا ٢٧٠° × جا ٩٠°

= $0 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$

(٨) $\frac{ظا^2 60° - ظا^2 45°}{قا^2 30° - قتا^2 45°} = \frac{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}$

$= \frac{3 - 1}{\frac{4}{3} - 2} = -3$

(٩) $\frac{4 جا^2 30° - 2 ظا 45° جتا 0°}{2 جتا 60° + 2 جا 45° جتا 45°}$

$= \frac{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times 1}{2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -1$

(١٠) ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

$= 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 \times 2 + (-1) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= -\frac{11}{8}$

٦

(١) الطرف الأيمن = ٢ × (١)² = ٢

، الطرف الأيسر = −٢ × (−١) = ٢

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٢) الطرف الأيمن = جتا ٩٠° = ٠ ،

، الطرف الأيسر = جتا² ٤٥° − جا² ٤٥°

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٣) الطرف الأيمن = $2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1$

= ١ = الطرف الأيسر.

(٤) الطرف الأيمن = $3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

= $\frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$ = الطرف الأيسر.

(٥) الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 1$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{4}$

= الطرف الأيسر.

(٦) الطرف الأيمن = $3(1)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

، الطرف الأيسر = $\frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٧) الطرف الأيمن = $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2$

$= 2 + \frac{4}{3} - 1 = \frac{7}{3}$

= الطرف الأيسر.

(٨) الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

، الطرف الأيسر = جا² ٤٥° = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٩) الطرف الأيمن = $3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$- \frac{1}{4}(1)^2(2)^2 = 3 \times \frac{1}{3}$

$+ \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times 1 \times 4$

$= 1 + 1 - 1 = 1$

= الطرف الأيسر.

(١٠) الطرف الأيمن = ٢ جتا² ٦٠° + ٣ جا² ٤٥° + ٤ ظا² ٦٠° − ٤ جا ٩٠°

$= ٢\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + ٣\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ + ٤\left(\sqrt{٣}\right)^٢ - ٤ \times ١$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + ١٢ - ٤ = ١٠$

= الطرف الأيسر.

(١١) الطرف الأيمن $= \dfrac{\sqrt{٣} - \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ + \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \dfrac{\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{١ + ١}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}} =$ ظتا ٦٠°

= الطرف الأيسر.

(١٢) الطرف الأيمن $= \dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}} = ١$

= جا ٩٠° = الطرف الأيسر.

٧

(١) ∵ س جا² ٤٥° جتا ١٨٠° = ظا² ٦٠° جا ٢٧٠°

∴ س $\times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ \times (-١) = \left(\sqrt{٣}\right)^٢ \times (-١)$

∴ $-\frac{١}{٢}$ س $= -٣$ ∴ س = ٦

(٢) ∵ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٣٠° = ظا² ٤٥° − جتا² ٦٠°

∴ س $\times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٣} = (١)^٢ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٢$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س $= \frac{٣}{٤}$ ∴ س $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٨

(١) ∵ جتا س $= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} \div ١\right)$ − صفر

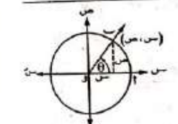
∴ جتا س $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

(٢) ∵ جا س $= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا س $= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

∴ س = ٩٠°

٩



(١) س = جتا θ = ٠٫٦

، ص = جا θ

حيث ص > ٠

∴ س² + ص² = ١

∴ ٠٫٣٦ + ص² = ١ ∴ ص² = ٠٫٦٤

∴ ص = ٠٫٨ ∴ ب(٠٫٦ ، ٠٫٨)

∴ جتا θ = ٠٫٦ ، جا θ = ٠٫٨ ، ظا θ $= \frac{٤}{٣}$

، قا θ $= \frac{٥}{٣}$ ، قتا θ $= \frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ $= \frac{٣}{٤}$

(٢) س = جتا θ

حيث س < ٠

، ص = جا θ $= \frac{١٢}{١٣}$

∵ س² + ص² = ١

∴ س² $+ \frac{١٤٤}{١٦٩} = ١$

∴ س² $= \frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ س $= -\frac{٥}{١٣}$

∴ ب$\left(-\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

∴ جتا θ $= -\frac{٥}{١٣}$ ، جا θ $= \frac{١٢}{١٣}$ ، ظا θ $= -\frac{١٢}{٥}$

، قا θ $= -\frac{١٣}{٥}$ ، قتا θ $= \frac{١٣}{١٢}$ ، ظتا θ $= -\frac{٥}{١٢}$

(٣) س = جتا θ حيث س < ٠

، ص = جا θ حيث ص > ٠

ظا θ $= \frac{ص}{س} = -\frac{٣}{٤}$

∴ ص $= -\frac{٣}{٤}$ س

، ∵ س² + ص² = ١

∴ س² $+ \frac{٩}{١٦}$ س² $= ١$ ∴ $\frac{٢٥}{١٦}$ س² $= ١$

∴ س² $= \frac{١٦}{٢٥}$ ∴ س $= -\frac{٤}{٥}$

∴ ص $= -\frac{٣}{٤} \times -\frac{٤}{٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ب$\left(-\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

∴ جتا θ $= -\frac{٤}{٥}$ ، جا θ $= \frac{٣}{٥}$ ، ظا θ $= -\frac{٣}{٤}$

، قا θ $= -\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ $= \frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ $= -\frac{٤}{٣}$

(٤) قتا θ $= \frac{١}{ص} = -\frac{٢٥}{٧}$

∴ ص $= -\frac{٧}{٢٥}$

، س < ٠

∵ س² + ص² = ١

∴ س² $+ \frac{٤٩}{٦٢٥} = ١$

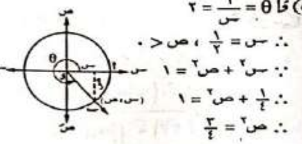
∴ س² $= \frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ ∴ س $= -\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ب$\left(-\frac{٢٤}{٢٥} ، -\frac{٧}{٢٥}\right)$

∴ جتا θ $= -\frac{٢٤}{٢٥}$ ، جا θ $= -\frac{٧}{٢٥}$ ، ظا θ $= \frac{٧}{٢٤}$

، قا θ $= -\frac{٢٥}{٢٤}$ ، قتا θ $= -\frac{٢٥}{٧}$ ، ظتا θ $= \frac{٢٤}{٧}$

(٥) قا θ $= \frac{١}{س} = ٢$



∴ س $= \frac{١}{٢}$ ، ص < ٠

∵ س² + ص² = ١

∴ $\frac{١}{٤}$ + ص² = ١

∴ ص² $= \frac{٣}{٤}$

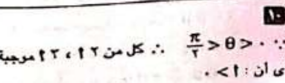
∴ ص $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ب$\left(\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ جتا θ $= \frac{١}{٢}$ ، جا θ $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ظا θ $= -\sqrt{٣}$ ، قا θ = ٢ ، قتا θ $= -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، ظتا θ $= -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

١٠



∵ ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ ∴ كل من ٢أ ، ٣أ موجبة

أى أن : أ > ٠

، ∵ س² + ص² = ١ ∴ (٢أ)² + (٣أ)² = ١

∴ ١٣أ² = ١ ∴ أ $= \frac{١}{\sqrt{١٣}}$

∴ النقطة هى $\left(\frac{٢}{\sqrt{١٣}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٣}}\right)$

∴ قا θ $= \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ ، ظا θ $= \frac{٣}{٢}$

∴ قا² θ − ظا² θ $= \frac{١٣}{٤} - \frac{٩}{٤} = ١$

١١

س = جتا θ $= \frac{٣}{٥}$

، ص = جا θ ، ص > ٠

، ∵ س² + ص² = ١

∴ $\frac{٩}{٢٥}$ + ص² = ١ ∴ ص² $= \frac{١٦}{٢٥}$

∴ ص $= \frac{٤}{٥}$ ∴ ب$\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

∴ قتا θ $= \frac{٥}{٤}$ ، ظا θ $= \frac{٤}{٣}$

∴ قتا θ جا θ − ظا θ قتا θ $= ١ - \frac{٤}{٣} \times \frac{٥}{٤}$

$= ١ - \frac{٥}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

١٢

ص = جا θ $= \frac{١٢}{١٣}$

، ∵ س = جتا θ حيث س < ٠

، ∵ س² + ص² = ١

∴ س² $+ \frac{١٤٤}{١٦٩} = ١$

∴ س² $= \frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ س $= -\frac{٥}{١٣}$ ∴ ب$\left(-\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

∴ قتا θ جا θ − ظا θ قتا θ + جتا² θ

$= ١ - ١ + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{٢٥}{١٦٩}$



١٣

ص = جا θ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$

، س = جتا θ ، س > ٠

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ = ١

∴ س^{٢} = $\frac{٤٩}{٦٢٥}$

∴ س = جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ ∴ ب $\left(\frac{٧}{٢٥} ، \frac{-٢٤}{٢٥}\right)$

(١) $\frac{\text{ظا } θ - \text{قتا } θ}{\text{ظا } θ - \text{قا } θ}$ = $\frac{-\frac{٧}{٢٤} - \left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)}{-\frac{٢٤}{٧} - \frac{٢٥}{٧}}$ = $\frac{-٣}{٢٨}$

(٢) جتا θ − قتا θ ظا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ − $\left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)$ × $\frac{-٢٤}{٧}$ = $\frac{-٥٧٦}{١٧٥}$

١٤

إجابة أحمد هى الصحيحة لأنه قام بالتعويض مباشرة.

١٥

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)
(٥) (ب) (٦) (جـ)
(٧) أولًا : (د) ثانيًا : (ب) ثالثًا : (ب)
(٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ)
(١٢) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٥

(١) ∵ طول (⌒ب حـ) = $\frac{١}{٢}$ π

∴ ق (⌒ب حـ) = $\frac{\frac{١}{٢}\pi}{٢\pi}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

∴ قا (∠ب و حـ) = $\frac{١}{\text{جتا } ٦٠°}$ = $\frac{١}{\left(\frac{١}{٢}\right)}$ = ٢

(٢) ∵ أ هى أكبر قياس لزاوية حادة فى مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣

، ∵ (١٣)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

∴ المثلث قائم الزاوية ∴ ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$

(٣) ∵ (س + ١) هو أكبر ضلع.

∴ (س + ١) هو وتر المثلث القائم.

∴ (س + ١)^{٢} = (س)^{٢} + (س − ٧)^{٢}

∴ س^{٢} + ٢س + ١ = س^{٢} + س^{٢} − ١٤ س + ٤٩

∴ س^{٢} − ١٦ س + ٤٨ = ٠

∴ (س − ١٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ ، س = ٤

(مرفوض لأن س − ٧ = −٣)

∴ أطوال الأضلاع هى ٥ ، ١٢ ، ١٣

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ هو أصغر ضلع

∴ ب حـ = ٥ سم

∴ قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ = $\frac{١}{\left(\frac{١٢}{١٣}\right)}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

(٤) ظتا س + ظتا ص + ظتا ع = $\frac{١}{١}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١١}{٦}$

(٥) ظا س = $\frac{٣}{٢}$

، ظتا ص = $\frac{١}{٤}$

∴ ظا س + ظتا ص = $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٤}$

(٦) أ و = $\sqrt{(١)^{٢} + \left(\sqrt{٣}\right)^{٢}}$ = ٢

، و ب = $\sqrt{(-١)^{٢} + \left(\sqrt{٣}\right)^{٢}}$ = ٢

، أ ب = $\sqrt{(١ + ١)^{٢} + \left(\sqrt{٣} - \sqrt{٣}\right)^{٢}}$ = ٢

∴ Δ أ و ب هو مثلث متساوى الأضلاع

∴ ظتا (∠أ و ب) = $\frac{١}{\text{ظا } ٦٠°}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

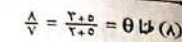
(٧) أولًا : ∵ الدائرة هى دائرة وحدة

∴ أ و = ١ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\text{و ب}}$ ∴ و ب = قا θ

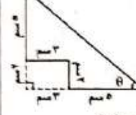
ثانيًا : ب حـ = ب و − و حـ = قا θ − ١

ثالثًا : مساحة المثلث أ ب و = $\frac{١}{٢}$ أ و × أ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ظا θ



(٨) ظا θ = $\frac{٥ + ٣}{٥ + ٢}$ = $\frac{٨}{٧}$



(٩) نرسم $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = {م}

، ∵ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ ب}}$ = $\frac{٢}{٥}$

∴ ء هـ = ٢ س

، هـ ب = ٥ س

∴ ب ء = ٧ س

، ∵ أ ب حـ ء مربع

∴ أ حـ = ب ء = ٧ س

، حـ م = ٣,٥ س ، م هـ = ١,٥ س

فى Δ حـ م هـ القائم فى م : ظا θ = $\frac{٣,٥ \text{ س}}{١,٥ \text{ س}}$ = $\frac{٧}{٣}$

(١٠) ∵ ∠ أ ء ب خارجة عن المثلث أ ء حـ

∴ ق (∠ء أ حـ) + ق (∠ء حـ أ) = θ

، ∵ ء أ = ء حـ ∴ ق (∠حـ) = $\frac{θ}{٢}$

فى Δ أ ب ء : ق (∠ب) = ٩٠° ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

∴ أ ب = ٤ س ، ب ء = ٣ س

∴ أ ء = $\sqrt{(٤ \text{ س})^{٢} + (٣ \text{ س})^{٢}}$ = ٥ س

∴ ء أ = ء حـ = ٥ س

فى Δ أ ب حـ : ظتا $\frac{θ}{٢}$ = $\frac{٣ \text{ س} + ٥ \text{ س}}{٤ \text{ س}}$ = ٢

(١١) فى Δ أ ب ء القائم فى ء :

ظا ب = $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ = $\frac{٦}{\text{ء ب}}$

، فى Δ أ ء حـ القائم الزاوية فى ء

ظا حـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}}$ = $\frac{٦}{\text{ء حـ}}$

∴ ظا ب + ظا حـ = $\frac{٦}{\text{ب ء}}$ + $\frac{٦}{\text{ء حـ}}$

= $\frac{٦ (\text{ء حـ} + \text{ب ء})}{\text{ب ء . ء حـ}}$ = $\frac{٦ \text{ ب حـ}}{\text{ب ء . ء حـ}}$

، ∵ (أ ء)^{٢} = ب ء × ء حـ

∴ ب ء × ء حـ = ٣٦

∴ ظا ب + ظا حـ = $\frac{٦ (\text{ب حـ})}{٣٦}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{٦}$

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{٦}$ = $\frac{٥}{٣}$ ∴ ب حـ = ١٠

(١٢) ∵ ميل الخط المستقيم = ٢

∴ ظا θ = ٢

فى Δ أ ب حـ القائم فى ب

∴ أ حـ = $\sqrt{(٢)^{٢} + (١)^{٢}}$ = $\sqrt{٥}$

∴ جا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

إرشادات تمارين 10

١

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (جـ)
(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (ب) (١٢) (أ) (١٣) (د) (١٤) (ب) (١٥) (أ)
(١٦) (جـ) (١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (د) (٢٠) (د)
(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (جـ)

٢

(١) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(٢) قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

(٣) ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(٤) جتا (−١٥٠°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°)

= − جتا ٣٠° = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

(٦) قتا $\frac{١١ \pi}{٦}$ = قتا $\left(\frac{١٢ \pi}{٦} - \frac{\pi}{٦}\right)$

= − قتا $\frac{\pi}{٦}$ = −٢

(٧) ظتا ٧٨٠° = ظتا (٧٢٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



(٨) $\text{حتا}(-٩٠٠^\circ) = \text{حتا}(-٩٠٠^\circ + ٢ \times ٣٦٠^\circ)$

$= \text{حتا}\ ١٨٠^\circ = -١$

(٩) $\text{حا}\left(\frac{-٤\pi}{٣}\right) = -\text{حا}\left(\frac{٤\pi}{٣}\right) = -\text{حا}\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$

$= \text{حا}\ \frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٠) $\text{قا}\left(\frac{-٢\pi}{٣}\right) = \text{قا}\left(\frac{-٢}{٣} \times ١٨٠^\circ\right)$

$= \text{قا}(-١٢٠^\circ) = \text{قا}\ ١٢٠^\circ$

$= \text{قا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ) = -\text{قا}\ ٦٠^\circ$

$= -٢$

(١١) $\text{قا}(-٤٨٠^\circ) = \text{قا}\ ٤٨٠^\circ = \text{قا}(٣٦٠^\circ + ١٢٠^\circ)$

$= \text{قا}\ ١٢٠^\circ = \text{قا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$= -\text{قا}\ ٦٠^\circ = -٢$

(١٢) $\text{حا}\left(\frac{-٧\pi}{٤}\right) = \text{حا}\left(\frac{-٧ \times ١٨٠^\circ}{٤}\right) = \text{حا} -٣١٥^\circ$

$= \text{حا}(-٣١٥^\circ + ٣٦٠^\circ)$

$= \text{حا}\ ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣

(١) $\text{حتا}\ ١٢٠^\circ + \text{ظا}\ ٢٢٥^\circ + \text{قتا}\ ٣٣٠^\circ + \text{حتا}\ ٤٢٠^\circ$

$= \text{حتا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ) + \text{ظا}(١٨٠^\circ + ٤٥^\circ)$

$+ \text{قتا}(٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ) + \text{حتا}(٣٦٠^\circ + ٦٠^\circ)$

$= -\text{حتا}\ ٦٠^\circ + \text{ظا}\ ٤٥^\circ - \text{قتا}\ ٣٠^\circ + \text{حتا}\ ٦٠^\circ$

$= -\frac{١}{٢} + ١ - ٢ + \frac{١}{٢} = -١$

(٢) $\text{حا}\ ٣٩٠^\circ\ \text{حتا}(-٦٠^\circ) + \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{حا}\ ١٢٠^\circ$

$= \text{حا}(٣٦٠^\circ + ٣٠^\circ)\ \text{حتا}\ ٦٠^\circ$

$+ \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{حا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$= \text{حا}\ ٣٠^\circ\ \text{حتا}\ ٦٠^\circ + \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{حا}\ ٦٠^\circ$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

(٣) $\because \text{حتا}\ ٩٣٠^\circ = \text{حتا}(٢ \times ٣٦٠^\circ + ٢١٠^\circ) = \text{حتا}\ ٢١٠^\circ$

$= \text{حتا}(١٨٠^\circ + ٣٠^\circ) = -\text{حتا}\ ٣٠^\circ$

$\therefore \text{حا}\ ١٥٠^\circ\ \text{حتا}(-٣٠٠^\circ) - \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{ظتا}\ ٢٤٠^\circ$

$= \text{حا}(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ)\ \text{حتا}(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$- \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{ظتا}(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$

$= \text{حا}\ ٣٠^\circ\ \text{حتا}\ ٦٠^\circ - \text{حتا}\ ٣٠^\circ\ \text{ظتا}\ ٦٠^\circ$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -\frac{١}{٤}$

(٤) $\text{ظا}\ \frac{٢\pi}{٣}\ \text{قا}\ \frac{١١\pi}{٣} + \text{ظتا}\ \frac{١١\pi}{٦}\ \text{قتا}\ \frac{١٩\pi}{٦}$

$+ \text{ظا}\ \frac{٢٥\pi}{٦}\ \text{قا}\left(\frac{-١٩\pi}{٣}\right)$

$= \text{ظا}\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)\ \text{قا}\left(\frac{١٢\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣}\right)$

$+ \text{ظتا}\left(\frac{١٢\pi}{٦} - \frac{\pi}{٦}\right)\ \text{قتا}\left(\frac{١٢\pi}{٦} + \frac{٧\pi}{٦}\right)$

$+ \text{ظا}\left(\frac{٢٤\pi}{٦} + \frac{\pi}{٦}\right)\ \text{قتا}\left(\frac{-١٨\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣}\right)$

$= -\text{ظا}\ \frac{\pi}{٣}\ \text{قا}\ \frac{\pi}{٣} - \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٦}\right)\ \text{قتا}\left(\pi + \frac{١}{٦}\pi\right)$

$- \text{ظا}\ \frac{\pi}{٦}\ \text{قا}\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

$= -\text{ظا}\ \frac{\pi}{٣}\ \text{قا}\ \frac{\pi}{٣} + \text{ظتا}\ \frac{\pi}{٦}\ \text{قتا}\ \frac{\pi}{٦} - \text{ظا}\ \frac{\pi}{٦}\ \text{قا}\ \frac{\pi}{٣}$

$= -\sqrt{٣} \times ٢ + \sqrt{٣} \times ٢ - \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = -\frac{٢}{٣}$

٤

(١) $\text{حتا}(-٣٠٠^\circ) = \text{حتا}\ ٣٠٠^\circ = \text{حتا}(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$= \text{حتا}\ ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، $\text{حا}\ ٤٢٠^\circ = \text{حا}(٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ) = \text{حا}\ ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{حتا}\ ٧٥٠^\circ = \text{حتا}(٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ \times ٢) = \text{حتا}\ ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{حتا}\ ٦٦٠^\circ = \text{حتا}(٣٠٠^\circ + ٣٦٠^\circ) = \text{حتا}\ ٣٠٠^\circ$

$= \text{حتا}(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ) = \text{حتا}\ ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= صفر = الطرف الأيسر.

(٢) $\text{حا}\ ٦٠٠^\circ = \text{حا}(٣٦٠^\circ + ٢٤٠^\circ) = \text{حا}\ ٢٤٠^\circ$

$= \text{حا}(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = -\text{حا}\ ٦٠^\circ$

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{حتا}(-٣٠^\circ) = \text{حتا}\ ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{حا}\ ١٥٠^\circ = \text{حا}(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = \text{حا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، $\text{حتا}(-٢٤٠^\circ) = \text{حتا}\ ٢٤٠^\circ = \text{حتا}(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$

$= -\text{حتا}\ ٦٠^\circ = -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \left(-\frac{١}{٢}\right)$

= −١ = الطرف الأيسر.

(٣) $\text{حا}\ ٤٨٠^\circ = \text{حا}(٣٦٠^\circ + ١٢٠^\circ) = \text{حا}\ ١٢٠^\circ$

$= \text{حا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ) = \text{حا}\ ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، $\text{حتا}(-٦٠^\circ) = \text{حتا}\ ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، $\text{حتا}\ ٣٠٠^\circ = \text{حتا}(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ) = \text{حتا}\ ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، $\text{حا}(-١٢٠^\circ) = -\text{حا}\ ١٢٠^\circ = -\text{حا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$= -\text{حا}\ ٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\sqrt{٣}}{٤} =$ صفر

= الطرف الأيسر.

(٤) $\text{حا}\ ١٥٠^\circ = \text{حا}(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = \text{حا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

، $\text{ظا}\ ٢٢٥^\circ = \text{ظا}(١٨٠^\circ + ٤٥^\circ) = \text{ظا}\ ٤٥^\circ = ١$

، $\text{حتا}\ ٣١٥^\circ = \text{حتا}(٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ) = \text{حتا}\ ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $\text{قا}(-١٢٠^\circ) = \text{قا}\ ١٢٠^\circ = \text{قا}(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$= -\text{قا}\ ٦٠^\circ = -٢$

، $\text{حا}(-١٣٥^\circ) = -\text{حا}\ ١٣٥^\circ = -\text{حا}(١٨٠^\circ - ٤٥^\circ)$

$= -\text{حا}\ ٤٥^\circ = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $\text{قتا}\ ٢١٠^\circ = \text{قتا}(١٨٠^\circ + ٣٠^\circ) = -\text{قتا}\ ٣٠^\circ = -٢$

$\therefore$ الطرف الأيمن

$= \frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times (-٢) + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \times (-٢)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$ = الطرف الأيسر.

٥

$\text{حا}\ \theta = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{حتا}\ \theta = \frac{-٣}{٥}$

(١) $\text{حا}(١٨٠^\circ + \theta) = -\text{حا}\ \theta = \frac{-٤}{٥}$

(٢) $\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{حتا}(٩٠^\circ - \theta) = \text{حا}\ \theta = \frac{٤}{٥}$

(٣) $\text{ظا}(٣٦٠^\circ - \theta) = -\text{ظا}\ \theta = -\frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{-٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$

(٤) $\text{قتا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = \text{قتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = -\text{قا}\ \theta = \frac{٥}{٣}$

(٥) $\text{قا}(\theta + \pi) = \text{قا}(\theta + ١٨٠^\circ) = -\text{قا}\ \theta = \frac{٥}{٣}$

(٦) $\text{حا}(\theta - \pi) = \text{حا}(\theta - ١٨٠^\circ) = \text{حا}(١٨٠^\circ + \theta)$

$= -\text{حا}\ \theta = \frac{-٤}{٥}$

٦

$\text{حا}\ \theta = \frac{٢}{٣}$ ، $\text{حتا}\ \theta = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(١) $\text{حا}(٢٧٠^\circ + \theta) = -\text{حتا}\ \theta = -\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(٢) $\text{قا}(٢٧٠^\circ + \theta) = \text{قتا}\ \theta = \frac{٣}{٢}$

(٣) $\text{قتا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right) = \text{قتا}(\theta + ٩٠^\circ) = \text{قا}\ \theta = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$

(٤) $\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{ظا}(٩٠^\circ - \theta) = \text{ظتا}\ \theta$

$= \frac{\frac{\sqrt{٥}}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(٥) $\text{ظتا}(\theta - ١٨٠^\circ) = \text{ظتا}\ \theta = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(٦) $\text{قا}(-\theta) = \text{قا}\ \theta = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$

٧

$\because$ $س^٢ + ص^٢ = ١$

$\therefore$ $س^٢ + \frac{٩}{٢٥} = ١$

$\therefore$ $س^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$

$\therefore$ $س = \frac{٤}{٥}$ حيث $س > ٠$

$\therefore$ ب $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

$\therefore \text{حا}(٩٠^\circ - \theta) + \text{ظا}(٩٠^\circ - \theta)\ \text{حتا}(٩٠^\circ + \theta)$

$= \text{حتا}\ \theta + \text{ظتا}\ \theta\ (-\text{حا}\ \theta) = \frac{٤}{٥} + \frac{٤}{٣} \times \frac{-٣}{٥} =$ صفر

٨

جا θ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ θ تقع فى الربع الثانى

(١) جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ = −(−$\frac{٤}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$

(٢) ظا (١٨٠° + θ) = ظا θ = $\frac{-٣}{٤}$

(٣) قتا (− θ) = − قتا θ = −($\frac{٥}{٣}$) = −$\frac{٥}{٣}$

(٤) ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ = −($\frac{-٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٣}$

(٥) جا (٩٠° − θ) = جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$

(٦) جا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ = −($\frac{-٤}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$

٩

جتا θ = −$\frac{٣}{٥}$

، ∵ ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

∴ θ تقع فى الربع الثالث

(١) قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

(٢) قا (− θ) = قا θ = −$\frac{٥}{٣}$

(٣) ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ = −$\frac{٤}{٣}$

(٤) ظتا (θ − ٩٠°) = − ظتا (٩٠° − θ)

= − ظا θ = −$\frac{٤}{٣}$

(٥) قا (٩٠° + θ) = − قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

(٦) ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

١٠

(١) ∵ جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ − ٥°)

∴ ٣ θ + ١٥° + ٢ θ − ٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٨٠° ∴ θ = ١٦°

(٢) ∵ قا (θ + ٢٥°) = قتا (θ + ١٥°)

∴ θ + ٢٥° + θ + ١٥° = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٤٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٥٠° ∴ θ = ٢٥°

(٣) ∵ ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

∴ θ + ٢٠° + ٣ θ + ٣٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ + ٥٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ = ٤٠° ∴ θ = ١٠°

(٤) ∵ جتا ($\frac{θ + ٢٠°}{٢}$) = جا ($\frac{θ + ٤٠°}{٢}$)

∴ $\frac{θ + ٢٠°}{٢}$ + $\frac{θ + ٤٠°}{٢}$ = ٩٠°

∴ θ + ٢٠° + θ + ٤٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ + ٦٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠° ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ١٨° ٢٤′) = ظتا (θ + ٥٢° ٦′)

∴ θ + ١٨° ٢٤′ + θ + ٥٢° ٦′ = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٧٠° ٢٤′ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٩° ٣٦′ ∴ θ = ٩° ٤٣′

١١

(١) (د) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (جـ)

(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (ب)

١٢

(١) ∵ جا ٢ θ = جتا θ

∴ ٢ θ ± θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

∴ إما ٢ θ + θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها ٣ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{π}{٦}$ + $\frac{٢ π}{٣}$ ن

أ، ٢ θ − θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

∴ الحل العام هو: $\frac{π}{٦}$ + $\frac{٢ π}{٣}$ ن أ، $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

(٢) ∵ جتا ٥ θ = جا θ

∴ جا θ = جتا ٥ θ

∴ θ ± ٥ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

∴ إما θ + ٥ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها ٦ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{π}{١٢}$ + $\frac{π}{٣}$ ن

أ، θ − ٥ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها −٤ θ = $\frac{π}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = −$\frac{π}{٨}$ − $\frac{π}{٢}$ ن

∴ الحل العام هو:

$\frac{π}{١٢}$ + $\frac{π}{٣}$ ن أ، −$\frac{π}{٨}$ − $\frac{π}{٢}$ ن

١٣

(١) ∵ قا (θ + ١٥°) = قا ٤٢°

∴ (θ + ١٥°) ± (٤٢°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ١٥° + ٤٢° = ٩٠° ∴ θ = ٣٣°

(٢) ∵ جا (θ + ٣٠°) = جتا θ

∴ (θ + ٣٠°) ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ٣٠° + θ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٦٠° ∴ θ = ٣٠°

(٣) ∵ جا θ = جتا θ ∴ θ ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

(٤) ∵ قا (θ − $\frac{π}{٦}$) = قا θ

∴ (θ − $\frac{π}{٦}$) ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ − ٣٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠° ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ٢٧°) = ظتا ٢ θ

∴ (θ + ٢٧°) + (٢ θ) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ٢٧° + ٢ θ = ٩٠°

∴ ٣ θ = ٦٣° ∴ θ = ٢١°

أ، θ + ٢٧° + ٢ θ = ٢٧٠°

∴ ٣ θ = ٢٤٣° ∴ θ = ٨١°

(٦) ∵ ظا (θ + ١٠°) = ظتا (٤ θ − ١٠°)

∴ (θ + ١٠°) + (٤ θ − ١٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ١٠° + ٤ θ − ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٩٠° ∴ θ = ١٨°

أ، ٥ θ = ٢٧٠° ∴ θ = ٥٤°

أ، ٥ θ = ٤٥٠° ∴ θ = ٩٠°

(٧) ∵ قا (٢ θ + ٣٥°) = قتا (٣ θ − ١٠°)

∴ قتا (٣ θ − ١٠°) = قا (٢ θ + ٣٥°)

∴ (٣ θ − ١٠°) ± (٢ θ + ٣٥°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٦٥° ∴ θ = ١٣°

أ، ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥°

= ٩٠° + ٣٦٠° = ٤٥٠°

∴ ٥ θ = ٤٢٥° ∴ θ = ٨٥°

(٨) ∵ قا θ = قتا (٣ θ − ٩٠°)

∴ قتا (٣ θ − ٩٠°) = قا θ

∴ (٣ θ − ٩٠°) ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ٩٠° + θ = ٩٠°

∴ ٤ θ = ١٨٠° ∴ θ = ٤٥°

أ، ٣ θ − ٩٠° − θ = ٩٠° ∴ ٢ θ = ١٨٠°

∴ θ = ٩٠° (مرفوض)

(٩) ∵ جا (٤ θ + ٤٨°) = جتا (θ − ٣٣°)

∴ (٤ θ + ٤٨°) ± (θ − ٣٣°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٤ θ + ٤٨° + θ − ٣٣° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٥° = ٩٠° ∴ θ = ١٥°

أ، $٥\theta + ١٥^\circ = ٤٥٠^\circ$ ∴ $\theta = ٨٧^\circ$

أ، $٤\theta + ٤٨^\circ - \theta + ٣٣^\circ = ٩٠^\circ$

∴ $٣\theta + ٨١^\circ = ٩٠^\circ$ ∴ $\theta = ٣^\circ$

(١٠) ∵ $\text{قتا } ٨\theta = \text{قا } ٢\theta$

∴ $(٨\theta) \pm (٢\theta) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن

∴ $٨\theta + ٢\theta = ٩٠^\circ$

∴ $١٠\theta = ٩٠^\circ$ ∴ $\theta = ٩^\circ$

أ، $١٠\theta = ٤٥٠^\circ$ ∴ $\theta = ٤٥^\circ$

أ، $١٠\theta = ٨١٠^\circ$ ∴ $\theta = ٨١^\circ$

أ، $٨\theta - ٢\theta = ٩٠^\circ$

∴ $٦\theta = ٩٠^\circ$ ∴ $\theta = ١٥^\circ$

أ، $٦\theta = ٤٥٠^\circ$ ∴ $\theta = ٧٥^\circ$

١٤

(١) ∵ $\text{ظا } \theta - ١ = ٠$ ∴ $\text{ظا } \theta = ١$

، ∵ ظا موجبة فى الربع الأول والثالث

∴ $\theta = ٤٥^\circ$ أ، $\theta = ١٨٠^\circ + ٤٥^\circ = ٢٢٥^\circ$

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ $\theta = ٤٥^\circ$

(٢) ∵ $٢ \text{ جتا } \theta - ١ = ٠$ ∴ $\text{جتا } \theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ $\theta = ٦٠^\circ$ أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ $\theta = ٦٠^\circ$

(٣) ∵ $٢ \text{ جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = ١$

∴ $\text{جتا}(٩٠^\circ - \theta) = \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{جا } \theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جا موجبة فى الربع الأول والثانى

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ أ، $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

(٤) ∵ $٢ \text{ جا} \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \sqrt{٣}$

∴ $\text{جا}(٩٠^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $\text{جتا } \theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

١٥

(١) $\text{جتا } \theta = -\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ١٨٠^\circ - ٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$

أ، $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{١٢٠^\circ ، ٢٤٠^\circ\}$

(٢) $\text{قا } \theta = \sqrt{٢}$ ∴ $\text{جتا } \theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥°

∴ $\theta = ٤٥^\circ$ أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ = ٣١٥^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{٤٥^\circ ، ٣١٥^\circ\}$

(٣) $\text{جا } \theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ٦٠^\circ$ أ، $\theta = ١٨٠^\circ - ٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{٦٠^\circ ، ١٢٠^\circ\}$

(٤) $\text{جتا } \theta = -١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١٨٠^\circ\}$

(٥) $\text{جا } \theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$

أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{٢٤٠^\circ ، ٣٠٠^\circ\}$

(٦) $\text{ظا } \theta = -١$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها = ١ هى ٤٥°

∴ $\theta = ١٨٠^\circ - ٤٥^\circ = ١٣٥^\circ$

أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ = ٣١٥^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{١٣٥^\circ ، ٣١٥^\circ\}$

(٧) $\text{قتا } \theta = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ $\text{جا } \theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$

أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{٢٤٠^\circ ، ٣٠٠^\circ\}$

(٨) $\text{جا}^٢ \theta = \frac{١}{٤}$ ∴ $\text{جا } \theta = \pm\frac{١}{٢}$

∴ $\text{جا } \theta = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ أ، $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

أ، $\text{جا } \theta = -\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + ٣٠^\circ = ٢١٠^\circ$

أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$

∴ مجموعة الحل = $\{٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ ، ٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$

١٦

∵ $\text{جتا} \left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{جتا}(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $-\text{جا } \theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{جا } \theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ $\text{جا} \left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{جا}(٩٠^\circ + \theta) = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{جتا } \theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جا سالبة و جتا موجبة ∴ θ تقع فى الربع الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$

١٧

∵ $\text{جا}(٢\theta + ١٥^\circ) = \text{جتا}(\theta + ٣٠^\circ)$

∴ $(٢\theta + ١٥^\circ) \pm (\theta + ٣٠^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن

∴ $٢\theta + ١٥^\circ + \theta + ٣٠^\circ = ٩٠^\circ$

∴ $٣\theta + ٤٥^\circ = ٩٠^\circ$ ∴ $٣\theta = ٤٥^\circ$

∴ $\theta = ١٥^\circ$

∴ $\text{قتا}^٢ ٢\theta + \text{ظتا}^٢ ٣\theta + \text{قا}^٢ ٤\theta$

$= \text{قتا}^٢ ٣٠^\circ + \text{ظتا}^٢ ٤٥^\circ + \text{قا}^٢ ٦٠^\circ = ٤ + ١ + ٤ = ٩$

١٨

∵ $\frac{\text{ظا}(٣\theta - ٢٥^\circ)}{\text{ظتا}(٢\theta - ٢٥^\circ)} = ١$

∴ $\text{ظا}(٣\theta - ٢٥^\circ) = \text{ظتا}(٢\theta - ٢٥^\circ)$

∴ $(٣\theta - ٢٥^\circ) = (٢\theta - ٢٥^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن

∴ $٣\theta - ٢٥^\circ + ٢\theta - ٢٥^\circ = ٩٠^\circ$

∴ $٥\theta = ١٥٠^\circ$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

∴ $\frac{\text{ظا } ١٨^\circ}{\text{ظتا } ٧٢^\circ} + \text{جا}(١٨٠^\circ - \theta)$

$= \frac{\text{ظتا } ٧٢^\circ}{\text{ظتا } ٧٢^\circ} + \text{جا } \theta = ١ + \text{جا } ٣٠^\circ = ١\frac{١}{٢}$

١٩

∵ $\frac{\text{ظا } \theta}{\text{ظتا } ٢\theta} = ١$ ∴ $\text{ظا } \theta = \text{ظتا } ٢\theta$

∴ $\theta + ٢\theta = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ$ ن

∴ $\theta + ٢\theta = ٩٠^\circ$ ∴ $٣\theta = ٩٠^\circ$

∴ $\theta = ٣٠^\circ$

$\therefore \text{جا}(١٨٠° - ٣\theta)\ \text{جتا}(٣٦٠° - ٢\theta)$

$+ \text{ظا}\ ٢\theta\ \text{ظتا}(\theta - ١٨٠°)$

$= \text{جا}(١٨٠° - ٩٠°)\ \text{جتا}(٣٦٠° - ٦٠°)$

$+ \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظتا}(٣٠° - ١٨٠°)$

$= \text{جا}\ ٩٠°\ \text{جتا}\ ٦٠° + \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظتا}(-١٥٠°)$

$= \text{جتا}\ ٦٠° - \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظتا}\ ١٥٠°$

$= \text{جتا}\ ٦٠° - \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظتا}(١٨٠° - ٣٠°)$

$= \text{جتا}\ ٦٠° + \text{ظا}\ ٦٠°\ \text{ظتا}\ ٣٠° = \frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣\frac{١}{٢}$

٢٠

$\because \text{ظا}(\theta - ١٥°) = \text{ظتا}(٢\theta + ١٥°)$

$\therefore (\theta - ١٥°) + (٢\theta + ١٥°) = ٩٠° + ١٨٠°\ \text{ن}$

$\therefore \theta - ١٥° + ٢\theta + ١٥° = ٩٠°$

$\therefore ٣\theta = ٩٠° \qquad \therefore \theta = ٣٠°$

$\therefore \frac{١ + \text{جا}(٢٧٠° + ٢\theta)}{١ + \text{جا}(٩٠° + ٢\theta)} = \frac{١ + \text{جا}(٢٧٠° + ٦٠°)}{١ + \text{جا}(٩٠° + ٦٠°)}$

$= \frac{١ - \text{جتا}\ ٦٠°}{١ + \text{جتا}\ ٦٠°} = \frac{١ - \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

٢١

$\text{جتا}\ \theta = \frac{٣}{٥}$

$، \because ٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الرابع

$\therefore \text{جا}(١٨٠° - \theta) + \text{ظا}(٩٠° - \theta) - \text{ظا}(٢٧٠° - \theta)$

$= \text{جا}\ \theta + \text{ظتا}\ \theta - \text{ظتا}\ \theta = \text{جا}\ \theta = \frac{-٤}{٥}$

٢٢

$\text{جتا}\ \theta = \frac{١٢}{١٣}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع

$، \because ٩٠° < \theta < ٣٦٠°$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الرابع

$\therefore$ المقدار $= ١٣\ \text{جا}\ \theta - ١٠ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ \left(\sqrt{٣}\right)^٢$

$+ ٥٠\ \text{جا}(١٨٠° - ٣٠°)$

$= ١٣ \times \frac{-٥}{١٣} - ١٠ \times \frac{١}{٢} \times ٣ + ٥٠\ \text{جا}\ ٣٠°$

$= -٥ - ١٥ + ٥٠ \times \frac{١}{٢} = ٥$

٢٣

$\text{ظا}\ \theta = \frac{-٨}{١٥}$

$، \because ٩٠° < \theta < ١٨٠°$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى

$\therefore \text{جا}\ \theta = \frac{٨}{١٧}\ ،\ \text{جتا}\ \theta = \frac{-١٥}{١٧}\ ،\ \text{ظا}\ \theta = \frac{-٨}{١٥}$

$،\ \text{قتا}\ \theta = \frac{١٧}{٨}\ ،\ \text{قا}\ \theta = \frac{-١٧}{١٥}\ ،\ \text{ظتا}\ \theta = \frac{-١٥}{٨}$

$،\ ٢\ \text{جا}\ \theta\ \text{جتا}\ \theta = ٢ \times \frac{٨}{١٧} \times \frac{-١٥}{١٧} = \frac{-٢٤٠}{٢٨٩}$

$،\ \text{قا}(١٠٨٠° + \theta) = \text{قا}(\theta + ٢ \times ٣٦٠°) = \text{قا}\ \theta = \frac{-١٧}{١٥}$

٢٤

$\because \text{جا}\ \theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$، \because \theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[\qquad \therefore \theta = ٤٥°$

(١) $\frac{١ - ٢\ \text{ظتا}(٢٧٠° - \theta)}{١ + \text{جتا}^٢(٢٧٠° + \theta)} = \frac{١ - ٢\ \text{ظتا}(٢٧٠° - ٤٥°)}{١ + \text{جتا}^٢(٢٧٠° + ٤٥°)}$

$= \frac{١ - ٢\ \text{ظا}\ ٤٥°}{١ + \text{جا}^٢\ ٤٥°} = \frac{١ - ٢}{١ + \frac{١}{٢}} = \frac{-١}{\frac{٣}{٢}} = \frac{-٢}{٣}$

(٢) الطرف الأيمن $= \text{جتا}\ ٢\theta = \text{جتا}\ ٩٠° =$ صفر

، الطرف الأيسر $= \frac{١ - \text{ظا}^٢(٢٧٠° - \theta)}{\text{قتا}^٢(٩٠° + \theta)}$

$= \frac{١ - \text{ظتا}^٢\ \theta}{\text{قا}^٢\ \theta}$

$= \frac{١ - \text{ظتا}^٢\ ٤٥°}{\text{قا}^٢\ ٤٥°} = \frac{١ - ١}{٢}$

= صفر

$\therefore$ الطرفان متساويان.

٢٥

$\because س^٢ + ص^٢ = ١$

$\therefore ٢٥\ ك^٢ + ١٤٤\ ك^٢ = ١$

$\therefore ك^٢ = \frac{١}{١٦٩}$

$\therefore ك = \frac{١}{١٣}$ حيث $ك > ٠$

$\therefore ب\left(\frac{-٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

$\therefore \text{قتا}(٩٠° - \theta)\ \text{جا}(٩٠° + \theta) + ١٢\ \text{ظا}(٢٧٠° + \theta)$

$= \text{قا}\ \theta\ \text{جتا}\ \theta + ١٢(-\text{ظتا}\ \theta)$

$= -\frac{١٣}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} - ١٢ \times \frac{٥}{١٢} = ١ - ٥ = -٤$

٢٦

$\because ١٣\ \text{جا}\ \theta - ٥ = ٠$

$\therefore \text{جا}\ \theta = \frac{٥}{١٣}$

$، \because \theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

$\therefore \text{قتا}(٢٧٠° + \theta) = -\text{قا}\ \theta = -\left(\frac{-١٣}{١٢}\right) = \frac{١٣}{١٢}$

$،\ \text{جتا}(\theta - ٢٧٠°) = \text{جتا}(\theta - ٢٧٠° + ٣٦٠°)$

$= \text{جتا}(٩٠° + \theta) = -\text{جا}\ \theta = -\frac{٥}{١٣}$

$،\ \text{ظا}(٢٧٠° + \theta) = -\text{ظتا}\ \theta = -\left(\frac{-١٢}{٥}\right) = \frac{١٢}{٥}$

$،\ \text{جا}(٢٧٠° - \theta) \times \text{قا}(٢٧٠° + \theta) \times \text{ظا}(٢٧٠° + \theta)$

$= -\text{جتا}\ \theta \times \text{قتا}\ \theta \times -\text{ظا}\ \theta$

$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٣}{٥} \times \frac{٥}{١٢} = ١ = \text{جا}\ ٩٠°$

٢٧

$\because \text{جتا}^٢\ \alpha = \frac{٩}{٢٥}$

$،\ ٩٠° < \alpha < ١٨٠°$

$\therefore \alpha$ تقع فى الربع الثانى

$\therefore \text{جتا}\ \alpha$ سالبة $\qquad \therefore \text{جتا}\ \alpha = \frac{-٣}{٥}$

$\therefore ٢٥\ \text{جا}\ \alpha - ٤\ \text{ظتا}\ \alpha = ٢٥ \times \frac{٤}{٥} - ٤ \times \frac{-٣}{٤}$

$= ٢٠ + ٣ = ٢٣$

٢٨

$\because \text{ظا}\ \alpha = \frac{٣}{٤}$ (موجبة)

$\therefore \alpha$ تقع فى الربع الأول أو الثالث

$، \because \alpha$ أصغر زاوية موجبة

$\therefore \alpha$ تقع فى الربع الأول

$\therefore \text{جا}\ \alpha = \frac{٣}{٥}\ ،\ \text{جتا}\ \alpha = \frac{٤}{٥}$

$،\ \text{ظا}\ \alpha = \frac{٣}{٤}\ ،\ \text{قا}\ \alpha = \frac{٥}{٤}$

$،\ \text{قتا}\ \alpha = \frac{٥}{٣}\ ،\ \text{ظتا}\ \alpha = \frac{٤}{٣}$

$، \because \text{ظا}\ \beta = \frac{٥}{١٢}$

$،\ ١٨٠° < \beta < ٢٧٠°$

$\therefore \beta$ تقع فى الربع الثالث

$\therefore \text{جا}\ \beta = \frac{-٥}{١٣}\ ،\ \text{جتا}\ \beta = \frac{-١٢}{١٣}\ ،\ \text{ظا}\ \beta = \frac{٥}{١٢}$

$،\ \text{قتا}\ \beta = \frac{-١٣}{٥}\ ،\ \text{قا}\ \beta = \frac{-١٣}{١٢}\ ،\ \text{ظتا}\ \beta = \frac{١٢}{٥}$

$\therefore \text{جا}\ \alpha\ \text{جتا}\ \beta - \text{جتا}\ \alpha\ \text{جا}\ \beta$

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} - \frac{٤}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} = \frac{-٣٦}{٦٥} + \frac{٢٠}{٦٥} = \frac{-١٦}{٦٥}$

٢٩

$\text{جا}\ \alpha = \frac{٣}{٥}$

$، \because \alpha \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

$\therefore \alpha$ تقع فى الربع الثانى

$،\ \text{جتا}\ \beta = \frac{٥}{١٣}$

$، \because \beta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

$\therefore \beta$ تقع فى الربع الرابع

$\therefore \text{جتا}\ \alpha\ \text{جتا}\ \beta + \text{جا}\ \alpha\ \text{جا}\ \beta$

$= \frac{-٤}{٥} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{٣}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} = \frac{-٢٠}{٦٥} - \frac{٣٦}{٦٥} = \frac{-٥٦}{٦٥}$

٣٠

$\text{جا}\ \alpha = \frac{-٢٤}{٢٥}$

$، \because ١٨٠° < \alpha < ٢٧٠°$

$\therefore \alpha$ تقع فى الربع الثالث



، ظا β = $\frac{١٢-}{٥}$ (سالبة)

∴ β تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ β أكبر زاوية موجبة

، β ∈]٠° ، ٣٦٠°[

∴ β تقع فى الربع الرابع

(١) المقدار = − جا α − جتا β

= − $\frac{٢٤-}{٢٥}$ − $\frac{٥}{١٣}$ = $\frac{١٨٧}{٣٢٥}$

(٢) المقدار = − قتا α ظا β − قا α (− ظا β)

= − $\left(\frac{٢٥-}{٢٤}\right)\left(\frac{١٢-}{٥}\right)$ − $\left(\frac{٢٥-}{٧}\right)\left(\frac{١٢}{٥}\right)$

= $\frac{٥-}{٢}$ + $\frac{٦٠}{٧}$ = $\frac{٨٥}{١٤}$

(٣) المقدار = قا α (− ظا β) (ظتا α) (− قا β)

= $\frac{٢٥}{٧-}$ $\left(\frac{١٢}{٥}\right)\left(\frac{٧}{٢٤}\right)\left(\frac{١٣-}{٥}\right)$ = ٦ $\frac{١}{٢}$

٣١

∵ θ هى متممة (٩٠° − θ)

∴ θ تعين على دائرة الوحدة النقطة (ص ، $\frac{٥}{١٣}$)

∵ س² + ص² = ١ ∴ ص² + $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = ١

∴ ص² = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ ص = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ θ تعين النقطة ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$) على دائرة الوحدة

∴ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا θ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا θ = $\frac{٥}{١٢}$

، قا θ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، قتا θ = $\frac{١٣}{٥}$ ، ظتا θ = $\frac{١٢}{٥}$

٣٢

العمل : نرسم $\overline{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

البرهان :

فى الشكل الرباعى أ ب حـ ء :

ق (∠ب) = ١٨٠° − θ

فى Δ هـ ب حـ القائم الزاوية فى هـ :

ب حـ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = ١٣ سم

∴ جا ب = جا (١٨٠° − θ) = جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

٣٣

∵ ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ ب و حـ) بالتبادل

، ∵ ق (∠ أ ب هـ) = ١٨٠° − θ

∴ ق (∠ ب و حـ) = ١٨٠° − θ

فى Δ ب حـ و القائم الزاوية فى حـ :

ب و = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∴ قتا (∠ ب و حـ) = قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

٣٤

إجابة كريم صحيحة لأن : جا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ = جتا θ

٣٥

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (د) ، (٦) (د)

(٧) أولًا : (ب) ثانيًا : (أ)

(٨) (ب) (٩) (أ) (١٠) (جـ) (١١) (ب)

(١٢) (أ) (١٣) (ب) (١٤) (جـ) (١٥) (ب)

إرشادات لحل رقم **٣٥**

(١) ∵ جتا ٩٠° = صفر

∴ جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ٩٠°

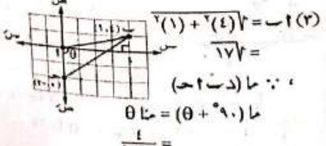
× ... × جتا ١٣٥° = صفر

(٢) ∵ جا ٧٥° = جا (٩٠° − ١٥°) = جتا ١٥°

، جتا ١٢° = جتا (٩٠° − ٧٨°) = جا ٧٨°

∴ جا ٧٥° × جتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨°

= جتا ١٥° × جا ٧٨° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ١



(٣) أ ب = $\sqrt{(٤)^٢ + (١)^٢}$

= $\sqrt{١٧}$

، ∵ جا (∠ ب أ حـ)

جا (٩٠° + θ) = جتا θ

= $\frac{٤}{\sqrt{١٧}}$

(٤) $\dfrac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } ١° \times \text{قتا } ٢° \times ... \times \text{قتا } ٨٨° \times \text{قتا } ٨٩°}$

= $\dfrac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } (٩٠° - ٨٩°) \times \text{قتا } (٩٠° - ٨٨°) \times ... \times \text{قتا } (٩٠° - ٢°) \times \text{قتا } (٩٠° - ١°)}$

= $\dfrac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } ٨٩° \times \text{قتا } ٨٨° \times ... \times \text{قا } ٢° \times \text{قتا } ١°}$ = ١

(٥) $\dfrac{\text{جا } (٦٠\pi + θ) + \text{جتا } (٩٠\pi + θ)}{\text{جتا } \left(\frac{٥\pi}{٢} + θ\right) - \text{جا } \left(\frac{٩\pi}{٢} + θ\right)}$

= $\dfrac{\text{جا } \left(٣٠ (٢\pi) + θ\right) + \text{جتا } \left(٤٥ (٢\pi) + θ\right)}{\text{جتا } \left(٢\pi + \frac{١}{٢}\pi + θ\right) - \text{جا } \left(٤\pi + \frac{١}{٢}\pi + θ\right)}$

= $\dfrac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{\text{جتا } \left(\frac{١}{٢}\pi + θ\right) - \text{جا } \left(\frac{١}{٢}\pi + θ\right)}$

= $\dfrac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{-\text{جا } θ - \text{جتا } θ}$ = $\dfrac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{-(\text{جا } θ + \text{جتا } θ)}$ = −١

(٦) $\dfrac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } ٤ س} + \dfrac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } ٥ س} = \dfrac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } (٧ س - ٣ س)}$

$+ \dfrac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } (٧ س - ٢ س)} = \dfrac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } \left(\frac{\pi}{٢} - ٣ س\right)}$

$+ \dfrac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } \left(\frac{\pi}{٢} - ٢ س\right)} = \dfrac{\text{جا } ٣ س}{\text{جا } ٣ س} + \dfrac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظا } ٢ س}$

= ١ + ١ = ٢

(٧) أولًا : ∵ س + ص = ٣٠°

∴ ٣ س + ٣ ص = ٩٠°

، ∵ س + ٢ ص = (٣ س + ٣ ص)

− (٢ س + ص) = ٩٠° − (٢ س + ص)

∴ ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص)

= ظا (٩٠° − (٢ س + ص)) ظا (٢ س + ص)

= ظتا (٢ س + ص) ظا (٢ س + ص) = ١

ثانيًا : جا (٣ س + ٢ ص) + جا (٩ س + ٨ ص)

= جا (٣ س + ٣ ص − ص)

+ جا (٩ س + ٩ ص − ص)

= جا (٩٠° − ص) + جا (٢٧٠° − ص)

= جتا ص − جتا ص = صفر

(٨) د (هـ) + د (هـ + $\frac{\pi}{٢}$) + د (هـ + π)

+ د (هـ + $\frac{٣\pi}{٢}$) + ... + د (هـ + ٩٩ π)

+ د (هـ + $\frac{١٩٩}{٢}$ π)

= جا (٢ هـ) + جا (٢ هـ + π)

+ جا (٢ هـ + ٢ π) + جا (٢ هـ + ٣ π) + ...

+ جا (٢ هـ + ١٩٨ π) + جا (٢ هـ + ١٩٩ π)

= جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ) + جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ)

+ ... + جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ) = صفر

(٩) ∵ جتا² θ = ١ ∴ جتا θ = ±١

∴ جتا θ = ١

∴ θ = صفر أو ± ٢ π أو ± ٤ π ....

أو جتا θ = −١ ∴ θ = ± π أو ± ٣ π أو ± ٥ π ...

∴ θ = صفر أو ± π أو ± ٢ π أو ± ٣ π أو ...

= ن π حيث ن ∈ ص

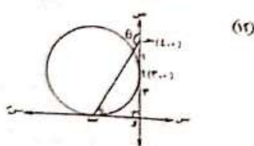
(١٠) ظا س = − $\sqrt{٣}$

∴ س تنتمى للربع الثانى أو الربع الرابع

∴ يوجد حل للمعادلة كل نصف دوره

، ∵ ٠ ≤ س ≤ ١٥ π بها ١٥ نصف دوره

∴ عدد حلول المعادلة = ١٥ حلًا



(١١) ∵ ٢ θ = ١٨٠° − ٢ α

∴ ظا θ = ظا $\left(\frac{١٨٠° - ٢ α}{٢}\right)$

= ظا (٩٠° − α)

= ظتا α

(١٢)

∵ و أ = و ب = ٣ سم (قطعتان مماستان للدائرة)

في Δ حـ و ب القائم في و

∴ ب حـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ وحدة طول.

، جتا θ = جتا (٩٠° + ق (∠ حـ ب و))

= − جا (∠ حـ ب و) = − $\frac{٤}{٥}$

(١٣) ∵ أ ء حـ ب رباعي دائري

∴ ق (∠ أ ء حـ) = ١٨٠° − θ

∴ جتا (∠ أ ء حـ) = جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ

، ∵ $\overline{أب}$ قطر في نصف الدائرة م

∴ ∠ θ زاوية حادة.

، ∵ جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ جتا θ = $\frac{٥}{١٣}$

∴ جتا (∠ أ ء حـ) = − $\frac{٥}{١٣}$

(١٤) ∵ معادلة الخط المستقيم هي ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥

∴ ظا (٩٠° + θ) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ − ظتا θ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

(١٥)

في Δ ء ب هـ : ∵ ق (∠ ب هـ ء) = ٩٠°

∴ ء هـ = $\sqrt{(٢ س)^٢ - س^٢}$ = $\sqrt{٣}$ س

∴ ظا θ = $\frac{ء هـ}{هـ حـ}$ = $\frac{\sqrt{٣} س}{٤ س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

٣٦ ∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ٢ ق (∠ حـ)

= ١٨٠° + ق (∠ حـ)

∴ جا (أ + ب + ٢ حـ) = جا (١٨٠° + حـ)

= − جا حـ = − $\frac{٣}{٥}$

٣٧

(١) ∵ جتا (١٨٠° − س) = − جتا س

∴ جتا ١٦٠° = − جتا ٢٠°

، جتا ١٤٠° = − جتا ٤٠° ... وهكذا

∴ المقدار = (جتا ٢٠° + جتا ١٦٠°)

+ (جتا ٤٠° + جتا ١٤٠°)

+ (جتا ٦٠° + جتا ١٢٠°)

+ (جتا ٨٠° + جتا ١٠٠°) + جتا ١٨٠°

= (جتا ٢٠° − جتا ٢٠°) + (جتا ٤٠° − جتا ٤٠°)

+ (جتا ٦٠° − جتا ٦٠°) + (جتا ٨٠° − جتا ٨٠°)

+ جتا ١٨٠° = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + (−١) = −١

(٢) ∵ جا (٣٦٠° − س) = − جا س

∴ جا ٣٥٩° = − جا ١° ، جا ٣٥٨° = − جا ٢° ... وهكذا

∴ المقدار = (جا ١° + جا ٣٥٩°)

+ (جا ٢° + جا ٣٥٨°) + ... + جا ١٨٠°

= ٠ + ٠ + ... + ٠ = صفر

إرشادات تمارين 11

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (حـ)

(٥) (حـ) (٦) (حـ) (٧) (ب)

٢

(١) القيمة العظمى = $\frac{١}{٢}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٢}$

، المدى = [$\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]

(٢) القيمة العظمى = $\frac{١}{٣}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٣}$

، المدى = [$\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$]

(٣) القيمة العظمى = ٢ ، القيمة الصغرى = −٢

، المدى = [−٢ ، ٢]

٣

كون الجدول وارسم بنفسك ومن الرسم نجد أن :

(١) القيمة الصغرى = −٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [−٤ ، ٤]

(٢) القيمة الصغرى = −٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [−٤ ، ٤]

(٣) القيمة الصغرى = −٢ ، القيمة العظمى = ٢

، المدى = [−٢ ، ٢]

(٤) القيمة الصغرى = −٣ ، القيمة العظمى = ٣

، المدى = [−٣ ، ٣]

٤

(١) ∵ ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠° ∴ ٠° ≤ ٣ θ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٣ θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، $\frac{٤\pi}{٦}$ ، ... ، ٢π

∴ θ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{٢\pi}{١٨}$ ، $\frac{٣\pi}{١٨}$ ، $\frac{٤\pi}{١٨}$

، ... ، $\frac{١٢\pi}{١٨}$

، ∵ ص = جتا ٣ θ

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

- القيمة الصغرى = −١ • القيمة العظمى = ١
- مدى الدالة = [−١ ، ١]

(٢) ∵ ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠° ∴ ٠° ≤ ٢ θ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٢ θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، ... ، ٢π

∴ θ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{٢\pi}{١٢}$ ، $\frac{٣\pi}{١٢}$ ، ... ، π

، ∵ ص = ٥ جا ٢ θ

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

- القيمة الصغرى = −٥ • القيمة العظمى = ٥
- مدى الدالة = [−٥ ، ٥]

٥ مثل بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :

مدى الدالة : ص = ٤ جتا θ هو [−٤ ، ٤]

القيمة العظمى = ٤ ، القيمة الصغرى = −٤

، مدى الدالة : ص = ٣ جا θ هو [−٣ ، ٣]

، القيمة العظمى = ٣ ، القيمة الصغرى = −٣

٦

(١) (أ) (٢) (حـ) (٣) (حـ) (٤) (ب) (٥) (د)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (حـ) (٩) (د)

إرشادات لحل رقم **٦**

(١) ∵ −١ ≤ جا س ≤ ١

∴ ١ ≥ − جا س ≥ −١

∴ −١ ≤ − جا س ≤ ١

∴ ١ ≤ ٢ − جا س ≤ ٣

∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ $\frac{٢ - جا س}{٣}$ ≤ ١ ∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ م ≤ ١

(٢) أقصى قيمة للدالة ص هي ١

∴ جا ($\frac{\pi}{٤}$ + س) = ١

$\frac{\pi}{٤}$ + س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٤}$

(٣) دورة الدالة د (س) = جا (ب س) هي $\frac{٢\pi}{ب}$

∴ $\frac{٢\pi}{ب}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ ب = ٣

(٤) أكبر قيمة للمقدار (جتا $س_١$ − جتا $س_٢$)

تكون عندما تكون جتا $س_١$ = ١

، جتا $س_٢$ = −١

∴ جتا $س_١$ − جتا $س_٢$ = ١ − (−١) = ٢

(٥) ∵ د(س) = أ جتا ب س دورتها $\frac{2\pi}{ب} = \frac{\pi}{2}$

∴ ب = ٤

، مداها [-١ ، ١]   ∴ أ = ١

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

(٦) أ = جا $\frac{\pi}{2}$ = ١ ، ب = جا $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = -١

∴ |أ| + |ب| = |١| + |-١| = ٢

(٧) ∵ دورة الدالة هى $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

، ∵ من و إلى ب دورة كاملة.

∴ الإحداثى السينى لـ ب = ٤ π

(٨) ∵ ب = ٢ π ، أ = -π

∴ ب - أ = ٢ π - (-π) = ٣ π

(٩) المنحنى ص = جا ٣ س

∴ يقطع محور السينات فى نقاط عددها

= ٢ × عدد الدورات + ١

، ∵ الدالة ص = جا ٣ س لها دورة كاملة كل $\frac{2\pi}{3}$

∴ عدد الدورات فى الفترة [٠ ، ٢ π]

= ٢ π ÷ $\frac{2\pi}{3}$ = ٣

∴ عدد نقاط التقاطع المطلوب = ٢ × ٣ + ١ = ٧

إرشادات تمارين 12

١

(١) (أ)   (٢) (جـ)   (٣) (جـ)   (٤) (أ)

(٥) (أ)   (٦) (أ)   (٧) (أ)

٢

(١) ٣٦° ٥٢َ ١٢ً   (٢) ٣٨° ٨َ ٢٥ً   (٣) ٦٧° ٥١َ ٤٤ً

(٤) ∵ θ = ظا$^{-1}$ (-٠,٨٢٢٧) ، -٠,٨٢٢٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° - (٣٩° ٢٦َ ٤٩ً) = ١٤٠° ٣٣َ ١١ً

(٥) ∵ θ = جا$^{-1}$ (-٠,٤٦٥٢) ، -٠,٤٦٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٧° ٤٣َ ٢٣ً) = ٢٠٧° ٤٣َ ٢٣ً

(٦) ∵ θ = جتا$^{-1}$ (-٠,٥٢٠٦) ، -٠,٥٢٠٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° - (٥٨° ٣٧َ ٤٩ً) = ١٢١° ٢٢َ ١١ً

(٧) ١٥° ٢٣َ ٤١ً

(٨) ∵ θ = ظتا$^{-1}$ (-١,٤٦١٢) ، -١,٤٦١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° - (٣٤° ٢٣َ ١٢ً) = ١٤٥° ٣٦َ ٤٨ً

(٩) ١٧° ٢٢َ ٢٣ً

(١٠) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (-٢,٥٤٦٦) ، -٢,٥٤٦٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٣° ٧َ ١٧ً) = ٢٠٣° ٧َ ١٧ً

(١١) ∵ θ = قا$^{-1}$ (-٣,٥٧) ، -٣,٥٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° - (٧٣° ٤٣َ ٥٩ً) = ١٠٦° ١٦َ ١ً

(١٢) ١٩° ٢٥َ ٥٩ً

٣

(١) ∵ θ = جا$^{-1}$ ٠,٨٦٦٠٣ ، ٠,٨٦٦٠٣ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ θ = ٦٠° ٠َ ٢ً

أو θ = ١٨٠° - ٦٠° ٠َ ٢ً = ١١٩° ٥٩َ ٥٨ً

(٢) ∵ θ = جتا$^{-1}$ (-٠,٤٧٥٢) ، -٠,٤٧٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° - (٦١° ٣٧َ ٤٩ً) = ١١٨° ٢٢َ ١١ً

أو θ = ١٨٠° + (٦١° ٣٧َ ٤٩ً) = ٢٤١° ٣٧َ ٤٩ً

(٣) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (-١,٢٥٧٦) ، -١,٢٥٧٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٥٢° ٤٠َ ١٥ً) = ٢٣٢° ٤٠َ ١٥ً

أو θ = ٣٦٠° - (٥٢° ٤٠َ ١٥ً) = ٣٠٧° ١٩َ ٤٥ً

(٤) ∵ θ = ظا$^{-1}$ ١,٥٤١٧ ، ١,٥٤١٧ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∴ θ = ٥٧° ١َ ٥٢ً

أو θ = ١٨٠° + (٥٧° ١َ ٥٢ً) = ٢٣٧° ١َ ٥٢ً

(٥) ∵ θ = جتا$^{-1}$ (-٠,٦٤٢) ، -٠,٦٤٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° - (٥٠° ٣َ ٣٢ً) = ١٢٩° ٥٦َ ٢٨ً

أو θ = ١٨٠° + (٥٠° ٣َ ٣٢ً) = ٢٣٠° ٣َ ٣٢ً

(٦) ∵ θ = قا$^{-1}$ ٢,٠٠٥١٥ ، ٢,٠٠٥١٥ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

∴ θ = ٦٠° ٤٩َ ٢٧ً

أو θ = ٣٦٠° - (٦٠° ٤٩َ ٢٧ً) = ٢٩٩° ١٠َ ٣٣ً

(٧) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (-١,٨٧١٥) ، -١,٨٧١٥ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٣٢° ١٧َ ٥٥ً) = ٢١٢° ١٧َ ٥٥ً

أو θ = ٣٦٠° - (٣٢° ١٧َ ٥٥ً) = ٣٢٧° ٤٢َ ٥ً

(٨) ∵ θ = ظتا$^{-1}$ (-٢,٧٠١٢) ، -٢,٧٠١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° - (٢٠° ١٨َ ٥٣ً) = ١٥٩° ٤١َ ٧ً

أو θ = ٣٦٠° - (٢٠° ١٨َ ٥٣ً) = ٣٣٩° ٤١َ ٧ً

(٩) ∵ θ = ظا$^{-1}$ (-٢,١٤٥٦) ، -٢,١٤٥٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° - (٦٥° ٠َ ٤٠ً) = ١١٤° ٥٩َ ٢٠ً

أو θ = ٣٦٠° - (٦٥° ٠َ ٤٠ً) = ٢٩٤° ٥٩َ ٢٠ً

٤

(١) ∵ النقطة ب $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ تقع فى الربع الأول

∴ θ تقع فى الربع الأول

، ∵ جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠°   ∴ θ = ٣٠°

(٢) ∵ النقطة ب $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ تقع فى الربع الثانى

∴ θ تقع فى الربع الثانى

، ∵ جا$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

(٣) ∵ النقطة ب $\left(\frac{6}{10} ، \frac{-8}{10}\right)$ تقع فى الربع الرابع

∴ θ تقع فى الربع الرابع

، ∵ جتا$^{-1}$ $\frac{6}{10}$ = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ θ = ٣٦٠° - (٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ٣٠٦° ٥٢َ ١٢ً

٥

(١) ∵ ظا θ = $\frac{8}{5}$ ∴ θ = ظا$^{-1}$ $\frac{8}{5}$

∴ θ = ٥٧° ٥٩َ ٤١ً

(٢) ∵ جتا θ = $\frac{7}{9}$ ∴ θ = جتا$^{-1}$ $\frac{7}{9}$

∴ θ = ٣٨° ٥٦َ ٣٣ً

(٣) ∵ جا θ = $\frac{4}{9}$ ∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{4}{9}$

∴ θ = ٢٦° ٢٣َ ١٦ً

٦

(١) ∵ ٩٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

∴ θ تقع فى الربع الثانى

∴ جا θ = $\frac{1}{3}$

∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{1}{3}$

∴ θ = ١٨٠° - (١٩° ٢٨َ ١٦ً) = ١٦٠° ٣١َ ٤٤ً

(٢) ∴ جتا θ = $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ، ظا θ = $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

، قا θ = $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$

٧

∵ جتا أ = -٠,٥٨٠٧   ∴ ق(∠أ) = ١٢٥° ٣٠َ

∵ ظا ب = ٠,٤٥٧٨   ∴ ق(∠ب) = ٢٤° ٣٦َ

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٥٠° ٦َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° - ١٥٠° ٦َ = ٢٩° ٥٤َ

٨

∵ طا θ ≈ ٠,٤٩٩ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∵ θ = طا⁻¹ ٠,٤٩٩ ∴ θ ≈ ٢٦° ٣١َ

أ، θ = ١٨٠° + ٢٦° ٣١َ = ٢٠٦° ٣١َ

٩

∵ حتا θ = − ٠,٣٥٦٤ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

ويفرض حتا θ = ٠,٣٥٦٤

∴ θ = ٦٩° ٧َ ∴ θ = ١٨٠° − ٦٩° ٧َ = ١١٠° ٥٣َ

أ، θ = ١٨٠° + ٦٩° ٧َ = ٢٤٩° ٧َ

١٠

∵ طا θ = $\frac{٤}{٣}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ θ أكبر زاوية موجبة

، θ ∈]٠° ، ٣٦٠°[

∴ θ تقع فى الربع الثالث

∴ جا α = جا (١٨٠° − ٣٠°) (− جا θ)

+ $\frac{١}{٥}$ (− جتا θ) طا (١٨٠° + ٤٥°)

= جا ٣٠° ($\frac{٤}{٥}$) + $\frac{١}{٥}$ ($\frac{٥}{٤}$) طا ٤٥°

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٨ + ٥}{٢٠}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

∴ جا α = $\frac{١٣}{٢٠}$ (موجبة)

∴ α تقع فى الربع الأول أو الثانى

∵ α = جا⁻¹ $\frac{١٣}{٢٠}$ ∴ α = ٤٠° ٣٢َ

أ، α = ١٨٠° − ٤٠° ٣٢َ = ١٣٩° ٢٨َ

١١

جا α = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ ٩٠° < α < ١٨٠°

∴ α تقع فى الربع الثانى

، ∵ $\frac{-٥}{٤}$ حتا (٣٦٠° − α) + طتا (٢٧٠° − θ) = ٢

∴ $\frac{-٥}{٤}$ حتا α + طا θ = ٢

∴ $\frac{-٥}{٤}$ × $\frac{-٤}{٥}$ + طا θ = ٢

∴ ١ + طا س = ٢ ∴ طا θ = ١ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ طا ٤٥° = ١

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

١٢

من الرسم :

أ حـ = ٤ وحدة طول

، ب حـ = ٣ وحدة طول

، ∵ طا θ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ طا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ θ = طا⁻¹ $\frac{٣}{٤}$ ∴ θ ≈ ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

١٣ إجابة كريم هى الصحيحة وذلك لأن :

قتا θ = $\frac{١٢}{٧}$ أما قا θ ≠ $\frac{١٢}{٧}$

١٤ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٤

(١) طا (∠ أ ب حـ) = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق (∠ أ ب حـ) = طا⁻¹ ($\frac{٣}{٤}$)

(٢) جتا⁻¹ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٣٠° ∴ جا (٣٠°) = $\frac{١}{٢}$

(٣) جتا⁻¹ (صفر) = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ قتا ($\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{١}{جا (\frac{\pi}{٢})}$ = ١

(٤) فى Δ أ ب حـ : ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ أ حـ = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

طا⁻¹ ($\frac{٥}{١٢}$) = ق (∠ أ حـ ب)

∴ جا (∠ أ حـ ب) = $\frac{٥}{١٣}$

(٥) ∵ مساحة متوازى الأضلاع

أ ب حـ ء = ٤٠ سم²

∴ ب هـ = $\frac{٤٠}{٨}$ = ٥ سم

∴ جا أ = $\frac{٥}{٦}$

∴ ق (∠ أ) ≈ ٥٦°

(٦) ∵ طا ($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ طا⁻¹ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{\pi}{٦}$

، ∵ ظتا ($\frac{\pi}{٦}$) = $\sqrt{٣}$ ∴ ظتا⁻¹ ($\sqrt{٣}$) = $\frac{\pi}{٦}$

∴ طا⁻¹ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) + ظتا⁻¹ ($\sqrt{٣}$) = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\pi}{٣}$

(٧) نفرض أن جتا⁻¹ س = α

∴ جتا α = س

، نفرض أن جا⁻¹ س = β

∴ جا β = س ∴ جتا α = جا β

∴ α + β = $\frac{\pi}{٢}$

∴ جتا⁻¹ س + جا⁻¹ س = $\frac{\pi}{٢}$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

القياس الدائرى

= ٢٠٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$

≈ ٣,٤٩ ء

٢

قياس الزاوية التى يصنعها العقرب بعد مرور ١٠ دقائق

= ٦٠°

∴ المسافة التى تقطعها النقطة = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٦

= ٢ π سم

٣

المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

= ٢ π × ٩٠٠٠ ≈ ٥٦٥٤٨,٦٧ كم

∴ سرعة القمر الصناعى

= $\frac{٥٦٥٤٨,٦٧}{٦}$ = ٩٤٢٤,٧٨ كم/ساعة

٤

طول نصف قطر دائرة مسار القمر الصناعى

= ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

= ٢ π × ١٠٠٠٠ ≈ ٦٢٨٣١,٨٥ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال ساعة واحدة

= $\frac{٦٢٨٣١,٨٥}{٣}$ ≈ ٢٠٩٤٤ كم

٥

(١) قياس الزاوية التى يدور الظل عندها بعد مرور ٤ ساعات

= ١٥ × ٤ × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≈ ١,٠٥ ء

(٢) القياس الستينى للزاوية = $\frac{٢ \pi}{٣}$ × $\frac{١٨٠°}{\pi}$ = ١٢٠°

∴ عدد الساعات = ١٢٠° ÷ ١٥° = ٨ ساعات

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى يصنعها الظل بعد مرور ١٠ ساعات

= ١٥° × ١٠ × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٥ \pi}{٦}$

∴ طول القوس = $\frac{٥ \pi}{٦}$ × ٢٤ = ٢٠ π سم

٦

∵ جا θ₁ = ك جا θ₂ ∴ جا θ₁ = $\frac{جا ٦٠°}{\sqrt{٣}}$

∴ جا θ₁ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ₁ = ٣٠°

٧

(١) الزاوية المنتسبة

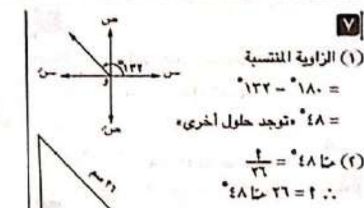
= ١٨٠° − ١٣٢°

= ٤٨° «توجد حلول أخرى»

(٢) حتا ٤٨° = $\frac{أ}{٢٦}$

∴ أ = ٢٦ حتا ٤٨°

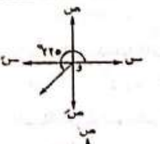
≃ ١٧ سم



٨

(١) $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠°}{٤}$

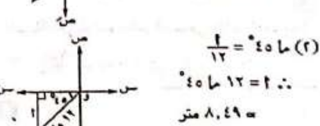
= ٢٢٥°



(٢) حا ٤٥° = $\frac{أ}{١٢}$

∴ أ = ١٢ حا ٤٥°

≃ ٨,٤٩ متر



٩

عندما ف = ١٠ ∴ ٦ حا (١٥ ن)° = ٠

∴ حا (١٥ ن)° = ٠

∴ ١٥ ن = ٠ ∴ ن = ٠

أ، ١٥ ن = ١٨٠ ∴ ن = ١٢

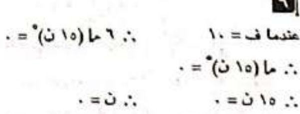
أ، ١٥ ن = ٣٦٠ ∴ ن = ٢٤

أ، ١٥ ن = ٥٤٠ ∴ ن = ٣٦ (مرفوض)

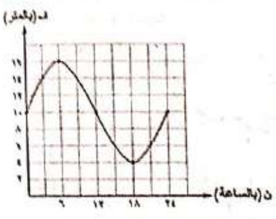
∴ عمق المياه = ١٠ أمتار

عند ن = ٠ ، ١٢ ، ٢٤ ساعة

ف = (٦ حا ١٥ ن)° + ١٠

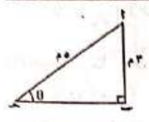


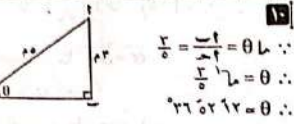
ن بالساعة	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف (بالمتر)	١٠	١٦	١٠	٤	١٠



تستطيع السفينة دخول الميناء عندما ن ∋ [٠ ، ١٢]

١٠

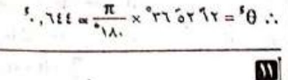




∵ حا θ = $\frac{أب}{أجـ}$ = $\frac{٣}{٥}$

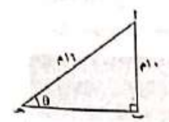
∴ θ = حا⁻¹ $\frac{٣}{٥}$

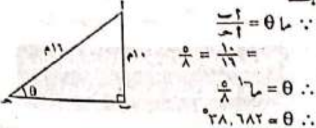
∴ θ ≃ ٣٦° ٥٢َ ١٢ً



∴ θ^ء = ٣٦° ٥٢َ ١٢ً × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٦٤٤^ء

١١





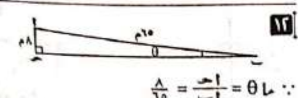
∵ حا θ = $\frac{أب}{أجـ}$

= $\frac{١٠}{١٦}$ = $\frac{٥}{٨}$

∴ θ = حا⁻¹ $\frac{٥}{٨}$

∴ θ ≃ ٣٨,٦٨٢°

١٢



∵ حا θ = $\frac{أجـ}{أب}$ = $\frac{٨}{٦٥}$

∴ θ = حا⁻¹ $\frac{٨}{٦٥}$ ∴ θ ≃ ٧ ٤ ٦١°

إرشادات الوحدة الثالثة

إرشادات تمارين 1

١

(١) ∵ ق (∠ب) = ق (∠س)

، ق (∠جـ) = ق (∠ص) ، ق (∠ء) = ق (∠ع)

∴ ق (∠أ) = ق (∠ل) (١)

، ∵ $\frac{أب}{ل س}$ = $\frac{ب جـ}{س ص}$ = $\frac{جـ ء}{ص ع}$ = $\frac{ء أ}{ع ل}$ = $\frac{٥}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع ل س ص ع

(٢) ∵ المضلع و ز س هـ مربع ، المضلع أ ب جـ ء مربع

∴ المربع و ز س هـ ~ المربع أ ب جـ ء

، معامل التشابه = $\frac{٨}{٥}$

(٣) ∵ $\frac{أب}{س ص}$ ≠ $\frac{ب جـ}{ص ع}$ ∴ المضلعان غير متشابهين

(٤) ∵ المضلع أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق (∠ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، ∵ المضلع ز و هـ س متوازي أضلاع

∴ ق (∠ز) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

، ∵ ق (∠أ) = ق (∠ز) ، ق (∠ب) = ق (∠و)

، ق (∠جـ) = ق (∠هـ)

، ق (∠ء) = ق (∠س) (١)

، $\frac{أب}{ز و}$ = $\frac{ب جـ}{و هـ}$ = $\frac{جـ ء}{هـ س}$ = $\frac{ء أ}{ز س}$ = $\frac{٣}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ متوازي الأضلاع أ ب جـ ء

~ متوازي الأضلاع ز و هـ س

(٥) ∵ المضلع س ص ع ل مستطيل

∴ س ص = ل ع = ٣٠ سم

، ∵ $\frac{أب}{س ص}$ ≠ $\frac{ب جـ}{ص ع}$

∴ المضلعان غير متشابهين

(٦) ∵ المضلع أ ب جـ ء معين

∴ ق (∠أ) = ق (∠جـ) = $\frac{٣٦٠° - ١٤٠°}{٢}$ = ١١٠°

، ∵ المضلع ص س ل ع معين

∴ ق (∠س) = ق (∠ع) = $\frac{٣٦٠° - ٢٢٠°}{٢}$ = ٧٠°

، ∵ ق (∠أ) = ق (∠ص) ، ق (∠ب) = ق (∠س)

، ق (∠جـ) = ق (∠ل) ، ق (∠ء) = ق (∠ع) (١)

، $\frac{أب}{ص س}$ = $\frac{ب جـ}{س ل}$ = $\frac{جـ ء}{ل ع}$ = $\frac{ء أ}{ع ص}$ = $\frac{١}{٧}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ المعين أ ب جـ ء ~ المعين ص س ل ع

(٧) ∵ ق (∠ب) = ق (∠ء) ، ق (∠جـ) = ق (∠و)

∴ ق (∠أ) = ق (∠هـ) (١)

، ∵ $\frac{أب}{هـ ء}$ = $\frac{ب جـ}{ء و}$ = $\frac{أ جـ}{هـ و}$ = $\frac{٧}{١١}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ء و

(٨) ∵ $\overline{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما

∴ ق (∠أ) = ١٨٠° − ق (∠ب)

، ∵ $\overline{ص ع}$ // $\overline{س ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل ع}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ع) = ١٨٠° − ق (∠ل)

، ∵ ق (∠ب) = ق (∠ل)

∴ ق (∠أ) = ق (∠ع)

، ∵ ق (∠أ) = ق (∠ع) ، ق (∠ب) = ق (∠ل)

، ق (∠جـ) = ق (∠س)

∴ ق (∠ء) = ق (∠ص) (١)

، ∵ $\frac{أب}{ع ل}$ = $\frac{ب جـ}{ل س}$ = $\frac{جـ ء}{س ص}$ = $\frac{ء أ}{ص ع}$ = $\frac{٥}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع ع ل س ص

٢

∵ Δ ا ب حـ ~ Δ و ك ل

∴ اب/وك = بحـ/كل = احـ/ول = معامل التشابه

∴ ١٥/١٠ = ١٢/س = ١٤/ص

∴ معامل التشابه = ١٥/١٠ = ٣/٢ (المطلوب أولاً)

، س = ٨ سم ، ص = ٩ ١/٣ سم (المطلوب ثانياً)

٣

∵ المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع هـ و ز ح

∴ اب/هـو = بحـ/وز = حـء/زح = ءا/حهـ = معامل التشابه

∴ (ص + ٢)/٦ = بحـ/وز = ١٥/س = ١٢/٨

∴ معامل التشابه = ١٢/٨ = ٣/٢ (المطلوب أولاً)

، س = ١٠ سم ، ص + ٢ = ٩

∴ ص = ٧ سم (المطلوب ثانياً)

٤

∵ Δ حـ ب ا ~ Δ حـ هـ ء

∴ حـب/حـهـ = با/هـء = احـ/ءحـ ∴ ١٢/٤ = ٩/هـء = احـ/٥

∴ هـء = ٣ سم ، احـ = ١٥ سم

∴ هـا = ١١ سم (وهو المطلوب)

٥

∵ Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب حـ

∴ ق(∠ا ء هـ) = ق(∠ب) وهما متناظرتان

∴ ءهـ // بحـ (المطلوب أولاً)

، ∵ اء/اب = ءهـ/بحـ = اهـ/احـ ∴ ٦/اب = ٤/١٢ = ٥/احـ

∴ اب = ١٨ سم ∴ بء = ١٢ سم

، احـ = ١٥ سم

∴ حـهـ = ١٠ سم (المطلوب ثانياً)

٦

∵ Δ ا ب حـ ~ Δ ء هـ و

∴ اب/ءهـ = بحـ/هـو = احـ/ءو = محيط Δ ابحـ / محيط Δ ءهـو

∴ اب/٨ = بحـ/٩ = احـ/١٠ = ٨١/٢٧

∴ اب = ٢٤ سم ، بحـ = ٢٧ سم

، احـ = ٣٠ سم (وهو المطلوب)

٧

∵ المثلثان متشابهان

∴ طول أكبر ضلع فى المثلث الأول / طول أكبر ضلع فى المثلث الثانى = محيط المثلث الأول / محيط المثلث الثانى

∴ طول أكبر ضلع فى المثلث الأول = (٨ × ٧٤)/١٨,٥ = ٣٢ سم (وهو المطلوب)

٨

بفرض أن بعدى المستطيل الثانى هما س سم ، ص سم

∵ المستطيلان متشابهان ∴ ٨/س = ١٢/ص = ٤٠/٢٠٠

∴ س = ٤٠ سم ، ص = ٦٠ سم

∴ مساحة المستطيل الثانى = ٤٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠ سم² (وهو المطلوب)

٩

∵ المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠ا) = ق(∠س) = ١١٥°

∴ ق(∠ل) = ٣٦٠° − (١١٥° + ٨٥° + ٧٠°)

= ٩٠°

، ∵ المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ اء/س ل = بحـ/ص ع = محيط المضلع ابحـء / محيط المضلع س ص ع ل

∴ اء/٤,٨ = ٦/٨ = ١٩,٥/محيط المضلع س ص ع ل

∴ اء = ٣,٦ سم (المطلوب أولاً)

، محيط المضلع س ص ع ل = ٢٦ سم (المطلوب ثانياً)

١٠

(١) (حـ) (٢) (ا) (٣) (حـ)

(٤) (ا) (٥) (ب) (٦) (ب)

(٧) (ا) (٨) (حـ) (٩) (حـ)

١١

(١) س ص (٢) حـء (٣) ءا

(٤) س ص ع ل ، ا ب حـ ء

١٢

∵ المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ اب/س ص = بحـ/ص ع ∴ ٣٢/(٣م − ١) = ٤٠/(٣م + ١)

∴ ١٢٠ م − ٤٠ = ٩٦ م + ٣٢

∴ ٢٤ م = ٧٢ ∴ م = ٣ (وهو المطلوب)

١٣

∵ Δ م ا ب ~ Δ م ء حـ

∴ ق(∠ا) = ق(∠ء) وهما متبادلتان

∴ اب // ءحـ (المطلوب أولاً)

∵ Δ م ا ب ~ Δ م ء حـ ∴ ما/مء = مب/محـ = ٥/٣

∴ ما = ٥ ك ، مء = ٣ ك

، ∵ اء = ام + مء ، اء = ٦ سم

∴ ٥ ك + ٣ ك = ٦ ∴ ٨ ك = ٦

∴ ك = ٣/٤

∴ ام = (٥ × ٣)/٤ = ٣ ٣/٤ سم (المطلوب ثانياً)

١٤

∵ Δ م ا ب ~ Δ م ء حـ ∴ ق(∠ا) = ق(∠حـ)

وهما مرسومتان على بء وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل ا ب ء حـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

، ∵ Δ م ا ب ~ Δ م ء حـ

∴ ام/ءم = اب/ءحـ = بم/حـم ∴ ٤,٨/محـ = ٨/٤ = مب/٢,٥

∴ محـ = ٢,٤ سم ، مب = ٥ سم

∴ بحـ = ٢,٤ + ٥ = ٧,٤ سم (المطلوب ثانياً)

١٥

(١) لاحظ أن المثلث المطلوب تكبير للمثلث ا ب حـ

ويفرض أن Δ اَ بَ حـَ ~ Δ ا ب حـ

∴ اَبَ/اب = بَحـَ/بحـ = اَحـَ/احـ = معامل التشابه

∴ اَبَ/٥ = بَحـَ/٦ = اَحـَ/٩ = ٢,٥

∴ اَبَ = ١٢,٥ سم ، بَحـَ = ١٥ سم

، اَحـَ = ٢٢,٥ سم (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المثلث المطلوب تصغير للمثلث ا ب حـ

ويفرض أن Δ اَ بَ حـَ ~ Δ ا ب حـ

∴ اَبَ/اب = بَحـَ/بحـ = اَحـَ/احـ = معامل التشابه

∴ اَبَ/٥ = بَحـَ/٦ = اَحـَ/٩ = ٠,٦

∴ اَبَ = ٣ سم ، بَحـَ = ٣,٦ سم

، اَحـَ = ٥,٤ سم (وهو المطلوب)

١٦

(١) لاحظ أن المستطيل المطلوب تكبير المستطيل المعطى

ويفرض أن المستطيل اَبَحـَءَ ~ المستطيل ا ب حـ ء

∴ اَبَ/اب = بَحـَ/بحـ = محيط المستطيل اَبَحـَءَ / محيط المستطيل ابحـء

= معامل التشابه

∴ اَبَ/١٠ = بَحـَ/٦ = محيط المستطيل اَبَحـَءَ/٣٢ = ٣

∴ اَبَ = ٣٠ سم ، بَحـَ = ١٨ سم

محيط المستطيل اَبَحـَءَ = ٩٦ سم



• مساحة المستطيل أَ بَ حَ ءَ

$= ٣٠ \times ١٨ = ٥٤٠$ سم² (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المستطيل المطلوب تصغير للمستطيل المعطى

ونفرض أن المستطيل أَ بَ حَ ءَ ~ المستطيل أ ب حـ ء

$\therefore \frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{\text{محيط المستطيل أ ب حـ ء}}$

= معامل التشابه

$\therefore \frac{\text{أَ بَ}}{١٠} = \frac{\text{بَ حَ}}{٦} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{٣٢} = ٠.٤$

∴ أَ بَ = ٤ سم ، بَ حَ = ٢.٤ سم

• محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ = ١٢.٨ سم

• مساحة المستطيل أَ بَ حَ ءَ

$= ٤ \times ٢.٤ = ٩.٦$ سم² (وهو المطلوب)

١٧

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ء أ ب)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ (المطلوب أولاً)

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}}$

∴ $(\text{أ ب})^2 = \text{ء ب} \times \text{ب حـ}$

∴ أ ب وسط متناسب بين ب ء ، ب حـ (المطلوب ثانياً)

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{٦}{\text{ء ب}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٧.٥}{\text{أ ء}}$

∴ أ ء = ٥ سم ، ء ب = ٤ سم

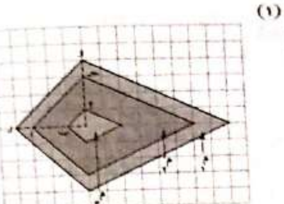
∴ حـ ء = ٩ − ٤ = ٥ سم (المطلوب ثالثاً)

١٨

نفرض أن طول ضلع المربع = وحدة طولية

∴ طول قطر المربع = $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

(١)



من فيثاغورث :

∴ أ ب = $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

• حـ ء = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

• و ر = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

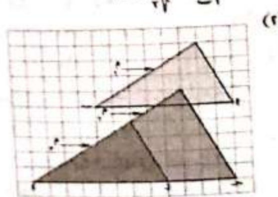
∴ معامل تشابه المضلع م٣ للمضلع م١

$= \frac{\text{و ر}}{\text{أ ب}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٤$

∴ معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م١

$= \frac{\text{حـ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٢$

(٢)



∵ أ ب = ٨ وحدة طولية

• حـ ء = ١٢ وحدة طولية

• و ء = ٨ وحدة طولية

∴ معامل تشابه المضلع م٣ للمضلع م١

$= \frac{\text{و ء}}{\text{أ ب}} = \frac{٨}{٨} = ١$

• معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م١

$= \frac{\text{حـ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

١٩

∵ المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ هـ و ن

∴ $\frac{\text{محيط المستطيل أ ب حـ ء}}{\text{محيط المستطيل أ هـ و ن}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$

$= \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{أ ب} - \text{أ ء}}{\text{أ هـ} - \text{أ ن}}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 2

١

(١) في Δ أ ب حـ

ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٥٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ء) = ٤٥°

• ق(∠ حـ) = ق(∠ و) = ٥٥°

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

(٢) ∵ ΔΔ س ص ع ، ن ل م قائما الزاوية

• ق(∠ ع) = ق(∠ م) = ٦٥°

∴ Δ س ص ع ~ Δ ن ل م

(٣) في Δ أ ب حـ :

ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٣٠°) = ٨٥°

• في Δ س ص ع

ق(∠ س) = ١٨٠° − (٧٥° + ٦٥°) = ٤٠°

∴ في ΔΔ أ ب حـ ، س ص ع

فقط ق(∠ أ) = ق(∠ ص)

∴ المثلثان غير متشابهين.

(٤) ∵ $\overline{\text{أ حـ}} // \overline{\text{ء ب}}$ ∴ Δ أ هـ حـ ~ Δ ب هـ ء

(٥) ∵ ΔΔ أ ب حـ ، ء هـ و متساويا الأضلاع

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

(٦) ∵ ΔΔ أ ب حـ ، س ع ص متساويا الساقين

• ق(∠ ب) = ق(∠ ع) = ٧٠°

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ س ع ص

(٧) ΔΔ أ ء هـ ، أ ب حـ غير متشابهين

(٨) Δ س ص ع ~ Δ ن ل م

لأن $\frac{\text{س ص}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ل م}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ن م}}$ = [illegible]

(٩) Δ أ هـ حـ ~ Δ ب هـ د

لأن $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ د}}$ = [illegible]

• ق(∠ أ هـ حـ) = ق(∠ ب هـ د) (بالتقابل بالرأس)

(١٠) Δ س ص ع ~ Δ ل ص م

لأن $\frac{\text{س ص}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ص م}}$ = [illegible]

• ق(∠ س ص ع) = ق(∠ ل ص م)

٢ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ب)

(٩) (جـ) (١٠) (د) (١١) (د) (١٢) (ب)

٣

(١) ∵ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$ ∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ [illegible] (المطلوب ثانياً)

(٢) ∵ $\overline{\text{ب حـ}} // \overline{\text{ء هـ}}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}}$ ∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ س = ١١ (المطلوب ثانياً)

(٣) ∵ $(\text{أ ب})^2 = \text{أ ء} \times \text{أ حـ}$

∴ $\text{س}^2 = ١٨ \times ٨ = ١٤٤$

∴ س = ١٢ (وهو المطلوب)

(٤) ∵ $(هـ حـ)^2 = هـ ب \times هـ ء$

∴ ٣٦ = ٤ × (٢ س + ١)

∴ ٣٦ = ٨ س + ٤   ∴ ٣٢ = ٨ س

∴ س = ٤ (وهو المطلوب)

(٥) ∵ ΔΔ أءهـ ، ب حـ هـ فيهما :

$\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ءهـ}{حـ هـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{ءهـ}{حـ هـ}$

، ∵ ق(∠أهـء) = ق(∠ب هـ حـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أءهـ ~ Δ ب حـ هـ

وينتج أن : ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٧٥°

∴ س = ٧٥° (وهو المطلوب)

(٦) ∵ ΔΔ ب ء هـ ، ب حـ أ فيهما :

$\frac{ب ء}{ب حـ} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{ب هـ}{ب أ} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ب ء}{ب حـ} = \frac{ب هـ}{ب أ}$

، ∵ ∠ب مشتركة ∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب حـ أ

، $\frac{ء هـ}{حـ أ} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ص}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ ص = ٣ سم (وهو المطلوب)

(٧) ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أحـ} = \frac{١}{٢}$ ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أءهـ ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{ءهـ}{ب حـ} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٦}{س + ٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ س + ٤ = ١٢

∴ س = ٨

∴ أهـ = س − ٣ = ٨ − ٣ = ٥ سم

∴ هـ حـ = ص + ١ = ٥

∴ ص = ٤ (وهو المطلوب)

٤

∵ ΔΔ أهـء ، أحـ ب فيهما :

ق(∠أهـء) = ق(∠حـ) ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أهـء ~ Δ أحـ ب

∴ $\frac{أهـ}{أحـ} = \frac{هـء}{حـ ب} = \frac{أء}{أب}$ ∴ $\frac{١٤}{أحـ} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{أء}{أب}$

∴ أحـ = ١٧,٥ سم ، $\frac{أء}{أب} = \frac{١٢}{١٥}$

∴ $\frac{أء}{أء + ٤} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ٥ أء = ٤ أء + ١٦

∴ أء = ١٦ سم ، أب = ٢٠ سم (وهو المطلوب)

٥

∵ $\overline{أء} \parallel \overline{ب حـ}$

∴ Δ أهـء ~ Δ ب هـ حـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{هـء}{هـ حـ}$

∴ أهـ × هـ حـ = ءهـ × هـ ب (المطلوب ثانيًا)

٦

∵ ∠أ تتمم ∠أهـء ، ق(∠أ) = ق(∠ب هـ ء)

∴ ق(∠أهـء) + ق(∠ب هـ ء) = ٩٠°

∴ Δ أهـ ب قائم الزاوية في هـ ، $\overline{هـء} \perp \overline{أب}$

∴ $(ب هـ)^2$ = ب ء × ب أ = ٦٤

∴ ب هـ = ٨ سم (وهو المطلوب)

٧

∵ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤,٥}{٦} = \frac{٦}{٨}$ ∴ $\frac{ب أ}{هـ و} = \frac{ب حـ}{ء هـ} = \frac{حـ أ}{و ء}$

∴ Δ حـ أ ب ~ Δ ء و هـ (وهو المطلوب)

٨

∵ $\frac{س ب}{أ ب} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ب ص}{ب حـ} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$

، $\frac{س ص}{أ حـ} = \frac{١٣,٥}{١٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{س ب}{أ ب} = \frac{ب ص}{ب حـ} = \frac{س ص}{أ حـ}$

∴ Δ س ب ص ~ Δ أ ب حـ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠س ب ص) = ق(∠أ ب حـ)

∴ $\overrightarrow{ب حـ}$ ينصف ∠أ ب س (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ $\frac{أ ب}{ء ب} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ب حـ}{ب أ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{أ حـ}{ء أ} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أ ب}{ء ب} = \frac{ب حـ}{ب أ} = \frac{أ حـ}{ء أ}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ب حـ)

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ ينصف ∠ء ب حـ (المطلوب ثانيًا)

١٠

أهـ = ٦ − ٢ = ٤ سم

∴ $\frac{أهـ}{أب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أء}{أحـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ΔΔ أهـء ، أ ب حـ فيهما : ∠أ مشتركة

، $\frac{أهـ}{أب} = \frac{أء}{أحـ} = \frac{١}{٢}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب (وهو المطلوب)

١١

∵ $\frac{أهـ}{ءهـ} = \frac{٧,٥}{١٠} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ ΔΔ أ ب هـ ، ء حـ هـ فيهما : $\frac{أهـ}{ءهـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٣}{٤}$

، ق(∠أهـ ب) = ق(∠حـ هـ ء) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ ء حـ هـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{أ ب}{ء حـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$ ∴ $\frac{٦}{ء حـ} = \frac{٣}{٤}$

∴ ء حـ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

١٢

∵ ΔΔ أ ب م ، أ حـ ب فيهما :

∠أ مشتركة ، ق(∠أ ب م) = ق(∠حـ)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ب م}{حـ ب} = \frac{أ م}{أ ب}$

∴ $(أ ب)^2$ = أ م × أ حـ (وهو المطلوب)

١٣

(١) Δ أءهـ ~ Δ أ ب حـ

، Δ أ ء س ~ Δ أ ب ص

، Δ أ س هـ ~ Δ أ ص حـ

(٢) ∵ Δ أءهـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{ب حـ} = \frac{أهـ}{أحـ}$ (١)

∵ Δ أ ء س ~ Δ أ ب ص

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ء س}{ب ص} = \frac{أ س}{أ ص}$ (٢)

∵ Δ أ س هـ ~ Δ أ ص حـ

∴ $\frac{أ س}{أ ص} = \frac{س هـ}{ص حـ} = \frac{أهـ}{أحـ}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ $\frac{ء س}{ب ص} = \frac{س هـ}{ص حـ} = \frac{ء هـ}{ب حـ}$ (وهو المطلوب)

١٤

∵ $(أ ب)^2$ = ب ء × ب حـ

∴ $(٣٠)^2$ = ب ء (ب ء + ٣٢)

∴ ٩٠٠ = $(ب ء)^2$ + ٣٢ ب ء

∴ $(ب ء)^2$ + ٣٢ ب ء − ٩٠٠ = ٠

∴ (ب ء − ١٨) (ب ء + ٥٠) = ٠

∴ ب ء = ١٨ سم (المطلوب أولاً)

∴ $(أ ء)^2$ = ب ء × ء حـ = ١٨ × ٣٢ = ٥٧٦

∴ أء = ٢٤ سم (المطلوب ثانيًا)

15

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{٦}{٤,٥} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{بو}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$

∴ Δ أبجـ ~ Δ ءبو (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠بوء)

، ∵ ق(∠بوء) = ق(∠هـوجـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠هـوجـ)

∴ Δ هـوجـ متساوى الساقين (المطلوب ثانياً)

16

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{جـهـ}}{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}}$

، ∵ $\frac{\text{بء}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{هـب}}{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{هـب}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{هـب}}$

∴ Δ ءبأ ~ Δ بهـجـ

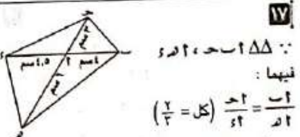
وينتج أن : ق(∠أءب) = ق(∠جـبهـ) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$ (المطلوب أولاً)

، ق(∠أبء) = ق(∠جـهـب) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$ (المطلوب ثانياً)

17



∵ ΔΔ أبجـ ، أهـء فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أء}}$ (كل = $\frac{٢}{٣}$)

، ق(∠بأجـ) = ق(∠هـأء) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أبجـ ~ Δ أهـء

وينتج أن : ق(∠أجـب) = ق(∠أءهـ)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{بهـ}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل بجـءهـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

18

∵ ΔΔ بءهـ ، بأجـ فيهما :

$\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{\text{بهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{بجـ}}$

، ∵ ∠ب مشتركة

∴ Δ بءهـ ~ Δ بأجـ ، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ∴ ءهـ = ٥ سم (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : ق(∠بءهـ) = ق(∠بأجـ)

∴ الشكل أجـءهـ رباعى دائرى (المطلوب ثانياً)

19

∵ $(\text{س ص})^2$ = ص ل × ص ع

، $(\text{س ع})^2$ = ع ل × ع ص

∴ $\frac{(\text{س ص})^2}{(\text{س ع})^2} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ع ل}}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $(\text{ص ع})^2 = (\text{س ص})^2 + (\text{س ع})^2$

$= ١٤٤ + ٢٥٦ = ٤٠٠$

∴ ص ع = ٢٠ سم

، ∵ $(\text{س ص})^2$ = ص ل × ص ع

∴ ١٤٤ = ص ل × ٢٠

∴ ص ل = ٧,٢ سم (المطلوب ثانياً)

، س ل = $\frac{\text{س ص} \times \text{س ع}}{\text{ص ع}} = \frac{١٢ \times ١٦}{٢٠}$ = ٩,٦ سم

(المطلوب ثالثاً)

20

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (د)

21

∵ أبجـء متوازى أضلاع ∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ Δ أهـى ~ Δ جـهـب (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{هـى}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أى}}{\text{جـب}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـو}}$ ∴ Δ أبهـ ~ Δ جـوهـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـو}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{هـى}}{\text{هـب}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{وهـ}}$

∴ $(\text{هـب})^2$ = هـى × وهـ (المطلوب ثانياً)

22

∵ ∠أ ، ∠جـ

تحصران $\frown{\text{بء}}$

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ)

، ∵ ∠هـ مشتركة

∴ Δ أءهـ ~ Δ جـبهـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ءهـ}}{٦} = \frac{١٠}{٧ + \text{ءهـ}}$

∴ ٧ءهـ + $(\text{ءهـ})^2$ = ٦٠

∴ $(\text{ءهـ})^2$ + ٧ءهـ − ٦٠ = ٠

∴ (ءهـ + ١٢) (ءهـ − ٥) = ٠ ∴ ءهـ = ٥ سم

∴ جـهـ = ١٢ سم (المطلوب ثانياً)

23

∵ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{بء}}$

، ∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠أجـب) = ٩٠°

∴ Δ أبء قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{بجـ}} \perp \overline{\text{أء}}$

∴ $(\text{بجـ})^2$ = جـأ × جـء (وهو المطلوب)

24

∵ ءجـ = ٢بء

، أء = ٦$\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $(\text{أء})^2$ = ءب × ءجـ

∴ $(٦\sqrt{٢})^2$ = ءب × ٢ءب ∴ ٧٢ = ٢ $(\text{بء})^2$

∴ $(\text{بء})^2$ = ٣٦ ∴ بء = ٦ سم

∴ جـء = ١٢ سم ∴ $(\text{أب})^2$ = ٦ × ١٨ = ١٠٨

∴ أب = ٦$\sqrt{٣}$ سم ، $(\text{أجـ})^2$ = ١٢ × ١٨ = ٢١٦

∴ أجـ = ٦$\sqrt{٦}$ سم (وهو المطلوب)

25

∵ $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٩٠° (بالتبادل)

∴ ΔΔ أبجـ ، هـأء فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{هـأ}} = \frac{٢}{١} = ٢$ (لأن هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$)

، $\frac{\text{بجـ}}{\text{أء}} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

، ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٩٠°

∴ Δ أبجـ ~ Δ هـأء (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن :

ق(∠بأجـ) = ق(∠أهـء) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ (المطلوب ثانياً)

26

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ ΔΔ أبجـ ، ءبأ فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٣}{٢}$ ، ∠ب مشتركة

∴ Δ أبجـ ~ Δ ءبأ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أء}}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{٨}{\text{أء}}$

∴ أء = ٥$\frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانياً)

ومن التشابه ينتج أن : ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ حـ)

∴ $\overline{اب}$ مماسة للدائرة المارة برءوس △ ا ء حـ

(المطلوب ثالثًا)

٢٧

∵ $\frac{ك ى}{ل هـ} = \frac{٤٫٥}{٩} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ى هـ}{ل م} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{هـ ك}{هـ م} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∴ △ ك ى هـ ~ △ هـ ل م

∴ ق (∠ ى ك هـ) = ق (∠ ل هـ م) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{ى ك} // \overline{ل هـ}$

، ق (∠ ى هـ ك) = ق (∠ ل م هـ) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{هـ ى} // \overline{ل م}$

، ∵ $\overline{ل هـ} // \overline{ى ك}$ ∴ △ ن ك ى ~ △ ن هـ ل

∴ $\frac{ن ك}{ن هـ} = \frac{ك ى}{هـ ل} = \frac{٤٫٥}{٩}$

∴ $\frac{ن ك}{ن ك + ٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ن ك = ن ك + ٤

∴ ن ك = ٤ سم (وهو المطلوب)

٢٨

∵ △△ س ص ع ، ل م ن متساويان فى قياسات زواياهما المتناظرة

∴ △ س ص ع ~ △ ل م ن

∴ $\frac{س ص}{ل م} = \frac{ص ع}{م ن} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

فى △△ س ص ء ، ل م هـ :

∵ ق (∠ ص) = ق (∠ م) (معطى)

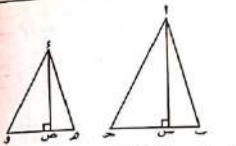
، ق (∠ س ء ص) = ق (∠ ل هـ م) = ٩٠°

∴ △ س ص ء ~ △ ل م هـ

∴ $\frac{س ء}{ل هـ} = \frac{س ص}{ل م}$ ∴ $\frac{٧}{ل هـ} = \frac{٢}{٣}$

∴ ل هـ = $١٠\frac{١}{٢}$ سم (وهو المطلوب)

٢٩



∵ △ ا ب حـ ~ △ ء هـ و

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) ، ق (∠ حـ) = ق (∠ و)

∴ فى △△ ا ب س ، ء هـ ص :

∵ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ)

، ق (∠ ب س ا) = ق (∠ هـ ص ء) = ٩٠°

∴ △ ا ب س ~ △ ء هـ ص

∴ $\frac{ا ب}{ء هـ} = \frac{ب س}{هـ ص} = \frac{ا س}{ء ص}$ (١)

، فى △△ ا س حـ ، ء ص و :

∵ ق (∠ حـ) = ق (∠ و)

، ق (∠ ا س حـ) = ق (∠ ء ص و) = ٩٠°

∴ △ ا س حـ ~ △ ء ص و

∴ $\frac{ا س}{ء ص} = \frac{س حـ}{ص و} = \frac{ا حـ}{ء و}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ب س}{هـ ص} = \frac{س حـ}{ص و}$

∴ ب س × ص و = س حـ × ص هـ (وهو المطلوب)

٣٠

∵ $(ا حـ)^٢ = ٢٢٥$

، $(ا ب)^٢ + (ب حـ)^٢ = ٢٢٥$

∴ ∠ ب قائمة

∴ $\overline{ء هـ} // \overline{ا ب}$ ∴ △ حـ هـ ء ~ △ حـ ا ب

∴ $\frac{حـ ء}{حـ ب} = \frac{هـ ء}{ا ب}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{هـ ء}{٩}$

∴ هـ ء = $٦\frac{٣}{٤}$ سم ، ب ء = ١٢ × $\frac{١}{٤}$ = ٣ سم

∴ الشكل ا ب ء هـ شبه منحرف مساحته

= $\frac{ا ب + ء هـ}{٢} \times ب ء = \frac{٩ + ٦\frac{٣}{٤}}{٢} \times ٣$

= $٢٣\frac{٥}{٨}$ سم^٢ (وهو المطلوب)

٣١

∵ △△ ء ب ا ، ا ب حـ فيهما :

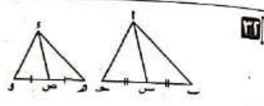
$\frac{ب ء}{ا ب} = \frac{ا ب}{ب حـ}$ ، ∠ ب مشتركة

∴ △ ء ب ا ~ △ ا ب حـ (المطلوب أولًا)

وينتج أن : ق (∠ ا ء ب) = ق (∠ حـ ا ب) = ٩٠°

∴ $\overline{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$ (المطلوب ثانيًا)

٣٢



∵ △ ا ب حـ ~ △ ء هـ و

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) (١)

، $\frac{ا ب}{ء هـ} = \frac{ب حـ}{هـ و} = \frac{٢ ب س}{٢ هـ ص} = \frac{ب س}{هـ ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

△ ا ب س ~ △ ء هـ ص (وهو المطلوب)

٣٣

△△ ا ب هـ ، ء ب حـ فيهما :

∵ $\frac{ا ب}{ا هـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$

∴ $\frac{ا ب}{ب ء} = \frac{ا هـ}{ء حـ}$

، ق (∠ ب ا هـ) = ق (∠ ب ء حـ)

(محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب حـ}$)

∴ △ ا ب هـ ~ △ ء ب حـ (المطلوب أولًا)

∴ ق (∠ ا ب هـ) = ق (∠ ء ب حـ)

∴ $\overrightarrow{ب ء}$ ينصف ∠ ا ب حـ (المطلوب ثانيًا)

٣٤

∵ ∠ حـ تتمم ∠ ء ا حـ ، ∠ هـ ا ء تتمم ∠ ء ا حـ

∴ ق (∠ حـ) = ق (∠ هـ ا ء)

، ق (∠ ء هـ ا) = ق (∠ ء و حـ) = ٩٠°

∴ △ ا هـ ء ~ △ حـ و ء (المطلوب أولًا)

∵ $(ء هـ)^٢$ = ا هـ × هـ ب ∴ ء هـ = $\sqrt{ا هـ \times هـ ب}$

، $(ء و)^٢$ = ا و × و حـ

∴ ء و = $\sqrt{ا و \times و حـ}$

∴ مساحة المستطيل ا هـ ء و = ء هـ × ء و

= $\sqrt{ا هـ \times هـ ب \times ا و \times و حـ}$ (المطلوب ثانيًا)

٣٥

∵ الشكل ا ب حـ ء مستطيل

∴ ق (∠ ا ء حـ)

= ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠°

∴ △ ا ء حـ فيه :

ق (∠ ا ء حـ) = ٩٠° ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{ا حـ}$

∴ △ ا ء حـ ~ △ ا هـ ء ∴ $\frac{ا ء}{ا هـ} = \frac{ا حـ}{ا ء}$

∴ $(ا ء)^٢$ = ا هـ × ا حـ ∴ ا ء = $\sqrt{ا هـ \times ا حـ}$

، △ ء حـ و فيه : ق (∠ ء حـ و) = ٩٠° ، $\overline{حـ هـ} \perp \overline{ء و}$

∴ △ ء حـ و ~ △ ء هـ حـ ∴ $\frac{ء حـ}{ء هـ} = \frac{ء و}{ء حـ}$

∴ $(ء حـ)^٢$ = ء هـ × ء و ∴ ء حـ = $\sqrt{ء هـ \times ء و}$

∴ مساحة سطح المستطيل ا ب حـ ء = ا ء × ء حـ

= $\sqrt{ا هـ \times ا حـ} \times \sqrt{ء هـ \times ء و}$

= $\sqrt{ا هـ \times ا حـ \times ء هـ \times ء و}$ (وهو المطلوب)

٣٦

∵ $\overline{ا ء} // \overline{ب حـ}$

∴ △ م ا ء ~ △ م حـ ب

∴ $\frac{م ا}{م حـ} = \frac{م ء}{م ب}$

∴ م أ . م ب = م حـ . م ء (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : أ م / م حـ = أ ء / حـ ب = ٩ / ١٢ = ٣ / ٤

∴ م أ = ٣ ك ، م حـ = ٤ ك

، ∵ أ حـ = م أ + م حـ ، أ حـ = ١٤ سم

∴ ٣ ك + ٤ ك = ١٤ ∴ ٧ ك = ١٤

∴ ك = ٢

∴ م أ = ٢ × ٣ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

٣٧

∵ ΔΔ أ ب حـ ، هـ س ص

فيهما :

ق (∠ ب) = ق (∠ هـ س ص) (بالتناظر)

، ق (∠ حـ) = ق (∠ هـ ص س) (بالتناظر)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ هـ س ص (المطلوب أولاً)

∴ أ ب / هـ س = ب حـ / س ص (١)

، ∵ $\overline{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ Δ ء أ ب ~ Δ ء هـ س

∴ ء أ / ء هـ = أ ب / هـ س (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ء أ / ء هـ = ب حـ / س ص

∴ س ص × أ ء = ب حـ × ء هـ (المطلوب ثانيًا)

٣٨

العمل : نرسم $\overline{\text{م ء}}$

البرهان :

∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ مماسة للدائرة

∴ ∠ حـ ء م قائمة ∴ (حـ ء)^2 = حـ هـ × حـ م (١)

لكن (حـ ء)^2 = (حـ م)^2 − (م ء)^2 = (حـ م)^2 − (م ب)^2

= (حـ م − م ب) (حـ م + م ب) = حـ ب (حـ م + م أ)

= حـ ب × حـ أ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ (حـ ء)^2 = حـ هـ × حـ م = حـ ب × حـ أ (وهو المطلوب)

٣٩

العمل : نرسم $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

البرهان :

∵ أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ب هـ = ١/٢ ب حـ

، ∵ (أ ب)^2 = ب هـ × ب ء

∴ (أ ب)^2 = ١/٢ ب حـ × ب ء

∴ ٢ (أ ب)^2 = ب ء × ب حـ (وهو المطلوب)

٤٠

∵ أ ب × هـ حـ = ء هـ × ب ء

∴ ب ء / هـ حـ = أ ب / ء هـ

، ∵ حـ ء × ب ء = ء أ × هـ حـ

∴ ب ء / هـ حـ = ء أ / حـ ء ∴ ب ء / هـ حـ = أ ب / ء هـ = ء أ / حـ ء

∴ Δ أ ء ب ~ Δ ء حـ هـ

وينتج أن : ق (∠ حـ ء هـ) = ق (∠ أ) = ٩٠°

∴ في Δ ب حـ ء : (ب حـ)^2 = (ب ء)^2 + (حـ ء)^2

ولكن (ب ء)^2 = (أ ب)^2 + (أ ء)^2

∴ (ب حـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ ء)^2 + (حـ ء)^2

(وهو المطلوب)

٤١

∵ ΔΔ ب س أ ، حـ ء أ فيهما : ب س / حـ ء = ب أ / حـ أ

، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) (محيطيتان تحصران $\overset\frown{\text{أ ء}}$)

∴ Δ ب س أ ~ Δ حـ ء أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق (∠ أ س ب) = ق (∠ أ ء حـ)

∴ ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ حـ}}$ قطر في الدائرة. (المطلوب ثانيًا)

٤٢

∵ أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ ب حـ)

= ق (∠ أ حـ ب)

∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ هـ) (١)

، ∵ (أ ب)^2 = ء ب × حـ هـ

∴ ء ب / أ ب = أ ب / حـ هـ ∴ ء ب / أ حـ = أ ب / حـ هـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ Δ أ ب ء ~ Δ هـ حـ أ (وهو المطلوب)

٤٣

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (جـ)

(٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)

(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (ب)

(١٦) (جـ) (١٧) (د) (١٨) (جـ)

إرشادات لحل رقم **٤٣**

(١) ∵ (س − ص) / (س + ص) = ٢ / ٧

∴ ٧ س − ٧ ص = ٢ س + ٢ ص

∴ ٥ س = ٩ ص ∴ ص / س = ٥ / ٩

، ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ أ هـ / أ حـ = ء هـ / ب حـ

∴ أ هـ / (أ هـ + ٨) = ص / س = ٥ / ٩

∴ ٩ أ هـ = ٥ أ هـ + ٤٠

∴ ٤ أ هـ = ٤٠ ∴ أ هـ = ١٠ سم

(٢) ∵ م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

∴ أ م / أ ء = ٢ / ٣

، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب حـ

∴ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ∵ $\overline{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ هـ ء = ١/٢ أ حـ = ٩ سم

، في Δ أ هـ ء : ∵ $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$

∴ Δ أ و م ~ Δ أ هـ ء

∴ و م / هـ ء = أ م / أ ء ∴ و م / ٩ = ٢ / ٣

∴ و م = ٦ سم

(٣) في ΔΔ أ ب حـ ، ء ب أ

∵ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ء) ، ∠ ب مشتركة

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

∴ أ ب / ء ب = ب حـ / ب أ = أ حـ / ء أ

∴ ٦ / (٥ + ب حـ) = ب حـ / ٦

∴ ٣٦ = ٥ ب حـ + (ب حـ)^2

∴ (ب حـ)^2 + ٥ ب حـ − ٣٦ = ٠

∴ (ب حـ − ٤) (ب حـ + ٩) = ٠

∴ ب حـ = ٤ سم

(٤) في ΔΔ أ حـ ء ، أ ب حـ :

ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ب) ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ أ ب حـ

∴ أ حـ / أ ب = حـ ء / ب حـ = أ ء / أ حـ

∴ س / (ص + ع) = ص / س

∴ س^2 = ص^2 + ص ع

∴ س^2 − ص^2 = ص ع = ١٦

(٥) في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{س ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ أ هـ / أ حـ = ء هـ / ب حـ ∴ ٢ / ١٠ = ء هـ / ١٥

∴ ء هـ = ٣ سم

في Δ هـ س حـ :

∵ ق (∠ هـ س حـ) = ق (∠ س حـ ب) (بالتبادل)

، ∵ $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ ق (∠ هـ س حـ) = ق (∠ هـ حـ س)

∴ س هـ = هـ حـ = ٨ سم

∴ س ء = ٨ − ٣ = ٥ سم

(٦) في Δ أ ء هـ : ∵ أ ء = أ هـ

∴ ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ أ هـ ء)

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ هـ حـ)

(مكملتين للزاويتين ∠ أ ء هـ ، ∠ أ هـ ء)



في ∆∆ ب ء أ ، أ هـ جـ

∵ ق(∠ب) = ق(∠هـ أ جـ)

، ق(∠ء أ ب) = ق(∠أ هـ جـ)

∴ ∆ ب ء أ ~ ∆ أ هـ جـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{هـ جـ}}$ ، ∵ أ ء = أ هـ

∴ $\frac{٩}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{٤}$ ∴ $(\text{أ ء})^{٢} = ٣٦$

∴ أ ء = ٦ سم

(٧) ∵ ∆ ب ء هـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب هـ ء)

= ق(∠ء ب هـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب هـ جـ) = ١٢٠°

، ∵ ق(∠ء ب هـ) = ٦٠°

∴ ق(∠أ ب ء) + ق(∠جـ ب هـ) = ٦٠°

، ∵ ق(∠ب أ ء) + ق(∠أ ب ء)

= ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ ب هـ)

في ∆∆ ء أ ب ، هـ ب جـ :

∵ ق(∠أ ء ب) = ق(∠ب هـ جـ) = ١٢٠°

، ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ ب هـ)

∴ ∆ ء أ ب ~ ∆ هـ ب جـ

∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\frac{٩}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{٤}$

∴ $\text{س}^{٢} = ٣٦$ ∴ س = ٦ سم

(٨) ∵ ∠هـ ء و خارجة عن المثلث أ ء جـ

∴ ق(∠هـ ء و) = ق(∠٣) + ق(∠جـ أ ء)

، ∵ ق(∠٣) = ق(∠١)

∴ ق(∠هـ ء و) = ق(∠١) + ق(∠جـ أ ء)

= ق(∠جـ أ ب)

بالمثل يمكن إثبات أن ق(∠ء و هـ) = ق(∠أ ب جـ)

∴ ∆ ء هـ و ~ ∆ أ جـ ب

∴ ء هـ : هـ و : و ء = أ جـ : جـ ب : ب أ

= ١٢ : ١١ : ٧

(٩) في ∆ أ ء جـ : ∵ أ ء = أ جـ

∴ ق(∠أ ء جـ) = ق(∠أ جـ ء)

، ∵ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠أ ء جـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠أ جـ ء)

في ∆∆ ب ء هـ ، ب جـ أ :

ق(∠أ ب جـ) = ق(∠هـ ب ء)

، ق(∠ب ء هـ) = ق(∠أ جـ ب)

∴ ∆ ب ء هـ ~ ∆ ب جـ أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}}$

∴ $\frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{\text{أ جـ}}$ ∴ جـ أ = ٥ سم

∴ محيط ∆ أ ء جـ = ٥ + ٥ + ٦ = ١٦ سم

(١٠) في ∆ ء أ هـ : ∵ $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{أ هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء س}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء س}}{\text{ء س} + ٤} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ء س = ٢ ء س + ٨

∴ ء س = ٨ سم

في ∆ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\frac{٩}{١٢} = \frac{١٢}{\text{أ ب}}$

∴ أ ب = ١٦ سم

∴ ء ب = ١٦ − ١٢ = ٤ سم

(١١) في ∆∆ أ ب جـ ، هـ ء جـ

∵ ق(∠أ جـ ب) + ق(∠هـ جـ ء) = ٩٠°

في ∆ أ ب جـ : ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ جـ ب) + ق(∠جـ أ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠هـ جـ ء)

∴ ∆ أ ب جـ ~ ∆ جـ ء هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$

∴ $\frac{٢}{٦} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ ص = ٢ س

∵ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٥\sqrt{٥})^{٢}$

∴ $\text{س}^{٢} + (٢\,\text{س})^{٢} = ١٢٥$

∴ $٥\,\text{س}^{٢} = ١٢٥$ ∴ $\text{س}^{٢} = ٢٥$

∴ س = ٥ ∴ ص = ١٠

∴ س + ص = ٥ + ١٠ = ١٥ سم

(١٢) في الشكل الرباعي أ س و ع :

∵ ق(∠أ س و) + ق(∠أ ع و) = ١٨٠°

∴ أ س و ع شكل رباعي دائرى

∴ ق(∠ء و هـ) = ق(∠أ)

بالمثل ق(∠ء و هـ) = ق(∠ب)

∴ ∆ أ ب جـ ~ ∆ و ء هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{و ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{و هـ}}$

∴ $\frac{١٢}{٤} = \frac{٩}{\text{و هـ}}$ ∴ و هـ = ٣ سم

(١٣) في ∆∆ أ ء هـ ، جـ ب ء :

∵ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ء ب جـ) (بالتبادل)

ق(∠أ هـ ء) = ق(∠ب ء جـ) (بالتبادل)

∴ ∆ أ ء هـ ~ ∆ جـ ب ء

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ ء}}$

، ∵ ب هـ = ٢ هـ ء ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ء}} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{١}{٣} = \frac{\text{أ هـ}}{٦}$ ∴ أ هـ = ٢ سم

(١٤) في ∆ أ ب جـ : ∵ ق(∠أ) = ٩٠°

∴ ∠ب تتمم ∠جـ

في ∆ ص و جـ : ∵ ق(∠و) = ٩٠°

∴ ∠جـ تتمم ∠و ص جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠و ص جـ)

في ∆∆ ب هـ ء ، ص و جـ

∵ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠ص و جـ) = ٩٠°

، ق(∠ب) = ق(∠و ص جـ)

∴ ∆ ب هـ ء ~ ∆ ص و جـ

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ص و}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص جـ}}$

∴ $\frac{٨}{\text{ص و}} = \frac{\text{هـ ء}}{٢}$ ∴ ص و × هـ ء = ١٦

∵ ء هـ و ص مربع ∴ ص و = هـ ء

∴ مساحة المربع ء هـ و ص = $(\text{ص و})^{٢}$ = ١٦ $\text{سم}^{٢}$

(١٥) في ∆ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{أ ب}} // \overline{\text{و هـ}}$

∴ $\frac{\text{جـ و}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{أ ب}}$ (١)

، في ∆ ب جـ ء : ∵ $\overline{\text{و هـ}} // \overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{جـ ء}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{و هـ}}{\text{أ ب}} + \frac{\text{و هـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{جـ ب}} + \frac{\text{ب و}}{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{٣} + \frac{\text{و هـ}}{٦} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{٢} = ١$ ∴ و هـ = ٢ سم

(١٦) في ∆ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}}$ (١)

في ∆ أ ء ب : ∵ $\overline{\text{و هـ}} // \overline{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{ء ب}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}} + \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}} + \frac{\text{و هـ}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{١٤} + \frac{\text{و هـ}}{٦}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{٦} = ١ - \frac{٣}{٧} = \frac{٤}{٧}$

∴ و هـ = $\frac{٢٤}{٧}$ سم

(١٧) ∵ ∠أ هـ جـ تكمل ∠ب هـ جـ

، ∠أ جـ ب تكمل ∠أ جـ ء

، ∵ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠أ جـ ء)

∴ ق(∠أ هـ جـ) = ق(∠أ جـ ب)



في ΔΔ أهـجـ ، أجـب

∵ ق(∠أهـجـ) = ق(∠أجـب)

، ∠أ مشتركة

∴ Δأهـجـ ~ Δأجـب

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$

∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{٦}{\text{جـب}} = \frac{٨}{\text{أب}}$

∴ جـب = ١٢ سم ، أب = ١٦ سم

∴ بهـ = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

∴ بهـ + بجـ = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

(١٨) ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءجـ}}$

∴ Δأهـب ~ Δجـهـء

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}} = \frac{\text{أب}}{\text{جـء}} = \frac{٤}{٩}$

∴ أهـ = ٤ س ، هـجـ = ٩ س

، ∵ Δأبجـ قائم الزاوية في ب

، $\overline{\text{بهـ}} \perp \overline{\text{أجـ}}$

∴ $(\text{أب})^2$ = أهـ × أجـ

∴ ١٦ = ٤ س × ١٣ س

∴ $\text{س}^2 = \frac{٤}{١٣}$

، $(\text{بجـ})^2$ = جـهـ × جـأ = ٩ س × ١٣ س

= ٩ × ١٣ س^2 = ٩ × ١٣ × $\frac{٤}{١٣}$

= ٣٦

∴ بجـ = ٦ سم

∴ مساحة شبه المنحرف أبجـء = $\frac{٤ + ٩}{٢}$ × ٦

= ٣٩ سم^2

إرشادات تمارين 3

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (د)
(٦) (د) (٧) (أ) (٨) (د) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (جـ)

٢ $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢}$

٣

∵ $\frac{\text{م (المضلع الأصغر)}}{\text{م (المضلع الأكبر)}} = \left(\frac{١٢}{١٦}\right)^2 = \frac{٩}{١٦}$

∴ $\frac{١٣٥}{\text{م (المضلع الأكبر)}} = \frac{٩}{١٦}$

∴ مساحة المضلع الأكبر = ٢٤٠ سم^2 (وهو المطلوب)

٤

∵ $\frac{\text{مساحة المثلث الأول}}{\text{مساحة المثلث الثاني}} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^2$

∴ $\frac{١٦}{\text{مساحة المثلث الثاني}} = \frac{٤}{٢٥}$

∴ مساحة المثلث الثاني = ١٠٠ سم^2 (وهو المطلوب)

٥

∵ $\frac{\text{مساحة الأول}}{\text{مساحة الثاني}} = \frac{١٠٠}{٦٤} = \frac{٢٥}{١٦}$

∴ $\frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}} = \frac{٥}{٤}$ ∴ $\frac{٦٠}{\text{محيط الثاني}} = \frac{٥}{٤}$

∴ محيط الثاني = ٤٨ سم (وهو المطلوب)

٦

∵ $\frac{\text{مساحة المثلث الأول}}{\text{مساحة المثلث الثاني}} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$

وبفرض أن مساحة المثلث الأول = ٩ س

، مساحة المثلث الثاني = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٣٠ ∴ ١٣ س = ١٣٠

∴ س = ١٠

∴ مساحة المثلث الأول = ٩٠ سم^2

، مساحة المثلث الثاني = ٤٠ سم^2 (وهو المطلوب)

٧

∵ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين = ١ : ٣

∴ النسبة بين مساحتي المضلعين = ١ : ٩

وبفرض مساحة الأول = س

∴ مساحة الثاني = ٩ س ∴ ٩ س − س = ٣٢

∴ ٨ س = ٣٢ ∴ س = ٤

∴ مساحة الأول = ٤ سم^2

، مساحة الثاني = ٣٦ سم^2 (وهو المطلوب)

٨

∵ ΔΔ أس ص ، أجـب فيهما :

$\frac{\text{أس}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أص}}{\text{أب}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ، ∠أ مشتركة

∴ Δأس ص ~ Δأجـب

∴ $\frac{\text{مساحة Δأس ص}}{\text{مساحة Δأجـب}} = \left(\frac{\text{أس}}{\text{أجـ}}\right)^2 = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$

(وهو المطلوب)

٩

∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءجـ}}$

∴ ق(∠ب) = ق(∠ءجـهـ) (متناظرتان) (١)

، ∵ $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$

∴ ق(∠بجـأ) = ق(∠هـ) (متناظرتان) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ Δأبجـ ~ Δءجـهـ

∴ $\frac{\text{مساحة Δأبجـ}}{\text{مساحة Δءجـهـ}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءجـ}}\right)^2 = \left(\frac{٣}{٢}\right)^2$

∴ $\frac{\text{مساحة Δأبجـ}}{١٦} = \frac{٩}{٤}$

∴ مساحة Δأبجـ = ٣٦ سم^2 (وهو المطلوب)

١٠

(١) ∵ ΔΔ جـهـأ ، بهـء فيهما

ق(∠جـ) = ق(∠ب) ، ق(∠أهـجـ)

= ق(∠ءهـب) (متقابلتين بالرأس)

∴ $\frac{\text{مساحة Δجـهـأ}}{\text{مساحة Δبهـء}} = \left(\frac{\text{جـهـ}}{\text{بهـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{٥ك}}{\text{٦ك}}\right)^2$

∴ $\frac{٩٠٠}{\text{مساحة Δءهـب}} = \frac{٢٥}{٣٦}$

∴ مساحة Δءهـب = ١٢٩٦ سم^2

(٢) ∵ Δأبجـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{بجـ}}$

∴ Δءأجـ ~ Δأبجـ

، $(\text{بجـ})^2 = ١٦\,\text{ك}^2 + ٩\,\text{ك}^2 = ٢٥\,\text{ك}^2$

∴ $\frac{\text{مساحة Δءأجـ}}{\text{مساحة Δأبجـ}} = \left(\frac{\text{أجـ}}{\text{بجـ}}\right)^2$

∴ $\frac{١٨٠}{\text{مساحة Δأبجـ}} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ مساحة Δأبجـ = ٥٠٠ سم^2

١١

∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ Δأءهـ

~ Δأبجـ

∴ $\frac{\text{مساحة Δأءهـ}}{\text{مساحة Δأبجـ}} = \left(\frac{\text{أء}}{\text{أب}}\right)^2 = \left(\frac{٢}{٣}\right)^2$

∴ $\frac{٦٠}{\text{مساحة Δأبجـ}} = \frac{٤}{٩}$

∴ مساحة Δأبجـ = ١٣٥ سم^2

∴ للداخل مساحة شبه المنحرف ءبجـهـ

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم^2 (وهو المطلوب)

١٢

∵ ΔΔ أءهـ ، أجـب فيهما :

$\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، ∠أ مشتركة

∴ Δأءهـ ~ Δأجـب

∴ $\frac{\text{مساحة Δأءهـ}}{\text{مساحة Δأجـب}} = \left(\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}}\right)^2 = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$

نفرض أن مساحة Δأءهـ = س

∴ مساحة Δأجـب = ٤ س

∴ مساحة الشكل ءبجـهـ = ٤ س − س = ٣ س

∴ $\frac{\text{مساحة Δأءهـ}}{\text{مساحة الشكل ءبجـهـ}} = \frac{\text{س}}{\text{٣ س}} = \frac{١}{٣}$ (وهو المطلوب)



١٣

∵ المضلعان متشابهان ∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أَ بَ حَ

وينتج أن : ق (د ١) = ق (د ٢)

، Δ أ ب ء ~ Δ أَ بَ ءَ

وينتج أن : ق (د ٣) = ق (د ٤)

∴ Δ أ ب س ~ Δ أَ بَ ص

وينتج أن : $\frac{\text{ب س}}{\text{بَ ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{أَ بَ})^2} = \frac{(\text{ب س})^2}{(\text{بَ ص})^2}$ (وهو المطلوب)

١٤

∵ ΔΔ أ ء حـ ، ب ء أ فيهما :

د ء مشتركة ، ق (د ء أ حـ) المماسية

= ق (د ب) المحيطية المشتركة معها فى القوس أ حـ

∴ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء أ

∴ $\frac{\text{مساحة }\Delta\text{ أ ء حـ}}{\text{مساحة }\Delta\text{ ب ء أ}} = \left(\frac{\text{أ حـ}}{\text{ب أ}}\right)^2 = \frac{4}{9}$

نفرض أن مساحة Δ أ ء حـ = ٤ س

∴ مساحة Δ ب ء أ = ٩ س

∴ مساحة Δ أ حـ ب

= مساحة Δ ب ء أ − مساحة Δ أ ء حـ

= ٩ س − ٤ س = ٥ س

∴ $\frac{\text{مساحة }\Delta\text{ أ ء حـ}}{\text{مساحة }\Delta\text{ أ حـ ب}} = \frac{4\text{ س}}{5\text{ س}} = \frac{4}{5}$ (وهو المطلوب)

١٥

∵ ΔΔ أ ب حـ ، ء ب أ فيهما :

د ب مشتركة ، ق (د حـ) = ق (د ء أ ب)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}}$

∴ $(\text{أ ب})^2$ = ء ب × ب حـ = ٦ × ٩

∴ أ ب = $3\sqrt{6}$ سم (المطلوب ثانيًا)

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta\text{ ء ب أ})} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}}\right)^2 = \left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2}$

(المطلوب ثالثًا)

١٦

∵ Δ ب هـ و ~ Δ أ ء و

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{ ب هـ و})}{\text{م}(\Delta\text{ أ ء و})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

، ∵ م (Δ ب هـ و) = ٩ سم^2

∴ م (Δ أ ء و) = ٩ × ٤ = ٣٦ سم^2 (١)

، ∵ Δ ب هـ و ~ Δ حـ هـ ء

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{ ب هـ و})}{\text{م}(\Delta\text{ حـ هـ ء})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{حـ ء}}\right)^2$

$= \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

، ∵ م (Δ ب هـ و) = ٩ سم^2

∴ م (Δ حـ هـ ء) = ٩ × ٩ = ٨١ سم^2

∴ م (المضلع ب و ء حـ)

= م (Δ حـ هـ ء) − م (Δ ب هـ و)

= ٨١ − ٩ = ٧٢ سم^2 (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ١٠٨ سم^2

(وهو المطلوب)

١٧

∵ $\overline{\text{و حـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ قاطع لهما

∴ ق (د و) = ق (د أ ء هـ) (بالتبادل)

، ∵ ق (د حـ) = ق (د أ) (خواص متوازى الأضلاع)

∴ Δ ء حـ و ~ Δ هـ أ ء (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{ ء حـ و})}{\text{م}(\Delta\text{ هـ أ ء})} = \left(\frac{\text{ء حـ}}{\text{أ هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}\right)^2$

$= \frac{25}{9}$ (المطلوب ثانيًا)

١٨

∵ ق (د أ ب حـ)

= ق (د س ب ص)

(بالتقابل بالرأس)

∴ ق (د أ) = ق (د س) ، ق (د حـ) = ق (د ص)

، ق (د ء) = ق (د ع)

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ص}} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ص ع}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{س ع}} = \frac{1}{2}$

∴ متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

~ متوازى الأضلاع س ب ص ع

∴ $\frac{\text{م (متوازى الأضلاع أ ب حـ ء)}}{\text{م (متوازى الأضلاع س ب ص ع)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(وهو المطلوب)

١٩

∵ المضلعين متشابهين

∴ Δ م ء حـ ~ Δ ن ل ع ∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ل ع}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المضلع س ص ع ل)}} = \left(\frac{\text{ء حـ}}{\text{ل ع}}\right)^2 = \left(\frac{\text{م ء}}{\text{ن ل}}\right)^2$

∴ م (المضلع أ ب حـ ء) : م (المضلع س ص ع ل)

= $(\text{م ء})^2 : (\text{ن ل})^2$ (وهو المطلوب)

٢٠

∵ أ ب ء حـ شكل رباعى دائرى

، هـ ∈ $\overline{\text{حـ هـ}}$

∴ ق (د ١) = ق (د ٢)

∴ ΔΔ هـ ب ء ، هـ حـ أ فيهما :

ق (د ١) = ق (د ٢) ، د هـ مشتركة

∴ Δ هـ ب ء ~ Δ هـ حـ أ

∴ $\frac{\text{مساحة }\Delta\text{ هـ ب ء}}{\text{مساحة }\Delta\text{ هـ حـ أ}} = \left(\frac{\text{ب ء}}{\text{أ حـ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(وهو المطلوب)

٢١

العمل : نرسم المماس المشترك للدائرتين عند أ

البرهان :

∵ ق (د ١) = ق (د ٢)

، ق (د ٣) = ق (د ٤)

، ق (د ١) = ق (د ٣)

∴ ق (د ٢) = ق (د ٤)

، ∵ ق (د ب أ ء) = ق (د حـ أ هـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ب ء ~ Δ أ حـ هـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{ أ ب ء})}{\text{م}(\Delta\text{ أ حـ هـ})} = \frac{(\text{ب ء})^2}{(\text{حـ هـ})^2}$ (وهو المطلوب)

٢٢

∵ ΔΔΔ أ ب هـ ، أ ء حـ

، ب ء هـ فيها :

ق (د ب أ هـ) = ق (د ء أ حـ)

= ق (د ء ب هـ)

، ق (د أ هـ ب) = ق (د أ حـ ء) = ق (د ب هـ ء)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء هـ

∴ م (Δ أ ب هـ) : م (Δ أ ء حـ) : م (Δ ب ء هـ)

= $(\text{ب هـ})^2 : (\text{ء حـ})^2 : (\text{ء هـ})^2$ (وهو المطلوب)

٢٣

∵ ∆ أ ب جـ ∼ ∆ س ص ع

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{س ص ع})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^{٢}$

، ولكن $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{س ص ع})} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ب جـ} \times \text{أ ء}}{\frac{١}{٢} \text{ص ع} \times \text{س ل}}$

∴ $\left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب جـ} \times \text{أ ء}}{\text{ص ع} \times \text{س ل}}$ ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}$

∴ ب جـ × س ل = أ ء × ص ع (وهو المطلوب)

٢٤

(١)

بفرض أن ∆ أ ب جـ ∼ ∆ س ص ع

وأن الارتفاع $\overline{\text{أ ء}}$ هو المناظر للارتفاع $\overline{\text{س هـ}}$

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{س ص ع}} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{ص ع})^{٢}}$

∴ $\frac{\frac{١}{٢} \text{ب جـ} \times \text{أ ء}}{\frac{١}{٢} \text{ص ع} \times \text{هـ س}} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{ص ع})^{٢}}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$

∴ النسبة بين الارتفاعين المتناظرين تساوى النسبة بين طولى ضلعين متناظرين.

∴ النسبة بين مساحتى المثلثين المتشابهين تساوى مربع النسبة بين الارتفاعين المتناظرين. (وهو المطلوب)

(٢)

بفرض أن ∆ أ ب جـ ∼ ∆ س ص ع

، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$ متوسطان متناظران فيهما

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ ، ق(∠ ب) = ق(∠ ص)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ب جـ}}{\frac{١}{٢} \text{ص ع}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص هـ}}$

∴ ∆∆ أ ب ء ، س ص هـ فيهما :

ق(∠ ب) = ق(∠ ص) ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص هـ}}$

∴ ∆ أ ب ء ∼ ∆ س ص هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س هـ}}$

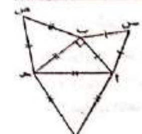
∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فى المثلثين أ ب جـ ، س ص ع تساوى النسبة بين طولى المتوسطين المتناظرين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{س ص ع}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{س هـ}}\right)^{٢}$

أى مربع النسبة بين طولى المتوسطين المتناظرين.

(وهو المطلوب)

٢٥



∵ ∆∆∆ أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع متساويات الأضلاع

∴ ∆ أ ب س ∼ ∆ ب جـ ص ∼ ∆ أ جـ ع

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب س})}{\text{م}(\triangle \text{أ جـ ع})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ (١)

، $\frac{\text{م}(\triangle \text{ب جـ ص})}{\text{م}(\triangle \text{أ جـ ع})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب س}) + \text{م}(\triangle \text{ب جـ ص})}{\text{م}(\triangle \text{أ جـ ع})} = \frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} = \frac{(\text{أ جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

∴ م(∆ أ ب س) + م(∆ ب جـ ص) = م(∆ أ جـ ع)

(هو المطلوب)

٢٦

∵ ∆∆ ب جـ هـ ، أ ب هـ فيهما :

ق(∠ جـ ب هـ) المماسية

= ق(∠ أ) المحيطية

المشتركة معها فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

، ∠ هـ مشتركة

∴ ∆ ب جـ هـ ∼ ∆ أ ب هـ

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ب جـ هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ب هـ})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}\right)^{٢} = \frac{٩}{١٦}$

∴ م(∆ ب جـ هـ) = ٩ س

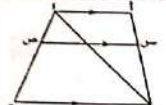
∴ م(∆ أ ب هـ) = ١٦ س

∴ م(∆ أ ب جـ) = م(∆ ب جـ هـ) − م(∆ أ ب هـ)

= ١٦ س − ٩ س = ٧ س

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ب هـ})} = \frac{٧ \text{ س}}{١٦ \text{ س}} = \frac{٧}{١٦}$ (وهو المطلوب)

٢٧



∵ المضلع أ س ص ء

∼ المضلع س ب جـ ص

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ س ص ء})}{\text{م}(\text{المضلع س ب جـ ص})} = \frac{(\text{أ ء})^{٢}}{(\text{س ص})^{٢}}$

لكن من التشابه $\frac{\text{أ ء}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}}$

∴ (س ص)^{٢} = أ ء × ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ س ص ء})}{\text{م}(\text{المضلع س ب جـ ص})} = \frac{(\text{أ ء})^{٢}}{\text{أ ء} \times \text{ب جـ}}$

$= \frac{\text{أ ء}}{\text{ب جـ}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب ء})}{\text{م}(\triangle \text{ء ب جـ})} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب جـ}}$ (لتساوى ارتفاعيهما)(٢)

من (١) ، (٢) : ينتج المطلوب

٢٨

∵ ∆ أ ء ب ∼ ∆ جـ ء أ

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ (١)

، ∵ ∆ أ ب و ∼ ∆ جـ أ و

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{أ و}}{\text{جـ و}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين أ ء ب و ، جـ ء أ و متناسبة.

، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين أ ء ب و ، جـ ء أ و متساوية فى القياس (لماذا ؟)

∴ المضلع أ ء ب و ∼ المضلع جـ ء أ و (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ء ب و})}{\text{م}(\text{المضلع جـ ء أ و})} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}}\right)^{٢} = \frac{(\text{أ ء})^{٢}}{(\text{جـ ء})^{٢}}$

$= \frac{\text{ب ء} \cdot \text{جـ ء}}{(\text{جـ ء})^{٢}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$ (المطلوب ثانياً)

٢٩

∵ ∆ أ ب ء ∼ ∆ ب جـ ء

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$

$= \frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ب م}} = \frac{\text{س ص}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{جـ ن}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ب م}} = \frac{\text{س ص}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{جـ ن}}$

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين ء أ س ص ب ، ء ب م ن جـ متناسبة

، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين ء أ س ص ب ، ء ب م ن جـ متساوية فى القياس (لماذا ؟)

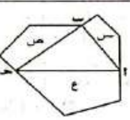
∴ المضلع ء أ س ص ب ∼ المضلع ء ب م ن جـ (المطلوب أولاً)

، ∵ ب جـ = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ٨ سم

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ء ا س ص ب)}}{\text{م (المضلع ء ب م ن حـ)}} = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

(المطلوب ثانيًا)

30



$\because$ المضلع س ~ المضلع ع

$\therefore \frac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}}$

$= \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ا ب})^2}{(\text{ا حـ})^2}$ (1)

، $\because$ المضلع ص ~ المضلع ع

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ب حـ})^2}{(\text{ا حـ})^2}$ (2)

بجمع (1) ، (2) :

$\therefore \frac{\text{م (المضلع س)} + \text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}}$

$= \frac{(\text{ا ب})^2 + (\text{ب حـ})^2}{(\text{ا حـ})^2}$

$\therefore \frac{40 + 85}{125} = \frac{(\text{ا ب})^2 + (\text{ب حـ})^2}{(\text{ا حـ})^2}$

$\therefore (\text{ا حـ})^2 = (\text{ا ب})^2 + (\text{ب حـ})^2$

$\therefore \Delta$ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب (وهو المطلوب)

31



المضلعان ب حـ ء ا ، ب م هـ و فيهما :

(1) قياسات زواياهما المتناظرة متساوية لأن : $\angle$ ب مشتركة

، ق ($\angle$ ا) = ق ($\angle$ ب و هـ) (بالتناظر)

، ق ($\angle$ حـ) = ق ($\angle$ ب م هـ) (بالتناظر)

، ق ($\angle$ ا ء حـ) = ق ($\angle$ و هـ م)

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة لأن :

Δ ب ا ء ~ Δ ب و هـ

$\therefore \frac{\text{ب ا}}{\text{ب و}} = \frac{\text{ا ء}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب هـ}}$

، Δ ب ء حـ ~ Δ ب هـ م

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{هـ م}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب م}}$

$\therefore \frac{\text{ب ا}}{\text{ب و}} = \frac{\text{ا ء}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{هـ م}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب م}}$ (1)

$\therefore$ المضلع ب حـ ء ا ~ المضلع ب م هـ و

$\therefore$ من (1) : $\frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}} \times \frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب حـ}} \times \frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}}$

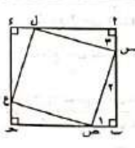
$\therefore \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}}\right)^2 = \frac{\text{ب م} \times \text{ب و}}{\text{ب حـ} \times \text{ب ا}}$

، $\because \frac{\text{م (المضلع ب م هـ و)}}{\text{م (المضلع ب حـ ء ا)}} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}}\right)^2$

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ب م هـ و)}}{\text{م (المضلع ب حـ ء ا)}} = \frac{\text{ب م} \times \text{ب و}}{\text{ب حـ} \times \text{ب ا}}$

(وهو المطلوب)

32



بفرض أن المربع ا ب حـ ء طول ضلعه ك وحدة طول

$\therefore$ ا س = $\frac{1}{4}$ك وحدة طول

، ب س = $\frac{3}{4}$ك وحدة طول

، ب ص = $\frac{1}{4}$ك وحدة طول ، ا ل = $\frac{3}{4}$ك وحدة طول

$\therefore \Delta\Delta$ ا س ل ، ب ص س القائما الزاوية فيهما :

س ب = ا ل ، ب ص = ا س

$\therefore \Delta$ ا س ل $\equiv \Delta$ ب ص س

$\therefore$ س ل = س ص وبالمثل يمكن إثبات أن :

ل ع = ع ص ، ق ($\angle$ 1) = ق ($\angle$ 3)

، $\because$ ق ($\angle$ 1) + ق ($\angle$ 2) = 90°

$\therefore$ ق ($\angle$ 2) + ق ($\angle$ 3) = 90°

$\therefore$ ق ($\angle$ ل س ص) = 90°

$\therefore$ س ص ع ل مربع (المطلوب أولًا)

، طول ضلعه = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ك}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\text{ك}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{10}}{4}$ ك وحدة طول

، $\because$ كل المربعات متشابهة

$\therefore \frac{\text{م (المربع س ص ع ل)}}{\text{م (المربع ا ب حـ ء)}} = \left(\frac{\frac{\sqrt{10}}{4}\text{ك}}{\text{ك}}\right)^2 = \frac{5}{8}$

(المطلوب ثانيًا)

33

$\because$ ق ($\angle$ حـ ب ص) = ق ($\angle$ حـ ء ص)

(محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{حـ ص}}$)

، ق ($\angle$ حـ ء ص) = ق ($\angle$ س) (بالتناظر)

$\therefore$ ق ($\angle$ حـ ب ص) = ق ($\angle$ س)

، $\because$ ق ($\angle$ ب ء س) = ق ($\angle$ ب حـ ص) خارجة عن الرباعى الدائرى ب حـ ص ء

$\therefore \Delta$ ء ب س ~ Δ حـ ص ب

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ء ب س})}{\text{م} (\Delta \text{ حـ ص ب})} = \frac{(\text{ب س})^2}{(\text{ص ب})^2}$ (وهو المطلوب)

34

(1) (ب)	(2) (جـ)	(3) (جـ)	(4) (جـ)
(5) (ب)	(6) (جـ)	(7) (جـ)	(8) (جـ)
(9) (ا)	(10) (د)	(11) (ب)	(12) (د)

إرشادات لحل رقم **34**

(1) $\because \overline{\text{و ص}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$ $\therefore \Delta$ ا و ص ~ Δ ا حـ ء

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا و ص})}{\text{م} (\Delta \text{ ا حـ ء})} = \left(\frac{\text{ا و}}{\text{ا حـ}}\right)^2$

$\therefore \left(\frac{\text{ا و}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{5}{5 + 40} = \frac{1}{9}$

، $\because \overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{هـ و}}$

$\therefore \Delta$ ا هـ و ~ Δ ا ب حـ

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ و})}{\text{م} (\Delta \text{ ا ب حـ})} = \left(\frac{\text{ا و}}{\text{ا حـ}}\right)^2$

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ و})}{\text{م} (\Delta \text{ ا ب حـ})} = \frac{1}{9}$

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ و})}{\text{م} (\Delta \text{ ا ب حـ}) - \text{م} (\Delta \text{ ا هـ و})} = \frac{1}{9 - 1} = \frac{1}{8}$

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ و})}{32} = \frac{1}{8}$

$\therefore$ م (Δ ا هـ و) = 4 سم^2

(2) $\because \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \Delta$ ا س ص ~ Δ ا ب حـ

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا س ص})}{\text{م} (\Delta \text{ ا ب حـ})} = \left(\frac{\text{ا ص}}{\text{ا حـ}}\right)^2$

$\therefore \left(\frac{\text{ا ص}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{40}{50 + 40} = \frac{4}{9}$

، $\because \overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$

$\therefore \frac{\text{ا ص}}{\text{ا حـ}} = \frac{\text{ا ع}}{\text{ا ء}}$ $\therefore \left(\frac{\text{ا ع}}{\text{ا ء}}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\therefore \frac{\text{ا ع}}{\text{ا ء}} = \frac{2}{3}$ $\therefore \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ا}} = \frac{1}{3}$

، $\because \overline{\text{ع م}} \parallel \overline{\text{ا هـ}}$

$\therefore \Delta$ ء ع م ~ Δ ء ا هـ

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ء ع م})}{\text{م} (\Delta \text{ ء ا هـ})} = \left(\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ا}}\right)^2$

$\frac{13}{13 + \text{م (الشكل ا هـ م ع)}} = \frac{1}{9}$

$\therefore$ 13 + م (الشكل ا هـ م ع) = 117

$\therefore$ م (الشكل ا هـ م ع) = 117 − 13 = 104 سم^2

(3) فى Δ ا هـ ء ، Δ ب حـ ا

$\because$ ق ($\angle$ ا هـ ء) = ق ($\angle$ ا حـ ب) = 90°

، ق ($\angle$ ء ا هـ) = ق ($\angle$ حـ ب ا)

$\therefore \Delta$ ا هـ ء ~ Δ ب حـ ا

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ ء})}{\text{م} (\Delta \text{ ب حـ ا})} = \left(\frac{\text{ا ء}}{\text{ب ا}}\right)^2$

$\therefore \frac{\text{م} (\Delta \text{ ا هـ ء})}{\text{م} (\Delta \text{ ب حـ ا})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore \frac{6}{\text{م} (\Delta \text{ ب حـ ا})} = \frac{1}{9}$



∴ م(Δ ا جـ ب) = ٥٤ سم²

∴ مساحة الجزء المظلل = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم²

(٤) في Δ ا س ص : ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$

∴ Δ ا ء هـ ~ Δ ا س ص

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا س ص})} = \left(\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ص}}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٨}\right)^{٢} = \frac{١}{١٦}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ}) + \text{م}(\text{الشكل ء س ص هـ})} = \frac{١}{١٦}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ}) + ٣٠} = \frac{١}{١٦}$

∴ ١٦ م(Δ ا ء هـ) = م(Δ ا ء هـ) + ٣٠

∴ ١٥ م(Δ ا ء هـ) = ٣٠

∴ م(Δ ا ء هـ) = ٢ سم²

في Δ ا ب جـ : ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ا س ص ~ Δ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا س ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ص}}{\text{ا جـ}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{٢ + ٣٠}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{٨}{١٠}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$

∴ م(Δ ا ب جـ) = $\frac{٢٥ \times ٣٢}{١٦}$ = ٥٠ سم²

∴ مساحة الشكل س ب جـ ص = ٥٠ − ٣٢

= ١٨ سم²

(٥) العمل :

نرسم $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ليقطع $\overline{\text{ا ب}}$ عند هـ

∵ م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ ا ب جـ

∴ $\overline{\text{جـ هـ}}$ متوسط

∴ م(Δ ا هـ جـ) = $\frac{١}{٢}$ م(Δ ا ب جـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ سم²

، ∵ $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ هـ}} = \frac{٢}{٣}$ ، ∵ $\overline{\text{م ء}} \parallel \overline{\text{ا هـ}}$

∴ Δ جـ م ء ~ Δ جـ هـ ا

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{جـ م ء})}{\text{م}(\Delta\ \text{جـ هـ ا})} = \left(\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ هـ}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{جـ م ء})}{١٨} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ م(Δ جـ م ء) = ٨ سم²

∴ مساحة الجزء المظلل = ٣٦ − ٨ = ٢٨ سم²

(٦) في ΔΔ د ء هـ ، ا ب جـ :

∵ ق(∠ د ء هـ) = ق(∠ ا ب جـ) (بالتناظر)

، ق(∠ د هـ ء) = ق(∠ ا جـ ب) (بالتناظر)

∴ Δ د ء هـ ~ Δ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{د ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{٦}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{٣}{٩}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$

∴ م(Δ ا ب جـ) = ٥٤ سم²

∴ مساحة المنطقة المظللة = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم²

(٧) ∵ Δ ا ب جـ ~ Δ ء هـ و

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \left(\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٧) - (\text{س} + ٢)}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١) - \text{س}^{٢}}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{٥} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢\text{س} + ١}$

∴ (س + ٢) (٢ س + ١) = ٥ س²

∴ ٢ س² + ٥ س + ٢ = ٥ س²

∴ ٣ س² − ٥ س − ٢ = ٠

∴ (٣ س + ١) (س − ٢) = ٠

∴ س = − $\frac{١}{٣}$ مرفوض أ، س = ٢

(٨) في Δ ا ب جـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ء}}{\text{ا ب}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$

∴ م(Δ ا ء هـ) = $\frac{٤}{٢٥}$ × م(Δ ا ب جـ)

، ∵ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ا ب}}$

∴ Δ جـ و هـ ~ Δ جـ ب ا

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{جـ و هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{جـ ب ا})} = \left(\frac{\text{و هـ}}{\text{ب ا}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{جـ و هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{جـ ب ا})} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ م(Δ جـ و هـ) = $\frac{٩}{٢٥}$ × م(Δ جـ ب ا)

∴ مساحة (▱ ء ب و هـ) = م(Δ ا ب جـ)

− (م(Δ ا ء هـ) + م(Δ جـ و هـ))

= م(Δ ا ب جـ) − ($\frac{٤}{٢٥}$ × م(Δ ا ب جـ)

+ $\frac{٩}{٢٥}$ × م(Δ ا ب جـ))

= $\frac{١٢}{٢٥}$ × م(Δ ا ب جـ)

∴ $\frac{\text{مساحة }(\text{▱ ء ب و هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب جـ})} = \frac{١٢}{٢٥}$

(٩) مساحة المربع ا ب جـ ء = ٦ × ٦ = ٣٦ سم²

∴ مساحة Δ ء ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ سم²

∵ $\overline{\text{و ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ء و ص ~ Δ ء جـ ب

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ء و ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{ء جـ ب})} = \left(\frac{\text{ء و}}{\text{ء جـ}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ء و ص})}{١٨} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$

∴ م(Δ ء و ص) = ٨ سم²

، ∵ $\overline{\text{س هـ}} \parallel \overline{\text{ص و}}$

∴ Δ ء هـ س ~ Δ ء و ص

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ء هـ س})}{\text{م}(\Delta\ \text{ء و ص})} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ء هـ س})}{٨} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

∴ م(Δ ء هـ س) = ٢ سم²

∴ مساحة (الشكل س ص و هـ) = ٨ − ٢

= ٦ سم²

(١٠) س + ص = $\sqrt{(١٢)^{٢} + ٩^{٢}}$ = ١٥ سم

، ع = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

∴ س + ص + ع = ٢٢,٢ سم

(١١) في ΔΔ ا ب هـ ، هـ ب و

$\overline{\text{ا هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس ب

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا ب هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{هـ ب و})} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ و}}$ ∴ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\overline{\text{ب ا}} \parallel \overline{\text{و ء}}$

∴ Δ ا هـ ب ~ Δ و هـ ء

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{ا هـ ب})}{\text{م}(\Delta\ \text{و هـ ء})} = \left(\frac{\text{ا هـ}}{\text{و هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{٢}{\text{م}(\Delta\ \text{و هـ ء})} = \frac{٤}{٩}$

∴ م(Δ و هـ ء) = ٤,٥ سم²

، مساحة المستطيل = ٢ مساحة Δ ب و ء

= ٢ × (٣ + ٤,٥) = ١٥ سم²

∴ مساحة الجزء المظلل = ١٥ − (٢ + ٣ + ٤,٥)

= ٥ $\frac{١}{٢}$ سم²

(١٢) ∵ معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ هو $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع } م_١)}{\text{م (المضلع } م_٢)} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$

، معامل تشابه المضلع $م_٣$ للمضلع $م_٢$ هو $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع } م_٣)}{\text{م (المضلع } م_٢)} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = \frac{١}{٩}$

∴ م (المضلع $م_١$) : م (المضلع $م_٢$) : م (المضلع $م_٣$)

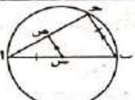
= ٤ : ٩ : ١

∴ $\sqrt{\text{مساحة } (م_١)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_٣)}$

$= \sqrt{٤ ك} + \sqrt{ك} = ٣\sqrt{ك}$

، $\sqrt{\text{مساحة } (م_٢)} = \sqrt{٩ ك} = ٣\sqrt{ك}$

٣٥



∵ $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ س ص

∴ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})}{\text{م }(Δ \text{ أ س ص})} = \frac{(\text{أ ب})^٢}{(\text{أ س})^٢} = \frac{(\text{أ ب})^٢}{(\text{حـ ب})^٢}$

∴ م (المضلع س ب حـ ص) = م (Δ أ ب حـ) − م (Δ أ س ص)

∴ $\frac{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}}{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})}$

$= \frac{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ}) - \text{م }(Δ \text{ أ س ص})}{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})}$

$= ١ - \frac{\text{م }(Δ \text{ أ س ص})}{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})} = ١ - \frac{(\text{حـ ب})^٢}{(\text{أ ب})^٢}$

$= \frac{(\text{أ ب})^٢ - (\text{ب حـ})^٢}{(\text{أ ب})^٢}$

، ∵ ∠ أ حـ ب قائمة (محيطية في نصف دائرة)

∴ $(\text{أ ب})^٢ - (\text{ب حـ})^٢ = (\text{أ حـ})^٢$

∴ $\frac{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}}{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})} = \frac{(\text{أ حـ})^٢}{(\text{أ ب})^٢}$

∴ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})}{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}} = \frac{(\text{أ ب})^٢}{(\text{أ حـ})^٢}$ (وهو المطلوب)

٣٦

العمل :

نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$

البرهان :

∵ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ء هـ})}{\text{م }(Δ \text{ أ حـ هـ})} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{م }(Δ \text{ ب ء هـ})}{\text{م }(Δ \text{ ب حـ هـ})}$

∴ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ء هـ}) + \text{م }(Δ \text{ ب ء هـ})}{\text{م }(Δ \text{ أ حـ هـ}) + \text{م }(Δ \text{ ب حـ هـ})} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}}$

∴ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ب ء})}{\text{م }(Δ \text{ أ ب حـ})} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}}$ (١)

، ∵ ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ أ حـ ب)

(مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

، وبالمثل ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ ب أ حـ)

∴ Δ ء ب أ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م }(Δ \text{ أ ء ب})}{\text{م }(Δ \text{ حـ أ ب})} = \frac{(\text{أ ء})^٢}{(\text{حـ أ})^٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{(\text{أ ء})^٢}{(\text{حـ أ})^٢}$

∴ $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{(\text{أ حـ})^٢}{(\text{أ ء})^٢}$ (وهو المطلوب)

٣٧

∵ أي مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان متشابهين

∴ $\frac{\text{م (المربع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المربع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{أ ب})^٢}{(\text{أَ بَ})^٢}$

بفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ أ ب = نق $\sqrt{٢}$ (لأن قطر المربع أ ب حـ ء قطر في الدائرة)

، أَ بَ = ٢ نق (لأن طول ضلع المربع أَ بَ حَ ءَ يساوي طول قطر الدائرة)

∴ $\frac{\text{م (المربع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المربع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{نق}\sqrt{٢})^٢}{(٢ \text{ نق})^٢} = \frac{١}{٢}$

(وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 4

١

(١) ٦	(٢) ٣	(٣) ٤	(٤) ٨
(٥) ٦	(٦) ٤$\sqrt{٧}$	(٧) ٤,٨	(٨) ٤$\sqrt{٧}$
(٩) ٣	(١٠) ٦	(١١) ٣	(١٢) ٤

٢

(١) ∵ أ هـ × هـ ب = ٦ × ٧ = ٤٢

، حـ هـ × هـ ء = ٥ × ٨,٤ = ٤٢

∴ أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(٢) ، (٣) النقط أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة لأن النقط أ ، ب ، ء تقع على استقامة واحدة.

(٤) ∵ أ هـ × هـ ب = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

، حـ هـ × هـ ء = ١٠ × ١٠ = ١٠٠

∴ أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٥) ∵ أ هـ × ب هـ = ١٢ × ٣ = ٣٦

، حـ هـ × ء هـ = ٩ × ٤ = ٣٦

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٦) ∵ أ هـ × ب هـ = ٦ × ٣,٦ = ٢١,٦

، حـ هـ × ء هـ = ٧,٢ × ٢,٨ = ٢٠,١٦

∴ أ هـ × ب هـ ≠ حـ هـ × ء هـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة.

٣

(١) ، (٤) ، (٦)

٤

∵ $(\text{س أ})^٢$ = س ب × س حـ

∴ $(١٥)^٢$ = ٩ (٩ + ب حـ)

∴ ٢٢٥ = ٩ (٩ + ٢ نق) ∴ ٢٥ = ٩ + ٢ نق

∴ نق = ٨ سم (وهو المطلوب)

٥

نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة في حـ ، ء

∴ م ء = ٦ + ٤ = ١٠ سم

، ∵ م أ × م ب = م حـ × م ء

∴ ٣ × م ب = ٢ × ١٠ ∴ م ب = $٦\frac{٢}{٣}$ سم

∴ أ ب = $٦\frac{٢}{٣} - ٣ = ٣\frac{٢}{٣}$ سم (وهو المطلوب)

٦

بفرض حـ هـ = س سم

∴ ء هـ = (١١,٥ − س) سم

، ∵ أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ ٥ × ٦ = س $\left(\frac{٢٣}{٢} - \text{س}\right)$

∴ ٢ $\text{س}^٢$ − ٢٣ س + ٦٠ = ٠

∴ (٢ س − ١٥) (س − ٤) = ٠

∴ طولا $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$ هما ٧,٥ سم ، ٤ سم

(وهو المطلوب)

٧

∵ $(\text{أ ب})^٢$ = أ حـ × أ ء

∴ $(٥\sqrt{٢})^٢ = \frac{١}{٢}$ أ ء × أ ء ∴ ٥٠ = $\frac{١}{٢}(\text{أ ء})^٢$

∴ أ ء = ١٠ سم (وهو المطلوب)

٨

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ مماسة ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ∴ ق (∠ ء أ ب) = ٩٠°

، ∵ $(\text{أ ء})^٢$ = ء حـ × ء ب = ٤ × ١٦ = ٦٤

∴ $(\text{أ ب})^٢ = (\text{ء ب})^٢ - (\text{أ ء})^٢$

∴ $(\text{أ ب})^٢ = (١٦)^٢ - ٦٤ = ١٩٢ = (٢ \text{ نق})^٢$

∴ $\text{نق}^٢$ للدائرة = $\frac{١}{٤} × ١٩٢ = ٤٨$

∴ مساحة الدائرة م = ٤٨ π $\text{سم}^٢$ (وهو المطلوب)

٩

من الدائرة الكبرى :

(س ص)^٢ = س حـ × س ء (١)

، من الدائرة الصغرى :

(س ص)^٢ = س أ × س ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س حـ × س ء = س أ × س ب

∴ $\frac{\text{س حـ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س أ}}{\text{س ء}}$ (وهو المطلوب)

١٠

∵ ء ن × ن ب = هـ ن × ن و ∴ ء ن × ٦ = ٢ × ٩

∴ ء ن = ٣ سم ∴ أ ب = ٣ سم

∴ (أ حـ)^٢ = أ ب × أ ء = ٢ × ١٢

∴ أ حـ = ٦ سم (المطلوب أولًا)

∵ ΔΔ أ حـ ب ، أ ء حـ فيهما : ∠ أ مشتركة

، ق (∠ أ حـ ب) المماسية = ق (∠ ء) المحيطية

∴ Δ أ حـ ب ~ Δ أ ء حـ

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ حـ ب}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء حـ}} = \left(\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}}\right)^2 = \left(\frac{٦}{١٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$

(المطلوب ثانيًا)

١١

∵ م ب × م أ = م ص × م س (١)

، ∵ م حـ × م ء = م ص × م س (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م ب × م أ = م حـ × م ء

∴ أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة (وهو المطلوب)

١٢

∵ ΔΔ س ل م ، س ع ص فيهما :

$\frac{\text{س ل}}{\text{س ع}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{س م}}{\text{س ص}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

، ∠ س مشتركة

∴ Δ س ل م ~ Δ س ع ص (المطلوب أولًا)

، $\frac{\text{س ل}}{\text{س ع}} = \frac{\text{س م}}{\text{س ص}}$

∴ س ل × س ص = س م × س ع

∴ الشكل ل ص ع م رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

١٣

∵ أ هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ

، ب هـ = ٦ سم

∴ أ هـ = ٢,٥ سم

، ∵ ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ حـ هـ ، حـ هـ = ٥ سم

∴ ء هـ = ٣ سم

∵ أ هـ × ب هـ = ٢,٥ × ٦ = ١٥

، ء هـ × هـ حـ = ٣ × ٥ = ١٥

∴ أ هـ × ب هـ = ء هـ × هـ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

١٤

(١) (ء) (٢) (حـ) (٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (حـ) (٦) (حـ) (٧) (ب) (٨) (ء)

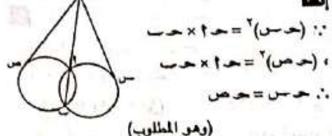
١٥

∵ (ن س)^٢ = ن ب × ن أ ، (ن س)^٢ = ن حـ × ن ء

∴ ن ب × ن أ = ن حـ × ن ء

∴ $\frac{\text{ن ب}}{\text{ن حـ}} = \frac{\text{ن ء}}{\text{ن أ}}$ (وهو المطلوب)

١٦



∵ (حـ س)^٢ = حـ أ × حـ ب

، (حـ ص)^٢ = حـ أ × حـ ب

∴ حـ س = حـ ص

(وهو المطلوب)

١٧

فى الدائرة م :

(أ ب)^٢ = أ و × أ هـ ∴ (أ ب)^٢ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أ ب = ٦ سم (١)

فى الدائرة ن : (أ حـ)^٢ = أ هـ × أ ء = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ أ حـ = ١٢ سم (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ (وهو المطلوب)

١٨

العمل : نرسم $\overline{\text{هـ ء}}$

البرهان : ∵ الشكل

ء حـ هـ و رباعى دائرى

∴ أ هـ × أ حـ = أ و × أ ء

، ∵ الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى

∴ ب و × و هـ = أ و × و ء

وبالقسمة : $\frac{\text{أ هـ} \times \text{أ حـ}}{\text{ب و} \times \text{و هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{و ء}}$ (وهو المطلوب)

١٩

نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة

فى ء ، هـ

∴ م هـ = ١٢ + ٨ = ٢٠ سم

، ∵ م أ × م ب = م ء × م هـ

∴ م أ (م أ + ١١) = ٤ × ٢٠

∴ (م أ)^٢ + ١١ م أ − ٨٠ = ٠

∴ (م أ + ١٦) (م أ − ٥) = ٠

∴ م أ = ٥ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ (م حـ)^٢ = م ء × م هـ = ٤ × ٢٠ = ٨٠

∴ م حـ = $\sqrt{٨٠}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم (المطلوب ثانيًا)

٢٠

∵ (أ حـ)^٢ = حـ ء × ب حـ

∴ $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسة للدائرة

المارة بالنقط أ ، ب ، ء (المطلوب أولًا)

، ∵ ΔΔ أ حـ ء ، ب حـ أ فيهما :

ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ب)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\widehat{\text{أ ء}}$)

، ∠ حـ مشتركة

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ (المطلوب ثانيًا)

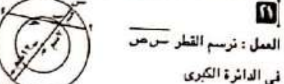
∴ $\frac{\text{م} (\Delta \text{ أ حـ ء})}{\text{م} (\Delta \text{ ب حـ أ})} = \left(\frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ أ}}\right)^2 = \left(\frac{٢}{٣}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ م (Δ أ حـ ء) = ٤ ك ، م (Δ ب حـ أ) = ٩ ك

∴ م (Δ أ ب ء) = ٥ ك

∴ $\frac{\text{م} (\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{م} (\Delta \text{ أ ب حـ})} = \frac{٥ \text{ ك}}{٩ \text{ ك}} = \frac{٥}{٩}$ (المطلوب ثالثًا)

٢١



العمل : نرسم القطر $\overline{\text{س ص}}$

فى الدائرة الكبرى

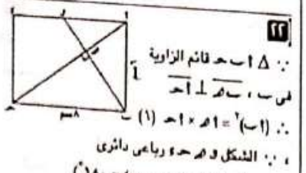
، يقطع الدائرة الصغرى فى ب

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{س ص}}$ = {ب}

∴ أ ب × ب ء = س ب × ب ص

= ٥ × ١٩ = ٩٥ (وهو المطلوب)

٢٢



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية

فى ب ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ (أ ب)^٢ = أ هـ × أ حـ (١)

، ∵ الشكل و هـ حـ ء رباعى دائرى

(لأن ق (∠ ء) + ق (∠ و هـ حـ) = ١٨٠°)

∴ أ و × أ ء = أ هـ × أ حـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ (أب)^{٢} = أو × أء (المطلوب أولًا)

∴ (٦)^{٢} = أو × ٨

∴ أو = ٤,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

٢٣

∵ مجـ ⊥ أب

∴ حـ منتصف أب

∴ أحـ = حـب = ٤ سم

نرسم ءهـ قطرًا فى الدائرة

ويفرض أن طول نصف القطر = نق ∴ ءهـ = ٢ نق

∴ هـحـ = ءهـ − ءحـ = (٢ نق − ٢) سم

، ∵ أحـ × حـب = ءحـ × حـهـ

∴ ٤ × ٤ = ٢ (٢ نق − ٢)

∴ نق = ٥ سم (وهو المطلوب)

٢٤

العمل : نرسم سأ ، سب

البرهان : ∵ ∠ أسب قائمة

«محيطية مرسومة فى نصف دائرة»

، سحـ ⊥ أب ∴ (سحـ)^{٢} = أحـ × حـب

لكن أحـ × حـب = ءحـ × حـهـ

∴ (سحـ)^{٢} = ءحـ × حـهـ (وهو المطلوب)

٢٥

العمل : نرسم بهـ ، بو

البرهان : ∵ أب قطر

∴ ∠ هـ قائمة ، ∠ و قائمة

، ∵ ∠ س ن ب قائمة ، ∠ ص ن ب قائمة

∴ كل من الشكلين س ن ب هـ ، ص ن ب و رباعى دائرى

، ∵ س ن ب هـ رباعى دائرى

∴ أس × أهـ = أن × أب (١)

، ∵ ص ن ب و رباعى دائرى

∴ أص × أو = أن × أب (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أس × أهـ = أص × أو (وهو المطلوب)

٢٦

العمل : نرسم مب

البرهان :

∵ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

، بحـ ⊥ مأ

∴ (أب)^{٢} = أء × أم لكن (أب)^{٢} = أس × أص

∴ أس × أص = أء × أم (وهو المطلوب)

٢٧

العمل : نرسم بء

البرهان :

فى Δ أبهـ :

∵ ق (∠ أبهـ) = ٩٠°

، بء ⊥ أهـ ∴ (أب)^{٢} = أء × أهـ

، ∵ (حـء)^{٢} = حـب × حـأ

= أب × ٢ أب = ٢ (أب)^{٢}

∴ (حـء)^{٢} = ٢ أء × أهـ (وهو المطلوب)

٢٨

∵ (أء)^{٢} = ءب × ءحـ

∴ أء × ءهـ = ءب × ءحـ

∴ أبهـحـ رباعى دائرى

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٣)

لكن ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ∴ ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

∴ ΔΔ هـحـء ، هـأحـ فيهما :

ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) ، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ هـحـء ~ Δ هـأحـ (المطلوب أولًا)

وينتج من التشابه أن : $\frac{هـحـ}{هـأ} = \frac{هـء}{هـحـ}$

∴ (هـحـ)^{٢} = هـء × هـأ = هـء × ٢ هـء = ٢ (هـء)^{٢}

(المطلوب ثانيًا)

---

٢٩ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (جـ)

(٩) (جـ) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (ب)

إرشادات لحل رقم **٢٩**

(١) نفرض أن هـء = هـم = س

∴ مء = ٢ س = نق

∴ وم = ٢ س = نق

، ∵ هـأ × هـحـ = هـء × هـو

∴ ٨ × ٣ = س × ٣ س

∴ ٣ س^{٢} = ٢٤ ∴ س^{٢} = ٨

∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$ ∴ مهـ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

(٢) نفرض أن :

محـ = حـب = س

∴ حـهـ × حـء

= حـأ × حـب

∴ (٦ + س) (٦ − س) = (س + ١) (س)

∴ ٣٦ − س^{٢} = س^{٢} + س

∴ ٢ س^{٢} + س − ٣٦ = ٠

∴ (٢ س + ٩) (س − ٤) = ٠

∴ س = − $\frac{٩}{٢}$ (مرفوض) أ ، س = ٤

∴ أحـ = ٤ + ١ = ٥ سم ، حـب = ٤ سم

∴ أب = ٥ + ٤ = ٩ سم

(٣) ∵ حـس قطعة مماسة للدائرة

∴ (حـس)^{٢} = حـب × حـأ

∴ (٨)^{٢} = حـب × (حـب + ٣٠)

∴ (حـب)^{٢} + ٣٠ (حـب) − ٦٤ = ٠

∴ ((حـب) − ٢) ((حـب) + ٣٢) = ٠

∴ حـب = ٢ سم أ ، حـب = −٣٢ (مرفوض)

، ∵ ءص قطعة مماسة للدائرة

∴ (ءص)^{٢} = ءب × ءأ

∴ (٢٠)^{٢} = ءب (ءب + ٣٠)

∴ (ءب)^{٢} + ٣٠ (ءب) − ٤٠٠ = ٠

∴ ((ءب) − ١٠) ((ءب) + ٤٠) = ٠

∴ ءب = ١٠ سم أ ، ءب = −٤٠ (مرفوض)

∴ ءحـ = ١٠ − ٢ = ٨ سم

(٤) ∵ وهـ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

∴ (وهـ)^{٢} = وحـ × وء

∴ (وهـ)^{٢} = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ وهـ = ٦ سم

، ∵ وهـ × وب = وحـ × وأ

∴ ٦ × وب = ٤ × ٣ ∴ وب = ٢ سم

∴ بهـ = ٢ + ٦ = ٨ سم

(٥) ∵ أب ، أء مماسان للدائرة الصغرى عند ب ، ء

∴ أب = أء = س ∴ أحـ = س − ١

، أهـ = س + ٢

، ∵ (أب)^{٢} = أحـ × أهـ

∴ س^{٢} = (س − ١) (س + ٢)

∴ س^{٢} = س^{٢} + س − ٢

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

(٦) ∵ $\overline{\text{حـب}}$ مماس للدائرة

∴ (حـب)^{٢} = حـهـ × حـء

∴ (حـب)^{٢} = ٣ × (٣ + ١٨) = ٦٣

∴ حـب = $\sqrt{٦٣}$ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

، ∵ أب = أء (مماسان للدائرة)

∴ أحـ − أء = أحـ − أب = حـب = ٣$\sqrt{٧}$ سم

(٧) نرسم $\overline{\text{أء}}$

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى نصف الدائرة (م)

∴ $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بهـ}}$

فى Δ أبهـ :

∵ بء = ءهـ = ٦ سم ، $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بهـ}}$

∴ Δ أبهـ متساوى الساقين

∴ أهـ = أب

، ∵ هـحـ × هـأ = هـء × هـب

∴ ٤ × هـأ = ٦ × ١٢   ∴ هـأ = ١٨ سم

∴ أب = ١٨ سم

∴ نق = ١٨ ÷ ٢ = ٩ سم

(٨) فى Δ أبحـ : ق(∠ب) = ٩٠°

∴ (أحـ)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٩)^{٢} = ٢٢٥

∴ أحـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

، ∵ أهـ × أب = أء × أحـ

∴ ٥ × ١٢ = أء × ١٥   ∴ أء = ٤ سم

∴ ءحـ = ١٥ − ٤ = ١١ سم

(٩) ∵ $\frac{\text{سهـ}}{\text{هـص}}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ سهـ = ٢ ك ، هـص = ٣ ك

∵ هـأ × هـب = هـس × هـء

∴ هـأ × هـب = ٢ ك × (٣ ك + ٦)   (١)

، ∵ هـأ × هـب = هـص × هـحـ

∴ هـأ × هـب = ٣ ك (٢ ك + (حـس))   (٢)

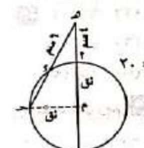
من (١) ، (٢) :

∴ ٢ ك (٣ ك + ٦) = ٣ ك (٢ ك + (حـس))

∴ ٦ ك^{٢} + ١٢ ك = ٦ ك^{٢} + ٣ ك (حـس)

∴ ١٢ ك = ٣ ك (حـس)

∴ حـس = ٤ سم



(١٠) ∵ محيط Δ هـ م حـ = ٢٠ سم

∴ ٤ + ٦ + ٢ نق + ءحـ = ٢٠

∴ ءحـ = ١٠ − ٢ نق (١)

، ∵ هـأ × هـب = هـء × هـحـ

∴ ٤ × (٤ + ٢ نق) = ٦ × (٦ + ءحـ)   (٢)

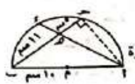
بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ١٦ + ٨ نق = ٣٦ + ٦ (١٠ − ٢ نق)

∴ ١٦ + ٨ نق = ٣٦ + ٦٠ − ١٢ نق

∴ ٢٠ نق = ٨٠   ∴ نق = ٤ سم

∴ محيط Δ هـ م حـ كافى لإيجاد طول نصف قطر الدائرة.



(١١) نرسم $\overline{\text{أحـ}}$

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى نصف الدائرة

∴ ق(∠أحـب) = ٩٠°

فى Δ أحـب : أحـ = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - (١٦)^{٢}}$

∴ أحـ = ١٢ سم

فى Δ أحـهـ : أهـ = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ سم

، ∵ هـحـ × هـب = هـأ × هـء

∴ ٥ × ١١ = ١٣ × هـء   ∴ هـء = $\frac{٥٥}{١٣}$ سم

(١٢) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة

∴ (أب)^{٢} = أحـ × أء

∴ (٨)^{٢} = ٤ × أء

∴ أء = ١٦ سم

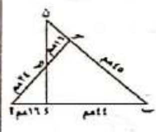
∴ حـء = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

، ∵ $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{حـء}}$ ∴ هـ فى منتصف $\overline{\text{حـء}}$

∴ هـحـ = ٦ سم

∴ نق = بم = ٤ + ٦ = ١٠ سم

٣٠



ΔΔ أءهـ ، أحـب فيهما :

$\frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$ = $\frac{١٦}{٤٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

، $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$ = $\frac{٢٤}{٦٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

، ∠أ مشتركة

∴ Δ أءهـ ~ Δ أحـب

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$ = $\frac{\text{ءهـ}}{\text{حـب}}$ = $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{١٦}{٤٠}$ = $\frac{\text{ءهـ}}{٤٥}$

∴ ءهـ = ١٨ مم   (المطلوب أولًا)

، أء × أب = أهـ × أحـ   ∴ بءهـحـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـهـن)

∴ ΔΔ ءنب ، حـنهـ فيهما :

ق(∠حـهـن) = ق(∠ب) ، ∠ن مشتركة

∴ Δ ءنب ~ Δ حـنهـ

∴ $\frac{\text{ءن}}{\text{حـن}}$ = $\frac{\text{نب}}{\text{نهـ}}$ = $\frac{\text{ءب}}{\text{حـهـ}}$ ∴ $\frac{\text{نب}}{\text{نهـ}}$ = $\frac{٤٤}{١٦}$ = $\frac{١١}{٤}$

∴ $\frac{\text{نحـ} + ٤٥}{\text{نهـ}}$ = $\frac{١١}{٤}$

∴ ١١ نهـ − ٤ نحـ = ١٨٠   (١)

، $\frac{\text{ءن}}{\text{حـن}}$ = $\frac{١١}{٤}$ ∴ $\frac{١٨ + \text{هـن}}{\text{حـن}}$ = $\frac{١١}{٤}$

∴ ١١ حـن − ٤ هـن = ٧٢   (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا :

∴ حـن = ١٤,٤ مم ، نهـ = ٢١,٦ مم

(المطلوب ثانيًا)

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثالثة

١

∵ معامل التشابه = مقياس رسم الوحدة السكنية

∴ معامل التشابه = $\frac{١}{١٥٠}$

∴ أبعاد حجرة الاستقبال هى :

٥,٦ × ١٥٠ = ٨٤٠ سم = ٨,٤ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب أولًا)

، أبعاد حجرة النوم هى :

٢,٦ × ١٥٠ = ٣٩٠ سم = ٣,٩ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب ثانيًا)

، أبعاد حجرة المعيشة هى :

٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

، ٣,٦ × ١٥٠ = ٥٤٠ سم = ٥,٤ متر

∴ مساحة حجرة المعيشة = ٣,٦ × ٥,٤ = ١٩,٤٤ متر^{٢}

(المطلوب ثالثًا)

طول الحمام والمطبخ وحجرة المعيشة

= (٢,٦ + ٢,٦ + ٣,٦) × ١٥٠

= ١٣٢٠ سم = ١٣,٢ متر

وعرض هذا الجزء = ٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

∴ مساحة هذا الجزء = ٣,٦ × ١٣,٢ = ٤٧,٥٢ متر^{٢}

طول حجرة النوم وحجرة الاستقبال

= (٢,٦ + ٥,٦) × ١٥٠ = ١٢٣٠ سم = ١٢,٣ متر

وعرض هذا الجزء = ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر

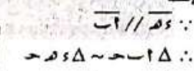
∴ مساحة هذا الجزء = ١٢,٣ × ٥,١ = ٦٢,٧٣ متر^{٢}

∴ مساحة الوحدة السكنية = ٤٧,٥٢ + ٦٢,٧٣

= ١١٠,٢٥ متر^{٢}

(المطلوب رابعًا)

٢



∵ دهـ // أب

∴ Δ أبجـ ~ Δ دهـجـ

∴ $\frac{أب}{دهـ} = \frac{بجـ}{هـجـ}$

∴ $\frac{أب}{١,٨} = \frac{٤,٤}{٢,٤}$

∴ أب = $\frac{٤,٤ \times ١,٨}{٢,٤}$ = ٣,٣ م (وهو المطلوب)

٣

(١) في ΔΔ أبجـ ، دبهـ :

ق(∠أ) = ق(∠د) = ٩٠°

، ق(∠أبجـ)

= ق(∠دبهـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أبجـ ~ Δ دبهـ

∴ $\frac{أب}{دب} = \frac{أجـ}{دهـ}$ ∴ $\frac{س}{٦} = \frac{٤٠}{٨}$

∴ س = ٣٠ مترًا (وهو المطلوب)

(٢) ∵ دهـ // بجـ

∴ Δ أبجـ ~ Δ أدهـ

∴ $\frac{بجـ}{دهـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$

∴ $\frac{٨٠}{س} = \frac{١٠٠}{٤٠}$

∴ س = ٣٢ مترًا (وهو المطلوب)

٤

في ΔΔ أبجـ

، دهـجـ :

∵ ق(∠أجـو)

= ق(∠دجـو)

(قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس)

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠دجـهـ)

، ق(∠ب) = ق(∠هـ) = ٩٠°

∴ Δ أبجـ ~ Δ دهـجـ

∴ $\frac{أب}{دهـ} = \frac{بجـ}{هـجـ}$ ∴ $\frac{أب}{١,٨} = \frac{١٠}{٢}$

∴ أب = $\frac{١٠ \times ١,٨}{٢}$ = ٩ م (وهو المطلوب)

٥

∵ Δ أبجـ قائم الزاوية

في جـ ، جـد ⊥ أب

∴ (جـد)^2 = أد × دب = ٢ × ٨ = ١٦

∴ جـد = ٤ كم

، (بجـ)^2 = بد × بأ = ٨ × ١٠ = ٨٠

∴ بجـ = ٤ $\sqrt{٥}$ كم (وهو المطلوب)

٦

∵ بعدا الصالة الأولى يتناسبان مع بعدى الصالة الثانية

لأن : $\frac{٨}{١٤} = \frac{١٢}{٢١} = \frac{٤}{٧}$

∴ صالتا الألعاب متشابهتان

∴ $\frac{م(\text{صالة الألعاب الأولى})}{م(\text{صالة الألعاب الثانية})} = \left(\frac{٨}{١٤}\right)^2 = \frac{١٦}{٤٩}$

∴ $\frac{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى}}{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية}}$

= $\frac{\text{تكلفة المتر الواحد × مساحة الأولى}}{\text{تكلفة المتر الواحد × مساحة الثانية}}$

∴ $\frac{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى}}{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية}} = \frac{\text{مساحة الأولى}}{\text{مساحة الثانية}}$

∴ $\frac{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى}}{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية}} = \frac{١٦}{٤٩}$

∴ $\frac{٣٢٠٠}{\text{تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية}} = \frac{١٦}{٤٩}$

∴ تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية

= $\frac{٤٩ \times ٣٢٠٠}{١٦}$ = ٩٨٠٠ جنيه (وهو المطلوب)

٧

∵ جـ منتصف أب

، جـد ⊥ أب

∴ دجـ يمر بمركز الدائرة.

∴ أجـ × جـب = دجـ × جـهـ

∴ ٥ × ٥ = ٢,٥ × جـهـ ∴ جـهـ = ١٠ سم

∴ دهـ = ١٠ + ٢,٥ = ١٢,٥ سم

∴ طول نصف قطر القرص = $\frac{١٢,٥}{٢}$ = ٦,٢٥ سم

(وهو المطلوب)

٨

∵ د منتصف أب

∴ جـد ⊥ أب

∴ جـد يمر بمركز الدائرة

ويقطعها في هـ ∴ أد × دب = جـد × دهـ

∴ ٢٧ × ٢٧ = ٩ × دهـ ∴ دهـ = ٨١ م

∴ جـهـ = ٨١ + ٩ = ٩٠ م

∴ طول نصف قطر دائرة القوس = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥ م

(وهو المطلوب)

٩

∵ ١٥ × س = ١٠ × ١٢ ∴ س = ٨

∴ بعد نافورة المياه عن المدخل جـ هو ٨ أمتار

(وهو المطلوب)

١٠

لإيجاد طول السلك أب

كما في الشكل المقابل

نقيس طول الطريق أجـ ، أد

ونعوض في القانون :

(أجـ)^2 = أد × أب ∴ أب = $\frac{(أجـ)^2}{أد}$

(وهو المطلوب)

إرشادات الوحدة الرابعة

إرشادات تمارين 5

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب)

٢

(١) ∵ $\frac{أد}{دب} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أد}{دب} \neq \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ $\overline{دهـ}$ لا توازى $\overline{بجـ}$

(٢) ∵ $\frac{جـأ}{أهـ} = \frac{٤٥}{٦٣} = \frac{٥}{٧}$ ، $\frac{بأ}{أد} = \frac{٥٥}{٧٧} = \frac{٥}{٧}$

∴ $\frac{جـأ}{أهـ} = \frac{بأ}{أد}$ ∴ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$

(٣) ∵ $\frac{أد}{أب} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{أهـ}{أجـ} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ∴ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$

(٤) ∵ $\frac{أد}{دب} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$

(٥) ∵ $\frac{أد}{دب} = \frac{٢٨}{٢٠} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٤٢}{٢٤} = \frac{٧}{٤}$

∴ $\frac{أد}{دب} \neq \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ $\overline{دهـ}$ لا توازى $\overline{بجـ}$

(٦) فى Δ أهـد القائم الزاوية فى هـ :

∵ $(أد)^2 = (أهـ)^2 + (هـد)^2$

$= ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥$

∴ أد = ٢٥ سم

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$ ، $\frac{أد}{دب} = \frac{٢٥}{١٥} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{أد}{دب}$ ∴ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$

٣

(١) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\frac{١٢}{٨} = \frac{٢س + ٥}{١٠}$ ∴ ٢س + ٥ = ١٥

∴ ٢س = ١٠ ∴ س = ٥

(٢) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أجـ}{هـجـ} = \frac{أب}{دب}$

∴ $\frac{٣٠}{١٠} = \frac{٢٤}{س^2}$ ∴ $س^2 = ٨$

∴ س = ± ٢$\sqrt{٢}$

(٣) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\frac{٧}{٢س + ١} = \frac{س + ٢}{٥}$

∴ (٢س + ١) (س + ٢) = ٣٥

∴ ٢$س^2$ + ٥س − ٣٣ = ٠

∴ (٢س + ١١) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٥,٥ (مرفوض) أ، س = ٣

٤ ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٣}{هـجـ}$ ∴ هـجـ = ٤,٥ سم

(وهو المطلوب)

٥ ∵ $\overline{أب} // \overline{دهـ}$ ∴ $\frac{جـد}{جـب} = \frac{جـهـ}{جـأ}$

∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{جـهـ}{٦}$ ∴ جـهـ = ٤,٥ سم

(وهو المطلوب)

٦ ∵ $\frac{أهـ}{هـد} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{بهـ}{هـجـ} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{أهـ}{هـد} = \frac{بهـ}{هـجـ}$

∴ $\overline{أب} // \overline{جـد}$ (وهو المطلوب)

٧ ∵ $\overline{سع} // \overline{لص}$

∴ $\frac{عم}{عل} = \frac{سم}{سص}$

∴ $\frac{عم}{٣٦} = \frac{٩}{٢٤}$

∴ عم = ١٣,٥ سم (وهو المطلوب)

٨ ∵ $\overline{بجـ} // \overline{دهـ}$ ∴ $\frac{أب}{أد} = \frac{أجـ}{أهـ}$

∴ $\frac{٦}{١٢} = \frac{٥}{أهـ}$ ∴ أهـ = ١٠ سم

(المطلوب أولاً)

∵ $\overline{سص} // \overline{دهـ}$ ∴ $\frac{دس}{دأ} = \frac{صهـ}{أهـ}$

∴ $\frac{دس}{١٢} = \frac{٤}{١٠}$ ∴ دس = ٤,٨ سم

(المطلوب ثانيًا)

٩

(١) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{س}{٦}$ ∴ س = ٣ سم

(٢) ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{أد}{دب}$

∴ $\frac{س}{٥} = \frac{س − ٢}{٣}$ ∴ ٥س − ١٠ = ٣س

∴ ٢س = ١٠ ∴ س = ٥ سم

(٣) ∵ $\overline{دو} // \overline{أجـ}$ ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{جـو}{جـب}$

∴ $\frac{س}{٢١} = \frac{٦}{١٤}$ ∴ س = ٩ سم

(٤) ∵ ٢ دب = ١٢ ∴ دب = ٦ سم

، ∵ ٣ وجـ = ١٢ ∴ وجـ = ٤ سم

، ∵ $\overline{دو} // \overline{أجـ}$ ∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{جـو}{جـب}$

∴ $\frac{س}{٦} = \frac{٤}{س + ٥}$ ∴ س (س + ٥) = ٢٤

∴ $س^2$ + ٥س − ٢٤ = ٠

∴ (س + ٨) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٨ (مرفوض) أ، س = ٣

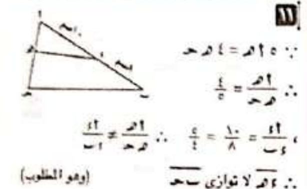
∴ س = ٣ سم

١٠ ∵ $\frac{سل}{سص} = \frac{٥,٦}{١٤} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{سم}{سع} = \frac{٨,٤}{٢١} = \frac{٢}{٥}$

∴ $\frac{سل}{سص} = \frac{سم}{سع}$

∴ $\overline{لم} // \overline{صع}$ (وهو المطلوب)

١١



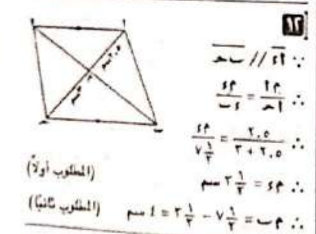
∵ ٥ أهـ = ٤ هـجـ

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٤}{٥}$

، $\frac{أد}{دب} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ ∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} \neq \frac{أد}{دب}$

∴ $\overline{دهـ}$ لا توازى $\overline{بجـ}$ (وهو المطلوب)

١٢



∵ $\overline{أد} // \overline{بجـ}$

∴ $\frac{مأ}{مجـ} = \frac{مد}{دب}$

∴ $\frac{٢,٥}{٣ + ٢,٥} = \frac{مد}{٧\frac{١}{٢}}$

∴ مد = ٣$\frac{١}{٢}$ سم (المطلوب أولاً)

∴ مب = ٧$\frac{١}{٢}$ − ٣$\frac{١}{٢}$ = ٤ سم (المطلوب ثانيًا)

١٣

فى Δ أبجـ : ∵ $\overline{دو} // \overline{بجـ}$

∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أو}{وجـ}$ ∴ $\frac{أو}{٥,٥} = \frac{٦}{٥}$

∴ أو = ٦,٦ سم (المطلوب أولاً)

∴ هـو = ٦,٦ − ٣,٦ = ٣ سم



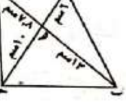
، في Δ أ ب و :

∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٦}{٥}$ ، $\frac{أهـ}{هـو} = \frac{٣,٦}{٣} = \frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـو}$

∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بو}$ (المطلوب ثانيًا)

١٤



∵ $\frac{أهـ}{هـحـ} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

، $\frac{ءهـ}{هـب} = \frac{٧,٨}{١٣} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أهـ}{هـحـ} = \frac{ءهـ}{هـب}$

∴ $\overline{أء} \parallel \overline{بحـ}$

∴ الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف (وهو المطلوب)

١٥

في Δ ء أ هـ القائم الزاوية في أ :

∵ $(أء)^2 = (ءهـ)^2 - (أهـ)^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

∴ أء = ٣ سم

في Δ أ ب حـ :

∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أهـ}{هـحـ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـحـ}$

∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ (المطلوب أولاً)

في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في أ :

∵ $(بحـ)^2 = (أب)^2 + (أحـ)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

∴ ب حـ = ١٥ سم (المطلوب ثانيًا)

١٦

∵ $\overline{سص} \parallel \overline{بحـ}$ ∴ $\frac{أس}{أب} = \frac{أص}{أحـ}$

ومن خواص التناسب :

∴ $\frac{أس}{أب} = \frac{أص}{أحـ} = \frac{أس + أص}{أب + أحـ}$

∴ $\frac{أس}{أس + ٢} = \frac{٦}{٦ + حـص} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٥ أس = ٣ أس + ٩

∴ أس = ٤,٥ سم (المطلوب أولاً)

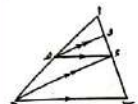
، ١٨ + ٣ حـ ص = ٣٠

∴ حـ ص = ٤ سم (المطلوب ثانيًا)

١٧ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (جـ)

(٤) (ب) (٥) (د) (٦) (ب)

١٨



∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

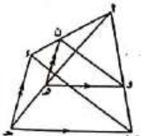
∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أحـ}$

، ∵ $\overline{هـو} \parallel \overline{حـء}$

∴ $\frac{أو}{أء} = \frac{أهـ}{أحـ}$ ∴ $\frac{أو}{أء} = \frac{أء}{أب}$

∴ $(أء)^2 = أو \times أب$ (وهو المطلوب)

١٩



∵ $\overline{هـو} \parallel \overline{حـب}$

∴ $\frac{أهـ}{أحـ} = \frac{أو}{أب}$

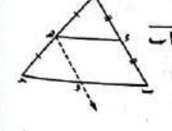
، ∵ $\overline{هـن} \parallel \overline{حـء}$

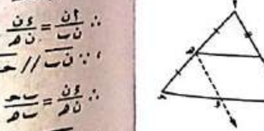
∴ $\frac{أهـ}{أحـ} = \frac{أن}{أء}$

∴ $\frac{أو}{أب} = \frac{أن}{أء}$

∴ في Δ أ ب ء : $\overline{ون} \parallel \overline{بء}$ (وهو المطلوب)

٢٠





المعطيات :

أ ب حـ مثلث ، ء منتصف $\overline{أب}$

، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

المطلوب : إثبات أن :

(١) $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

(٢) ءهـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

العمل :

نرسم $\overline{هـو} \parallel \overline{أب}$ ويقطع $\overline{بحـ}$ في و

البرهان :

∵ $\frac{أء}{ءب} = ١$ ، $\frac{أهـ}{هـحـ} = ١$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـحـ}$

∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ (المطلوب أولاً)

∵ $\overline{هـو} \parallel \overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

∴ و منتصف $\overline{بحـ}$

∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

، ∵ الشكل ب ء هـ و متوازي أضلاع

∴ ءهـ = ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

٢١

∵ $\overline{ءو} \parallel \overline{بحـ}$

∴ $\frac{حـم}{مو} = \frac{بم}{مء}$

، ∵ $\overline{حـء} \parallel \overline{بهـ}$

∴ $\frac{مهـ}{محـ} = \frac{مب}{مء}$

∴ $\frac{حـم}{مو} = \frac{مهـ}{حـم}$

∴ $(حـم)^2 = مو \times مهـ$ (وهو المطلوب)

٢٢

∵ $\overline{أء} \parallel \overline{بهـ}$

∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{ءن}{نهـ}$

، ∵ $\overline{نب} \parallel \overline{حـء}$

∴ $\frac{ءن}{نهـ} = \frac{بحـ}{بهـ}$

∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{بحـ}{بهـ}$

، ∵ $\overline{بى} \parallel \overline{ءهـ}$

∴ $\frac{بحـ}{بهـ} = \frac{حـى}{ىء}$

∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{حـى}{ىء}$ (وهو المطلوب)

٢٣

في Δ أ ب س :

∵ ٣ أء = ٢ ء ب

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\frac{أو}{وس} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أو}{وس}$ ∴ $\overline{ءو} \parallel \overline{بس}$ (١)

في Δ أ س حـ :

∵ ٥ حـ هـ = ٢ أ حـ ∴ $\frac{أحـ}{حـهـ} = \frac{٥}{٢}$

، ∵ $\frac{أس}{سو} = \frac{٢٠}{١٢} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $\frac{أحـ}{حـهـ} = \frac{أس}{سو}$

∴ $\overline{وهـ} \parallel \overline{سحـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

∴ النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة

(وهو المطلوب)

٢٤

في Δ أ ء ص :

∵ $\overline{هـس} \parallel \overline{ءص}$

∴ $\frac{أهـ}{هـء} = \frac{أس}{سص} = \frac{٣}{٤}$ (١)

، في Δ ب حـ س : ∵ $\overline{ءص} \parallel \overline{حـس}$

∴ $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{بص}{سص} = \frac{٣}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{أس}{سص} = \frac{بص}{سص}$

∴ أ س = ب ص (وهو المطلوب)

٢٥

في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{ءس} \parallel \overline{أحـ}$

∴ $\frac{بس}{بحـ} = \frac{بء}{أب}$ ∴ $\frac{بس}{١٣,٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ ب س = ٥,٤ سم

، ∵ $\overline{هـص} \parallel \overline{أب}$ ∴ $\frac{حـص}{حـب} = \frac{حـهـ}{أحـ}$



∴ حـ ص / ١٢,٥ = ٤ / ٩ ∴ حـ ص = ٦ سم

∴ س ص = ب حـ − (ب س + حـ ص)

= ١٢,٥ − (٥,٤ + ٦) = ٢,١ سم (وهو المطلوب)

٢٦

∵ م هـ // أ ب

∴ ء م / ء أ = ء هـ / ء ب

، ∵ م و // أ حـ

∴ ء م / ء أ = ء و / ء حـ ∴ ء هـ / ء ب = ء و / ء حـ

، ∵ ء ب = ء حـ ∴ ء هـ = ء و

∴ ء منتصف هـ و (المطلوب أولاً)

، ∵ ء منتصف ب حـ ∴ أ ء متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ ء م = $\frac{1}{2}$ أ ء

∴ فى Δ أ ب ء يكون ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب ء

، فى Δ أ حـ ء يكون ء و = $\frac{1}{2}$ ء حـ

وبالجمع : ∴ ء هـ + ء و = $\frac{1}{2}$ (ب ء + ء حـ)

∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

٢٧

∵ مساحة Δ أ ء هـ / مساحة Δ أ ب هـ = أ ء / أ ب

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع) .

، مساحة Δ أ ب هـ / مساحة Δ أ ب حـ = أ هـ / أ حـ

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع)

، ∵ أ ء / أ ب = أ هـ / أ حـ (لأن ء هـ // ب حـ)

∴ مساحة Δ أ ء هـ / مساحة Δ أ ب هـ = مساحة Δ أ ب هـ / مساحة Δ أ ب حـ (وهو المطلوب)

٢٨ (١) (حـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (حـ)

(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (ب)

إرشادات لحل رقم ٢٨

(١) ∵ ق (∠ ى ء و) = ق (∠ ى حـ ب) (بالتناظر)

، ∵ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ حـ ء ب) (بالتقابل بالرأس)

، ∵ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ و ء ى)

∴ ق (∠ حـ ء ب) = ق (∠ ء حـ ب)

∴ ب حـ = ب ء = ١٥ سم

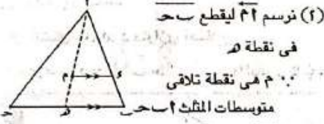
فى Δ أ ب حـ : ∵ ء هـ // ب حـ

∴ أ ء / أ ب = ء هـ / ب حـ ∴ أ ء / (أ ء + ١٥) = ١٠ / ١٥ = ٢ / ٣

∴ ٢ أ ء + ٣٠ = ٣ أ ء ∴ أ ء = ٣٠ سم

(٢) نرسم أ م ليقطع ب حـ

فى نقطة هـ



∵ م هى نقطة تلاقى

متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ أ هـ متوسط ∴ هـ ب = $\frac{1}{2}$ ب حـ

∴ أ م / أ هـ = ٢ / ٣ ، ∵ ء م // ب حـ

∴ أ م / أ هـ = ء م / ب هـ = ٢ / ٣ ∴ ء م = $\frac{2}{3}$ ب هـ

، ∵ هـ ب = $\frac{1}{2}$ ب حـ

∴ ء م = $\frac{2}{3}$ × $\frac{1}{2}$ ب حـ = $\frac{1}{3}$ ب حـ

أى أن : ء م / ب حـ = $\frac{1}{3}$

(٣) لإثبات أن : ء هـ // ب حـ

يجب أن يكون أ ء / أ ب = أ هـ / أ حـ

، ∵ ء و // ب هـ ∴ أ ء / أ ب = أ و / أ هـ

أى أنه يجب أن يكون أ هـ / أ حـ = أ و / أ هـ

∴ أ و × أ حـ = $(\text{أ هـ})^2$

(٤) ∵ ٢ $س^2$ − ٣ س ص − ٥ $ص^2$ = ٠

∴ (٢ س − ٥ ص) (س + ص) = ٠

∴ ٢ س = ٥ ص أى أن : ص / س = ٢ / ٥

أو س = − ص (مرفوض)

فى Δ أ ب حـ : ∵ هـ ء // ب حـ

∴ أ هـ / أ ب = هـ ء / ب حـ ∴ أ هـ / ١٠ = ص / س = ٢ / ٥

∴ أ هـ = ٤ سم

∴ هـ ب = ١٠ − ٤ = ٦ سم

(٥) نرسم المماس المشترك أ و

∵ ق (∠ و أ ب)

= ق (∠ أ ء ب)

(زاوية مماسية

وزاوية محيطية

مشتركتان فى القوس أ ب)

، ∵ ق (∠ و أ حـ) = ق (∠ أ هـ حـ)

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان فى القوس أ حـ)

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ هـ حـ) وهما فى

وضع تناظر

∴ ء ب // هـ حـ ∴ أ ب / ب حـ = أ ء / ء هـ

∴ ٦ / ٣ = ٤ / ء هـ ∴ ء هـ = ٢ سم

(٦) فى ΔΔ أ حـ هـ ، هـ حـ و :

∵ أ هـ ، هـ و على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس حـ

∴ م (Δ أ حـ هـ) / م (Δ حـ هـ و) = أ هـ / هـ و

∴ أ هـ / هـ و = ١٥ / ٩ = ٥ / ٣ ∴ أ هـ / أ و = ٥ / ٨

فى Δ أ ب و : ∵ ء هـ // ب و

∴ أ ء / أ ب = أ هـ / أ و ∴ أ ء / ١٦ = ٥ / ٨

∴ أ ء = ١٠ سم

(٧) فى ΔΔ حـ ب هـ ، هـ ب أ :

∵ حـ هـ ، هـ أ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ب

∴ م (Δ أ ب هـ) / م (Δ حـ ب هـ) = أ هـ / حـ هـ

∴ م (Δ أ ب هـ) / ٩ = ٤ / ٢

∴ م (Δ أ ب هـ) = ١٨ $سم^2$

فى Δ أ ب حـ : ∵ ء هـ // ب حـ

∴ أ ء / ء ب = أ هـ / هـ حـ = ٤ / ٢ = ٢ / ١

∴ أ ء / أ ب = ٢ / ٣

فى ΔΔ أ ء هـ ، أ ب هـ :

أ ء ، أ ب على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس هـ

∴ م (Δ أ ء هـ) / م (Δ أ ب هـ) = أ ء / أ ب

∴ م (Δ أ ء هـ) / ١٨ = ٢ / ٣

∴ م (Δ أ ء هـ) = ١٢ $سم^2$

٢٩

∵ أ ء / ء ب = حـ هـ / أ هـ ∴ أ ء / (أ ء + ء ب) = حـ هـ / (حـ هـ + هـ أ)

∴ أ ء / أ ب = حـ هـ / أ حـ (١)

، ∵ هـ ى // ب حـ ∴ حـ هـ / أ حـ = ب ى / أ ب (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أ ء / أ ب = ب ى / أ ب ∴ أ ء = ب ى

، ∵ أ س = ب س (معطى)

∴ أ س − أ ء = ب س − ب ى

∴ ء س = س ى

∴ فى Δ ء هـ ى :

∵ س منتصف ء ى ، س و // ى هـ

∴ و منتصف ء هـ (وهو المطلوب)

٣٠

العمل :

نرسم $\overline{\text{بهـ}}$ ، $\overline{\text{بو}}$

البرهان : فى الشكل ب هـ د و :

∵ م منتصف كل من $\overline{\text{هـو}}$ ، $\overline{\text{بد}}$

∴ الشكل ب هـ د و متوازى أضلاع

فى Δ أ ب و : ∵ $\overline{\text{سهـ}} // \overline{\text{بو}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـو}} = \frac{١}{٢}$ (١)

، فى Δ ب جـ هـ : ∵ $\overline{\text{وص}} // \overline{\text{هـب}}$

∴ $\frac{\text{جـص}}{\text{صب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{وهـ}} = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{جـص}}{\text{صب}}$

وذلك فى Δ أ ب جـ :

∴ $\overline{\text{سص}} // \overline{\text{أجـ}}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 6

١ (١) هـو (٢) دو (٣) دهـ (٤) دو
(٥) م هـ (٦) دو (٧) م هـ (٨) م جـ

٢ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)

٣

(١) ∵ $\frac{١٠}{٦} = \frac{١٥}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{ص}}{٣}$ ∴ س + ٢ = ٩

∴ س = ٧ ، ص = ٥

(٢) ∵ $\frac{\text{س} + ٢}{١٢} = \frac{٣}{\text{ص}} = \frac{\text{س} - ١}{٨}$

∴ ١٢ (س − ١) = ٨ (س + ٢)

∴ ١٢ س − ١٢ = ٨ س + ١٦

∴ ٤ س = ٢٨ ∴ س = ٧

∴ $\frac{٣}{\text{ص}} = \frac{٦}{٨}$ ∴ ص = ٤

(٣) ∵ $\frac{\text{س} - ٨}{١٢} = \frac{\text{س} + ٢}{٢٠}$

∴ ٢٠ (س − ٨) = ١٢ (س + ٢)

∴ ٢٠ س − ١٦٠ = ١٢ س + ٢٤

∴ ٨ س = ١٨٤ ∴ س = ٢٣

، ∵ $\frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{٣٠}{٢٠}$ ∴ ص = ١٨

(٤) ∵ $\overline{\text{أب}} // \overline{\text{دهـ}}$ ، ب هـ = هـ جـ

∴ أ د = د جـ ∴ ٣ س − ١ = ٢ س + ٣

∴ س = ٤

، ∵ ب هـ = هـ جـ ∴ ٢ ص + ٧ = ١٣

∴ ٢ ص = ٦ ∴ ص = ٣

(٥) ∵ $\overline{\text{أد}} // \overline{\text{بهـ}} // \overline{\text{جـو}}$

، د هـ = هـ و = و م

∴ أ ب = ب جـ = جـ م

∴ $\text{س}^٢$ − ٣ = ٣ س + ١

∴ $\text{س}^٢$ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)

، ∵ ب جـ = جـ م ∴ ٢ ص − ١ = ١٣

∴ ٢ ص = ١٤ ∴ ص = ٧

(٦) ∵ $\overline{\text{أب}} // \overline{\text{دجـ}} // \overline{\text{هـو}}$

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{مب}} = \frac{\text{مد}}{\text{مجـ}} = \frac{\text{دو}}{\text{جـهـ}}$

∴ $\frac{\text{ص} - ٤}{٤\text{س} - ١} = \frac{٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢\text{س} + ٧}$

∴ ٤ س − ١ = ٢ س + ٧

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

∴ $\frac{\text{ص} - ٤}{١٥} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ص − ٤ = ١٠

∴ ص = ١٤

(٧) ∵ $\overline{\text{أب}} // \overline{\text{جـد}} // \overline{\text{هـو}}$ ، ب د = د و

∴ أ جـ = جـ هـ

∴ ٢ س − ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

∵ ب د = د و

∴ ص + ٣ = ٦ ∴ ص = ٣

(٨) ∵ س + ٣ = ٢ ص + ٥

∴ س − ٢ ص = ٢ (١)

، س − ٣ = ص + ٢

∴ س − ص = ٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ص = ٣

، بالتعويض فى (٢) : ∴ س = ٨

(٩) ∵ $\overline{\text{دهـ}} // \overline{\text{بجـ}}$ ، أ د = د ب

∴ أ هـ = هـ جـ ∴ س + ٦ = ٣ س − ٢

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

فى Δ أ ب جـ :

∵ د ، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

∴ ٣ ص − ٢ = $\frac{١}{٢}$ (٥ ص − ١)

∴ ٦ ص − ٤ = ٥ ص − ١ ∴ ص = ٣

(١٠) ∵ ٢ س + ١ = ص − ٣

∴ $\text{س}^٢$ − ٥ = ٣ س − ١

∴ $\text{س}^٢$ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ ص − ٣ = ٩ ∴ ص = ١٢

(١١) ∴ $\frac{٣\text{س} + ٢}{١٥} = \frac{٢\text{س} + ٤}{١٢}$

∴ ١٢ (٣ س + ٢) = ١٥ (٢ س + ٤)

∴ ٣٦ س + ٢٤ = ٣٠ س + ٦٠

∴ ٦ س = ٣٦ ∴ س = ٦

∴ $\frac{\text{ص}}{١٥} = \frac{١١}{١٢}$ ∴ ص = $١٣\frac{٣}{٤}$

(١٢) ∵ $\frac{\text{س} + ١}{٩} = \frac{٦}{٥} = \frac{١٠}{\text{ص}}$

∴ س + ١ = $\frac{٥٤}{٥}$ = $١٠\frac{٤}{٥}$

∴ س = $٩\frac{٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٥٠}{٦}$ = $٨\frac{١}{٣}$

٤

∵ $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$ ، م ، مَ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{سص}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{صع}} = \frac{\text{جـد}}{\text{عن}}$

∴ $\frac{١,٦}{\text{سص}} = \frac{٢,٤}{٣,٦} = \frac{\text{جـد}}{٤,٨}$

∴ س ص = $\frac{٣,٦ \times ١,٦}{٢,٤}$ = ٢,٤ سم

، جـ د = $\frac{٤,٨ \times ٢,٤}{٣,٦}$ = ٣,٢ سم (وهو المطلوب)

٥

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} // \overleftrightarrow{\text{دهـ}} // \overleftrightarrow{\text{سو}}$

، $\overleftrightarrow{\text{جـب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـأ}}$ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{جـس}}{\text{جـو}} = \frac{\text{سهـ}}{\text{ود}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{أد}}$

∴ $\frac{٥}{٧,٥} = \frac{٤}{\text{ود}} = \frac{\text{بهـ}}{٦}$

∴ و د = ٦ سم ، ب هـ = ٤ سم (وهو المطلوب)

٦

∵ $\overline{\text{أجـ}} // \overline{\text{وهـ}} // \overline{\text{دب}}$ ∴ $\frac{\text{مهـ}}{\text{مو}} = \frac{\text{هـب}}{\text{ود}}$

∴ $\frac{٦}{\text{مو}} = \frac{٩}{١٥}$

∴ م و = ١٠ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أم}}{\text{مب}} = \frac{\text{جـم}}{\text{مد}}$ ∴ $\frac{\text{أم}}{١٥} = \frac{١٨}{٢٥}$

∴ أ م = ١٠,٨ سم (المطلوب ثانيًا)



٧

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـ د}} \parallel \overline{\text{هـ و}}$

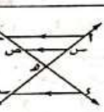
∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{حـ ك}}{\text{د ك}} = \frac{\text{ك و}}{\text{ك هـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{ب هـ}}$

∴ $\frac{5}{\text{ب د}} = \frac{10}{\text{د ك}} = \frac{7.5}{\text{ك هـ}} = \frac{22.5}{18}$

∴ ب د = ٤ سم ، د ك = ٨ سم ، ك هـ = ٦ سم

(وهو المطلوب)

٨



∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب د}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{حـ ص}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ د}}$

∴ أس × هـ د = حـ ص × هـ ب (وهو المطلوب)

٩

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـ د}} \parallel \overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ع ك}}$

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{و ص}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ص ك}}$

∴ $\frac{2}{2.5} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{هـ س}}{4.5} = \frac{\text{س ع}}{3}$

∴ هـ س = ٣,٦ سم ، س ع = ٢,٤ سم

∴ هـ حـ = ١٢ − (٣,٦ + ٢,٤) = ٦ سم

∴ د و = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

١٠

∵ أس : س ص : ص حـ = ٢ : ٣ : ٥

∴ ب د : د هـ : هـ حـ = ٢ : ٣ : ٥

∴ $\frac{\text{ب د}}{2} = \frac{\text{د هـ}}{3} = \frac{\text{هـ حـ}}{5}$ ∴ $\frac{\text{ب د}}{2} = \frac{7.5}{3} = \frac{\text{هـ حـ}}{5}$

∴ ب د = ٥ سم ، هـ حـ = ١٢,٥ سم

، ∵ $\frac{\text{أس}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{4}{\text{أحـ}} = \frac{5}{12.5 + 7.5 + 5}$

∴ أحـ = ٢٠ سم (وهو المطلوب)

١١

∵ $\overline{\text{د س}} \parallel \overline{\text{هـ ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{أد}} = \frac{\text{س ص}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ص حـ}}{\text{هـ ب}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{1} = \frac{\text{س ص}}{3} = \frac{\text{ص حـ}}{2} = \frac{\text{أس + س ص + ص حـ}}{1 + 3 + 2} = \frac{\text{أحـ}}{6} = \frac{24}{6} = 4$

∴ أس = ٤ سم ، س ص = ١٢ سم

، ص حـ = ٨ سم (وهو المطلوب)

١٢

∵ أب : ب حـ : حـ د

	٢	١
٥	٤	
٥	٤	٢

، ∵ $ل_1 \parallel ل_2 \parallel ل_3 \parallel ل_4$

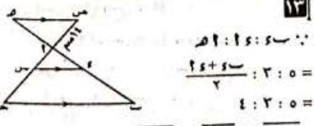
∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{حـ د}}$

∴ $\frac{\text{س ص}}{2} = \frac{\text{ص ع}}{4} = \frac{\text{ع ن}}{5} = \frac{\text{س ص + ص ع + ع ن}}{2 + 4 + 5} = \frac{\text{س ن}}{11} = \frac{16.5}{11} = \frac{3}{2}$

∴ س ص = ٣ سم ، ص ع = ٦ سم

، ع ن = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

١٣



∵ ب د : د أ : أ هـ

$= 5 : 3 : \frac{\text{ب د + د أ}}{2}$

= ٥ : ٣ : ٤

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{د س}} \parallel \overline{\text{هـ ص}}$

∴ $\frac{\text{حـ س}}{\text{ب د}} = \frac{\text{س أ}}{\text{أد}} = \frac{\text{أص}}{\text{أهـ}}$

∴ $\frac{\text{حـ س}}{5} = \frac{\text{أس}}{3} = \frac{14}{4}$

∴ حـ س = ١٧,٥ سم ، س أ = ١٠,٥ سم

∴ أحـ = ١٧,٥ + ١٠,٥ = ٢٨ سم (وهو المطلوب)

١٤

∵ $\overline{\text{د حـ}} \parallel \overline{\text{و هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ى د}}{\text{ى و}} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{ى هـ}}$

، ∵ $\frac{\text{ى د}}{\text{ى و}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى حـ}}$ (معطى) ∴ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى حـ}} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{ى هـ}}$

∴ $(\text{حـ ى})^2$ = أ ى × ى هـ (وهو المطلوب)

١٥

∵ $\overline{\text{أ ر}} \parallel \overline{\text{م و}} \parallel \overline{\text{ب ط}}$

، $\overleftrightarrow{\text{ب ر}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{ب ن}} = \frac{\text{م ر}}{\text{ن أ}}$

، ∵ ب م = م ر ∴ ب ن = ن أ

∴ ن منتصف $\overline{\text{ب أ}}$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

هـ منتصف $\overline{\text{ر ط}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أ ط}}$ (المطلوب أولاً)

∴ من Δ ر ب ط :

∵ م ، هـ منتصفا $\overline{\text{ر ب}}$ ، $\overline{\text{ر ط}}$ على الترتيب

∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ ب ط (١)

، من Δ أ ر ط :

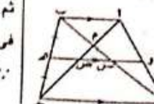
∵ هـ ، و منتصفا $\overline{\text{ر ط}}$ ، $\overline{\text{أ ط}}$ على الترتيب

∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ أ ر (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م هـ + هـ و = $\frac{1}{2}$ (أ ر + ب ط)

∴ م و = $\frac{1}{2}$ (أ ر + ب ط) (المطلوب ثانيًا)

١٦



فى Δ أ ب حـ :

∵ هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overline{\text{هـ ص}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ ص منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، هـ ص = $\frac{1}{2}$ أ ب (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{د حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{د ب}}$ قاطعان لهم

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م س}} = \frac{\text{ص حـ}}{\text{س د}}$

∴ $\frac{\text{أ م + م ص}}{\text{ب م + م س}} = \frac{\text{م ص + ص حـ}}{\text{م س + س د}}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ب س}} = \frac{\text{م حـ}}{\text{م د}}$ ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{د م}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٧

يمكن إيجاد $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}}$ بثلاث طرق :

الطريقة الأولى : باستخدام البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى :

∴ أب = $\sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{13}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(11 - 5)^2 + (9 - 5)^2}$

= $2\sqrt{13}$ وحدة طول

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$

الطريقة الثانية :

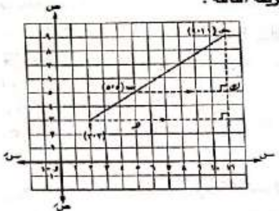
نجعل $\overline{\text{أ حـ}}$ وترًا فى مثلث قائم الزاوية فى د (١١ ، ٣)

ثم نرسم $\overline{\text{ب هـ}} \parallel \overline{\text{حـ د}}$ ويقطع $\overline{\text{أ د}}$ فى هـ (٥ ، ٣)

فى Δ أ د حـ :

∵ $\overline{\text{ب هـ}} \parallel \overline{\text{حـ د}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

الطريقة الثالثة :



كما سبق ولكن برسم $\overleftrightarrow{\text{ب ك}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

ويقطع $\overline{\text{جـ ء}}$ في ك (١١ ، ٥)

في Δ أ ء جـ :

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ك}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء ك}}{\text{ك جـ}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

١٨ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

إرشادات لحل رقم ١٨

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{٣}{\text{ص}}$ ∴ س ص = ١٢

، (س + ص)^٢ = س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص

= ٥٧ + ٢ × ١٢ = ٨١

∴ س + ص = ٩ سم

(٢) المسافة بين النقطتين (٠ ، ٦) ، (−٢ ، ٢)

= $\sqrt{(٠ + ٢)^٢ + (٦ - ٢)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم

، المسافة بين النقطتين (−٢ ، ٢) ، (−٣ ، ٠)

= $\sqrt{(-٢ + ٣)^٢ + (٢ - ٠)^٢}$ = $\sqrt{٥}$ سم

∴ $\frac{\text{س}}{\sqrt{٥}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ∴ س = ٢ $\sqrt{٥}$

(٣) نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$

لتقطع $\overline{\text{هـ و}}$ في ن

في Δ أ ب جـ :

∵ $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{٢}{٥} = \frac{\text{هـ ن}}{٢٢} = \frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}}$ ∴ هـ ن = ٨,٨ سم

في Δ أ ء جـ : ∵ $\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ن و}}{\text{أ ء}}$ ∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{\text{ن و}}{٧}$

∴ ن و = ٤,٢ سم

∴ هـ و = ٨,٨ + ٤,٢ = ١٣ سم

(٤) نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$

ليقطع $\overline{\text{هـ و}}$ في ن

نفرض أن هـ ن = س

في Δ أ ب جـ :

∵ $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س}}{١٤}$ (١)

في Δ أ ء جـ : ∵ $\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ن و}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{٨ - \text{س}}{٦}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{س}}{١٤} + \frac{٨ - \text{س}}{٦}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٦\text{س}}{٨٤} + \frac{١١٢ - ١٤\text{س}}{٨٤}$

∴ $\frac{١١٢ - ٨\text{س}}{٨٤} = ١$

∴ ١١٢ − ٨ س = ٨٤

∴ ٨ س = ٢٨ ∴ س = ٣ $\frac{١}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣\frac{١}{٢}}{١٤} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{١}{٣}$

١٩

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ن هـ}}$

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ن أ}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م أ}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{ن ي}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ي}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ي جـ}}{\text{ن أ}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∵ م ب = م جـ

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ن أ}} = \frac{\text{م ي}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ي جـ}}{\text{ن أ}}$ ∴ م هـ = م ي

(المطلوب أولاً)

∴ م منتصف $\overline{\text{هـ ي}}$

، $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م ن}}{\text{ن أ}}$

، ∵ ن نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م ن}}{\text{ن أ}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ ب

، ∵ م هـ = م ي

∴ م هـ + م ي = $\frac{١}{٢}$ هـ ب + $\frac{١}{٢}$ هـ ب

∴ هـ ي = هـ ب (٣)

، ∵ $\frac{\text{م ي}}{\text{ي جـ}} = \frac{\text{م ن}}{\text{ن أ}} = \frac{١}{٢}$ ∴ م ي = $\frac{١}{٢}$ ي جـ

، ∵ م ي = م هـ

∴ م ي + م هـ = $\frac{١}{٢}$ ي جـ + $\frac{١}{٢}$ ي جـ

∴ هـ ي = ي جـ (٤)

من (٣) ، (٤) :

∴ ب هـ = هـ ي = ي جـ = $\frac{١}{٣}$ ب جـ (المطلوب ثانياً)

٢٠

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ قاطعان لهما

∴ $\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و ء}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{هـ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ قاطعان لهما

∴ $\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{و ء}}{\text{و س}}$ (٢)

وبضرب (١) في (٢) :

∴ $\left(\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}}\right)^٢ = \frac{\text{و جـ}}{\text{و ء}} \times \frac{\text{و ء}}{\text{و س}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و س}}$

(وهو المطلوب)

٢١

∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{س ء}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ∴ $\frac{\text{جـ ص}}{\text{أ ص}} = \frac{\text{و ص}}{\text{ص ء}}$ (٢)

، ∵ أ س = ص جـ (٣)

وبإضافة س ص للطرفين :

∴ أ ص = س جـ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : ∴ $\frac{\text{هـ س}}{\text{س ء}} = \frac{\text{و ص}}{\text{ص ء}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 7

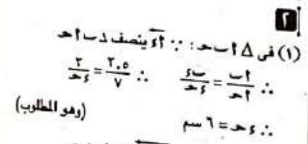
١

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (أ)

(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (أ)

٢



(١) في Δ أ ب جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$ ∴ $\frac{٥,٢}{٧} = \frac{٣}{\text{ء جـ}}$

∴ ء جـ = ٦ سم (وهو المطلوب)

(٢) في Δ أ جـ ء : ∵ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ ينصف ∠ جـ

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{جـ ء}} = \frac{٥}{٤}$

∴ جـ ء = ٨ سم (المطلوب أولاً)



، $حـ ب = \sqrt{حـ أ \times حـ ء - أ ب \times ب ء}$

$= \sqrt{١٠ \times ٨ - ٥ \times ٤} = ٢\sqrt{١٥}$ سم (المطلوب ثانيًا)

(٣) في Δ أ ب حـ :

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ $\frac{ب أ}{أ حـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$ ∴ $\frac{٩}{٦} = \frac{١٢}{ء حـ}$

∴ ء حـ = ٨ سم (المطلوب أولًا)

، $أء = \sqrt{ب ء \times ء حـ - أ ب \times أ حـ}$

$= \sqrt{١٢ \times ٨ - ٩ \times ٦} = \sqrt{٤٢}$ سم (المطلوب ثانيًا)

٣

(١) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٨}{١٠} = \frac{١٢}{٤ س - ١}$

∴ ٤ س − ١ = ١٥ ∴ س = ٤

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠حـ أ هـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٢٠}{١٥} = \frac{٥ س + ٢}{٩}$

∴ ٥ س + ٢ = ١٢ ∴ س = ٢

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{ب ء}$ ينصف ∠أ ب حـ

∴ $\frac{حـ ء}{ء أ} = \frac{حـ ب}{ب أ}$ ∴ $\frac{س + ١}{٥} = \frac{س + ٤}{٨}$

∴ ٨ س + ٨ = ٥ س + ٢٠

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

(٤) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٦ س}{٥ س} = \frac{١٠ س + ٤}{٩ س + ٢}$

∴ ٦ س (٩ س + ٢) = ٥ س (١٠ س + ٤)

∴ ٥٤ $س^٢$ + ١٢ س = ٥٠ $س^٢$ + ٢٠ س

∴ ٤ $س^٢$ − ٨ س = ٠

∴ ٤ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢

٤

(١) ∵ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ أ ب = أ حـ = ٧ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ} = ١$ ∴ $\frac{س}{٤} = ١$

∴ س = ٤

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٧ + ٧ + ٨ = ٢٢ سم

(٢) في Δ أ ء حـ القائم الزاوية في ء :

$(ء حـ)^٢ = (٥٠)^٢ - (٣٠)^٢ = ١٦٠٠$

∴ ء حـ = ٤٠ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ينصف ∠ء أ حـ

∴ $\frac{ء ب}{ب حـ} = \frac{أ ء}{أ حـ} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{ء ب + ب حـ}{ب حـ} = \frac{٣ + ٥}{٥}$

∴ $\frac{ء حـ}{س} = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\frac{٤٠}{س} = \frac{٨}{٥}$

∴ س = ٢٥ ∴ ء ب = ٤٠ − ٢٥ = ١٥ سم

، $أ ب = \sqrt{ء أ \times أ حـ - ء ب \times ب حـ}$

$= \sqrt{٥٠ \times ٣٠ - ١٥ \times ٢٥} = ١٥\sqrt{٥}$ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = $١٥\sqrt{٥}$ + ٥٠ + ٢٥

= $(٧٥ + ١٥\sqrt{٥})$ سم

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{ب ء}$ ينصف ∠أ ب حـ

∴ $\frac{أ ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{ب حـ}$ ∴ $\frac{٤}{س} = \frac{٦}{س + ٢}$

∴ ٦ س = ٤ س + ١٢

∴ ٢ س = ١٢ ∴ س = ٦

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٦ + ٩ + ١٠ = ٢٥ سم

٥

(١) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤}{س}$

∴ س = $٥\frac{١}{٣}$

∴ $أء = \sqrt{ب أ \times أ حـ - ب ء \times ء حـ}$

$= \sqrt{٤ \times ٥\frac{١}{٣} - ٣ \times ٤} = \frac{٢\sqrt{٢١}}{٣}$ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{س}{٥}$

∴ س = ٧,٥

∴ $أء = \sqrt{ب أ \times أ حـ - ب ء \times ء حـ}$

$= \sqrt{٧,٥ \times ٥ - ٦ \times ٤} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٢}$ سم

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{٧}{٦} = \frac{٩}{س}$

∴ س = $٧\frac{٥}{٧}$

∴ $أء = \sqrt{ب أ \times أ حـ - ب ء \times ء حـ}$

$= \sqrt{٩ \times ٧\frac{٥}{٧} - ٧ \times ٦} = \frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}$ سم

٦

(١) ∵ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠حـ أ ء

∴ $\frac{ب هـ}{حـ هـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ ∴ $\frac{١٦}{١٢} = \frac{س + ٥}{٩}$

∴ س + ٥ = ١٢ ∴ س = ٧

∴ $أ هـ = \sqrt{ب هـ \times هـ حـ - ب أ \times أ حـ}$

$= \sqrt{١٦ \times ١٢ - ١٢ \times ٩} = ٢\sqrt{٢١}$ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ ، $\overline{أء} \perp \overline{أهـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠حـ أ و

∴ $\frac{ب هـ}{حـ هـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ ∴ $\frac{س + ١٠}{س + ١} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

∴ ٢ س + ٢ = س + ١٠

∴ س = ٨

∴ $أ هـ = \sqrt{ب هـ \times حـ هـ - ب أ \times أ حـ}$

$= \sqrt{١٨ \times ٩ - ١٢ \times ٦} = ٣\sqrt{١٠}$ سم

٧

∵ $\overleftrightarrow{ب ء}$ ينصف ∠أ ب حـ

∴ $\frac{أ ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{ب حـ}$

∴ $\frac{٢,٤}{ء حـ} = \frac{٤}{٦}$ ∴ ء حـ = ٣,٦ سم

∴ أ حـ = ٢,٤ + ٣,٦ = ٦ سم (وهو المطلوب)

٨

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$

$= \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{ب ء + ء حـ}{ء حـ} = \frac{٤ + ٣}{٣}$

∴ $\frac{ب حـ}{ء حـ} = \frac{٧}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{ء حـ} = \frac{٧}{٣}$

∴ ء حـ = ٣ سم

، ب ء = ٧ − ٣ = ٤ سم (وهو المطلوب)

٩

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ من الخارج ∴ $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ء ب}{ء حـ}$

∴ $\frac{٦}{٨} = \frac{ء ب}{ء حـ}$ ∴ $\frac{٦}{٨ - ٦} = \frac{ء ب}{ء حـ - ء ب}$

∴ $\frac{٦}{٢} = \frac{ء ب}{٥}$ ∴ ء ب = $\frac{٥ \times ٦}{٢}$ = ١٥ سم

∴ $أء = \sqrt{حـ ء \times ء ب - أ حـ \times أ ب}$

$= \sqrt{٢٠ \times ١٥ - ٨ \times ٦} = ٦\sqrt{٧}$ سم

(وهو المطلوب)

١٠

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ هـ

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$

∴ $\frac{ب ء}{٤ + ب ء} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ب ء = ٤ + ب ء

∴ ب ء = ٤ سم ∴ حـ ء = ٨ سم

∴ $أء = \sqrt{حـ ء \times ء ب - حـ أ \times أ ب}$

$= \sqrt{٨ \times ٤ - ٦ \times ٣} = \sqrt{١٤}$ سم (وهو المطلوب)



١١

∵ بد ينصف ∠ب

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{أب} + \text{بجـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{٤} + \text{٥}}{\text{٥}}$

، ∵ محيط المثلث = ٢٧ سم ، أجـ = ٩ سم

∴ أب + بجـ = ٢٧ − ٩ = ١٨ سم

∴ $\frac{\text{١٨}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{٩}}{\text{٥}}$ ∴ بجـ = ١٠ سم

∴ أب = ٨ سم

∴ $\text{بد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{بجـ} - \text{أد} \times \text{دجـ}}$

$= \sqrt{\text{١٠} \times \text{٨} - \text{٤} \times \text{٥}} = \text{٢}\sqrt{\text{١٥}}$ سم

(وهو المطلوب)

١٢

∵ أس ينصف ∠بأد ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$

، ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{سب}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ (وهو المطلوب)

١٣

∵ دس ينصف ∠أدجـ

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{٩}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}}$

∴ $\overline{\text{هـس}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ (وهو المطلوب)

١٤

∵ أد ينصف ∠بأجـ ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

، ∵ $\overline{\text{هـد}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـأ}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـأ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{٦} - \text{بهـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{٩}}$ ∴ ٩ بهـ = ٣٦ − ٦ بهـ

∴ ١٥ بهـ = ٣٦

∴ بهـ = ٢,٤ سم ، أهـ = ٦ − ٢,٤ = ٣,٦ سم

(المطلوب ثانياً)

١٥

∵ دس ينصف ∠أدب ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أد}}{\text{دب}}$ (١)

، ∵ دص ينصف ∠أدجـ ∴ $\frac{\text{أص}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ دب = دجـ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ (وهو المطلوب)

١٦

∵ أس ينصف ∠بأجـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بس}}{\text{سجـ}}$ (١)

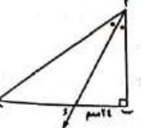
، ∵ أص ينصف ∠دأجـ ∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) :

، ∵ أب = أد ∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بد}}$ (وهو المطلوب)

١٧



∵ أد ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{٢٤}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

∴ دجـ = ٤٠ سم

∴ بجـ = ٤٠ + ٢٤ = ٦٤ سم

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ ∴ أب = ٣م ، أجـ = ٥م

من فيثاغورس : ∴ بجـ = ٤ م

∴ ٤ م = ٦٤ ∴ م = ١٦

بالتعويض : ∴ أب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم

، أجـ = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم

∴ محيط △أبجـ = ٨٠ + ٤٨ + ٦٤ = ١٩٢ سم

(وهو المطلوب)

١٨

∵ أهـ ينصف ∠جـأو

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

∴ $\frac{\text{جـهـ} + \text{٦}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{٨}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}}$

∴ ٢ جـهـ = جـهـ + ٦ ∴ جـهـ = ٦ سم

، ∵ أد ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بد}}{\text{دجـ}}$ ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{٨}}{\text{٤}}$

∴ $\frac{\text{بد} + \text{دجـ}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{٨} + \text{٤}}{\text{٤}}$ ∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٤}}$

∴ $\frac{\text{٦}}{\text{دجـ}} = \text{٣}$ ∴ دجـ = ٢ سم

∴ دهـ = جـهـ + جـد = ٦ + ٢ = ٨ سم

∴ بد = ٦ − ٢ = ٤ سم

∴ $\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{بد} \times \text{دجـ}}$

$= \sqrt{\text{٨} \times \text{٤} - \text{٤} \times \text{٢}} = \text{٢}\sqrt{\text{٦}}$ سم

، $\text{أهـ} = \sqrt{\text{بهـ} \times \text{جـهـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$

$= \sqrt{\text{١٢} \times \text{٦} - \text{٨} \times \text{٤}} = \text{٢}\sqrt{\text{١٠}}$ سم (وهو المطلوب)

١٩

∵ أهـ ينصف ∠بأو

∴ $\frac{\text{جـهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{٦}}{\text{٣}} = \text{٢}$

∴ جـهـ = ٢ هـب ∴ جـب = بهـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{جـهـ}}$

∴ $\overline{\text{أب}}$ متوسط في △أجـهـ (المطلوب أولاً)

∵ أد ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ بد = $\frac{\text{٧}}{\text{٣}}$ سم ، دجـ = $\frac{\text{١٤}}{\text{٣}}$ سم ، بهـ = ٧ سم

∴ هـد = $\frac{\text{٧}}{\text{٣}}$ + ٧ = $\frac{\text{٢٨}}{\text{٣}}$ سم ، هـجـ = ١٤ سم

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أدهـ})}{\text{م}(\triangle \text{أجـهـ})} = \frac{\text{دهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\frac{\text{٢٨}}{\text{٣}}}{\text{١٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

(لأن لهما نفس الارتفاع) (المطلوب ثانياً)

٢٠

(١) ∵ جـهـ ينصف ∠أجـب

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

، ∵ $\frac{\text{جـو}}{\text{أو}} = \frac{\text{٤}}{\text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جـو}}{\text{أو}}$

∴ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ (وهو المطلوب)

(٢) في △أبد :

∵ بهـ ينصف ∠أبد

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـد}} = \frac{\text{أب}}{\text{بد}}$ (١)

في △أدجـ : ∵ دو ينصف ∠أدجـ

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}}$ (٢)

، ∵ أب = أد ، بد = دجـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـد}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$

في △أدجـ : ∴ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$

∴ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ (وهو المطلوب)

٢١

∵ أهـ ينصف ∠دأجـ

∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$

، ∵ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{أد}}$ ∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$



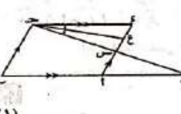


∴ $\frac{أء}{أج} = \frac{أو}{وج}$

، ∵ أج = ءب ∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أو}{وج}$

∴ $\overline{ءو} // \overline{بج}$ (وهو المطلوب)

٢٢



∵ $\overline{أس} // \overline{بج}$

∴ $\frac{أص}{أب} = \frac{سص}{سج}$

∴ $\frac{أص}{سص} = \frac{أب}{سج}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{جع}$ ينصف ∠ءجس

∴ $\frac{ءع}{عس} = \frac{ءج}{جس}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، ∵ أب = ءج

∴ $\frac{أص}{سص} = \frac{ءع}{عس}$ (وهو المطلوب)

٢٣

∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠بأء

∴ $\frac{بهـ}{هـء} = \frac{بأ}{أء}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{أو}$ ينصف ∠جأء

∴ $\frac{ءو}{وج} = \frac{ءأ}{أج}$ (٢)

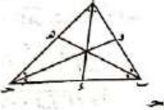
بضرب (١) في (٢) :

∴ $\frac{بهـ}{هـء} \times \frac{ءو}{وج} = \frac{بأ}{أء} \times \frac{ءأ}{أج} = \frac{بأ}{أج}$

، ∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠بأج ∴ $\frac{بأ}{أج} = \frac{بء}{ءج}$

∴ $\frac{بهـ}{هـء} \times \frac{ءو}{وج} = \frac{بء}{ءج}$ (وهو المطلوب)

٢٤



∵ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠بأج

∴ $\frac{بء}{ءج} = \frac{بأ}{أج}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{بهـ}$ ينصف ∠أبج

∴ $\frac{جهـ}{هـأ} = \frac{جب}{بأ}$ (٢)

، ∵ $\overrightarrow{جو}$ ينصف ∠أجب ∴ $\frac{أو}{وب} = \frac{أج}{جب}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) بالضرب :

∴ $\frac{بء}{ءج} \times \frac{جهـ}{هـأ} \times \frac{أو}{وب} = \frac{بأ}{أج} \times \frac{جب}{بأ} \times \frac{أج}{جب} = ١$

(وهو المطلوب)

٢٥

(١) (ج) (٢) (أ) (٣) (ج)

(٤) (ج) (٥) (ب) (٦) (ب)

(٧) (ج) (٨) (د) (٩) (ج)

٢٦

∵ $\overline{سص} // \overline{بج}$ ∴ $\frac{أس}{سب} = \frac{أص}{صج}$

∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{أص}{٣}$

∴ أص = ١,٥ سم (المطلوب أولاً)

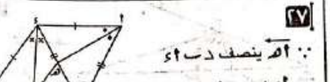
، ∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ

∴ $\frac{أب}{أج} = \frac{بهـ}{هـج}$ ∴ $\frac{٦}{٤,٥} = \frac{بهـ}{١٨}$

∴ بهـ = ٢٤ سم

∴ بج = ٢٤ − ١٨ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

٢٧



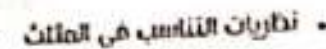
∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠بأء

∴ $\frac{أب}{أء} = \frac{بهـ}{هـء}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{ءو}$ ينصف ∠بءج ∴ $\frac{ءب}{ءج} = \frac{بو}{وج}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ، ∵ أب = بء ، أء = ءج

∴ $\frac{بهـ}{هـء} = \frac{بو}{وج}$ ∴ $\overline{هـو} // \overline{ءج}$ (وهو المطلوب)



٢٨

∵ $\overline{ءهـ} // \overline{بج}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أج}$ قاطعان لهما

∴ $\frac{أء}{أهـ} = \frac{ءب}{هـج} = \frac{أب}{أج}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{أس}$ ينصف ∠أ ∴ $\frac{أء}{أهـ} = \frac{ءس}{سهـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ءس}{سهـ} = \frac{ءب}{هـج}$ (المطلوب أولاً)

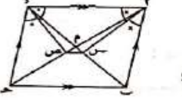
، ∵ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{ءس}{هـس}$

(لأن لهما نفس الارتفاع)

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{أء}{أهـ}$ ، من (١)

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{أب}{أج}$ (المطلوب ثانيًا)

٢٩



في Δ أبء :

∵ $\overrightarrow{أس}$ ينصف ∠بأء

∴ $\frac{بس}{سء} = \frac{بأ}{أء}$ (١)

، في Δ أجء : ∵ $\overrightarrow{ءص}$ ينصف ∠أءج

∴ $\frac{جص}{صأ} = \frac{جء}{أء}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، ∵ جء = بأ

∴ $\frac{بس}{سء} = \frac{جص}{صأ}$

∴ $\overline{بج} // \overline{سص} // \overline{أء}$ (وهو المطلوب)

٣٠



∵ هـ منتصف $\overset{\frown}{أب}$

∴ $\overrightarrow{ءهـ}$ ينصف ∠أءب

∴ $\frac{أج}{جب} = \frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\frac{م(\Delta أءج)}{م(\Delta بءج)} = \frac{م(\Delta أهـج)}{م(\Delta بهـج)} = \frac{أج}{جب}$

∴ $\frac{م(\Delta أءج) + م(\Delta أهـج)}{م(\Delta بءج) + م(\Delta بهـج)} = \frac{أج}{جب} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{م(\Delta أءهـ)}{م(\Delta بءهـ)} = \frac{٢}{٣}$ (وهو المطلوب)

٣١

العمل : نرسم $\overline{ءم}$

البرهان :

∵ $\overline{ءأ}$ ، $\overline{ءج}$ مماستان للدائرة

∴ $\overline{ءم}$ ينصف ∠أءهـ ∴ $\frac{أم}{مهـ} = \frac{أء}{ءهـ}$

، ∵ أء = ءج (نظرية) ∴ $\frac{أم}{مهـ} = \frac{ءج}{ءهـ}$ (وهو المطلوب)

٣٢

∵ ق(∠١) = ق(∠٢)

(مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{أب}$)

، ق(∠٢) = ق(∠٣) (لأن أب = أج)

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) ∴ $\overrightarrow{بأ}$ ينصف ∠ءبج

∴ $\frac{ءأ}{أج} = \frac{ءب}{بج}$

، ∵ أب = أج ∴ $\frac{ءأ}{أب} = \frac{ءب}{بج}$

∴ ءب × أب = ءأ × بج (وهو المطلوب)

٣٣

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (ج) (٤) (ب)

(٥) (أ) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ج)

(٩) (ج) (١٠) (أ) (١١) (ج) (١٢) (د)

(١٣) (أ) (١٤) (أ) (١٥) (د) (١٦) (ب)



إرشادات لحل رقم [١٣٢]

(١) في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{٦}{\text{أحـ}} = \frac{٣}{\text{ءحـ}}$

$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{ءحـ}} = \frac{٦}{٣} = ٢$

في $\triangle$ أ حـ ء : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{حـهـ}}$ ينصف $\angle$ أ حـ ء

$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{حـء}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{٢}{١} = ٢$

(٢) في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$ ينصف $\angle$ أ ب حـ

$\therefore \frac{\text{بأ}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءحـ}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{٣}{\text{بحـ}} = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ ب حـ $= ٦$ سم

، في $\triangle$ أ ب حـ : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـحـ}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{٣}{٦} = \frac{\text{بهـ}}{\text{بهـ} + ٦}$

$\therefore \frac{\text{بهـ}}{\text{بهـ} + ٦} = \frac{١}{٢}$ $\quad\quad$ $\therefore ٢ \,\text{بهـ} = \text{بهـ} + ٦$

$\therefore$ ب هـ $= ٦$ سم

(٣) في $\triangle$ أ ء حـ : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ينصف $\angle$ أ ء حـ

$\therefore \frac{\text{حـء}}{\text{أء}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{هـأ}} = \frac{٣}{٤}$ $\quad$ (١)

، في $\triangle$ أ ء ب : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف $\angle$ أ ء ب

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{أء}} = \frac{\text{بو}}{\text{وأ}} = \frac{٢}{٣}$ $\quad$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{بء}}{\text{أء}} + \frac{\text{حـء}}{\text{أء}} = \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{\text{بء} + \text{ءحـ}}{\text{أء}} = \frac{١٧}{١٢}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{١٧}{\text{أء}} = \frac{١٧}{١٢}$

$\therefore$ أ ء $= ١٢$ سم

، من (١) : $\frac{\text{حـء}}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ $\quad$ $\therefore$ حـ ء $= ٩$ سم

(٤) في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ ق ($\angle$ ء أ ب) = ق ($\angle$ ء أ حـ)

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ حـ أ ب

$\therefore \frac{\text{ءحـ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}}$

$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$ $\quad$ (١)

، $\because$ ق ($\angle$ ب) = ٢ ق ($\angle$ ء أ ب) = ٢ ق ($\angle$ ء أ حـ)

$\therefore$ ق ($\angle$ ب) = ق ($\angle$ حـ أ ب)

$\therefore$ حـ أ = حـ ب = ١٢ سم

، من (١) : $\therefore \frac{١٢}{\text{أب}} = \frac{٢}{١}$ $\therefore$ أ ب $= ٦$ سم

(٥) ب ء $= \sqrt{(٣-١)^٢ + (٣-١)^٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ء حـ $= \sqrt{(١-٠)^٢ + (١-٠)^٢} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

في $\triangle$ أ ب حـ : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ

$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{ءب}}$

$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٦) في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ $\quad$ (١)

إذا كان : أ حـ − أ ب = ٥

$\therefore$ أ حـ = أ ب + ٥

من (١) : $\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أب} + ٥} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ ٥ أ ب = ٤ أ ب + ٢٠

$\therefore$ أ ب = ٢٠ سم

، إذا كان محيط $\triangle$ أ ب حـ = ٥٤ سم

$\therefore$ أ ب + أ حـ + ب حـ = ٥٤

$\therefore$ أ ب + أ حـ + ١٨ = ٥٤

$\therefore$ أ حـ = ٣٦ − أ ب

، من (١) : $\therefore \frac{\text{أب}}{٣٦ - \text{أب}} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ ٥ أ ب = ١٤٤ − ٤ أ ب

$\therefore$ ٩ أ ب = ١٤٤ $\quad$ $\therefore$ أ ب = ١٦ سم

، إذا كان أ ء $= ٤\sqrt{١٥}$ سم

$\therefore (\text{أء})^٢$ = أ ب × أ حـ − ب ء × ء حـ

$\therefore \left(٤\sqrt{١٥}\right)^٢$ = أ ب × أ حـ − ٨ × ١٠

$\therefore$ أ ب × أ حـ = ٣٢٠

، من (١) : (أ ب × أ حـ) × $\left(\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}\right) = \frac{٤}{٥} \times ٣٢٠$

$\therefore (\text{أب})^٢ = ٢٥٦$ $\quad$ $\therefore$ أ ب = ١٦ سم

$\therefore$ الإجابة هي جميع ما سبق.

(٧) في $\triangle\triangle$ أ ب ء ، أ ء حـ :

$\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ على استقامة واحدة ، مشتركان في الرأس أ

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{أبء})}{\text{م}(\triangle \text{أءحـ})} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ} + \text{بء}} = \frac{٣}{٥ + ٣} = \frac{٣}{٨}$

$\therefore \frac{\text{بء}}{٨} = \frac{٣}{٨}$ $\quad\quad$ $\therefore$ ب ء $= ٣$ سم

$\therefore$ ء حـ $= ٨ - ٣ = ٥$ سم

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{ءحـ}} = \frac{٣}{٥}$

نفرض أن : أ ب = ٣ س ، أ حـ = ٥ س

$\because$ $\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

$\therefore (\text{بحـ})^٢ = (\text{أحـ})^٢ - (\text{أب})^٢$

$\therefore (\text{بحـ})^٢ = (٥\,\text{س})^٢ - (٣\,\text{س})^٢$

$\therefore (٨)^٢ = ٢٥\,\text{س}^٢ - ٩\,\text{س}^٢$

$\therefore ١٦\,\text{س}^٢ = ٦٤$ $\quad\quad$ $\therefore \text{س}^٢ = ٤$

$\therefore$ س $= ٢$ $\quad\quad$ $\therefore$ أ ب $= ٣ \times ٢ = ٦$ سم

(٨) في $\triangle$ ء ب حـ : $\because$ $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف $\angle$ ب ء حـ

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

في $\triangle\triangle$ ب ء و ، و ء حـ :

$\overline{\text{بو}}$ ، $\overline{\text{وحـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس ء

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{بءو})}{\text{م}(\triangle \text{وءحـ})} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١٠}{\text{م}(\triangle \text{وءحـ})} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ م ($\triangle$ و ء حـ) $= ٢٠$ سم^٢

$\therefore$ م ($\triangle$ حـ ء ب) $= ٢٠ + ١٠ = ٣٠$ سم^٢

في $\triangle\triangle$ حـ ء ب ، حـ ء أ :

$\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{ءأ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس حـ

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{حـءب})}{\text{م}(\triangle \text{حـءأ})} = \frac{\text{بء}}{\text{أء}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٣٠}{\text{م}(\triangle \text{حـءأ})} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ م ($\triangle$ حـ ء أ) $= ٤٥$ سم^٢

في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{أب}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{أحـ}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{\text{حـهـ}}{\text{أحـ}} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

في $\triangle\triangle$ ء هـ حـ ، ء أ حـ

$\because$ $\overline{\text{هـحـ}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس ء

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ءهـحـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءأحـ})} = \frac{\text{هـحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{٢}{٥}$

$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{ءهـحـ})}{٤٥} = \frac{٢}{٥}$

$\therefore$ م ($\triangle$ ء هـ حـ) $= ١٨$ سم^٢

(٩) $\because$ ق ($\overset{\frown}{\text{بس}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{سص}}$)

$\therefore$ ق ($\angle$ ب حـ س) = ق ($\angle$ س حـ ص)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{حـء}}$ ينصف $\angle$ ب حـ أ

$\therefore \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{أء}}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٤\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن : ب حـ = س ، حـ أ = ٢ س

في $\triangle$ أ ب حـ : $\because$ ق ($\angle$ أ ب حـ) $= ٩٠^\circ$

$\therefore (\text{أحـ})^٢ - (\text{بحـ})^٢ = (\text{أب})^٢$

$\therefore (٢\,\text{س})^٢ - (\text{س})^٢ = \left(٦\sqrt{٣}\right)^٢$

$\therefore ٣\,\text{س}^٢ = ١٠٨$ $\quad\quad$ $\therefore \text{س}^٢ = ٣٦$

$\therefore$ س $= ٦$

$\therefore$ ب حـ = ٦ سم ، حـ أ = ١٢ سم

، $\because$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م

$\therefore (\text{أب})^٢$ = أ ص × أ حـ

$\therefore \left(٦\sqrt{٣}\right)^٢$ = أ ص × ١٢

$\therefore$ أ ص = ٩ سم



(١٠) فى Δ أب حـ : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{٤}{٥}$

نفرض أن : أب = ٤ س ، أحـ = ٥ س

، ∵ $(\text{أء})^{٢}$ = أب × أحـ − ب ء × ء حـ

∴ $(٤\sqrt{١٠})^{٢}$ = (٤ س) (٥ س) − ٤ × ٥

∴ ٢٠ $\text{س}^{٢}$ − ٢٠ = ١٦٠

∴ $\text{س}^{٢}$ = ٩ ∴ س = ٣

∴ أب = ٤ × ٣ = ١٢ سم

، أحـ = ٥ × ٣ = ١٥ سم

، محيط Δ أب حـ = ١٢ + ١٥ + ٩ = ٣٦ سم

(١١) فى Δ أب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠حـ أب

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٤}{٩}$

فى ΔΔ أ ء ب ، أ حـ ب :

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء ب})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ حـ ب})} = \frac{\text{ء ب}}{\text{حـ ب}} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء ب})}{٧٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ م (Δ أ ء ب) = ٣٢ $\text{سم}^{٢}$

(١٢) فى Δ أب حـ : ∵ ق (∠ب أحـ) = ٩٠°

∴ ب حـ = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$ = ١٠ سم

، م (Δ أب حـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ $\text{سم}^{٢}$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أب حـ عند الرأس أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

فى ΔΔ أب ء ، أحـ ء :

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أب ء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أحـ ء})} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أب ء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أب ء}) + ٢٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٤ م (Δ أب ء) = ٣ م (Δ أب ء) + ٧٢

∴ م (Δ أب ء) = ٧٢ $\text{سم}^{٢}$

(١٣) نفرض أن : هـ ء = ء حـ = س

فى Δ ء أب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ينصف ∠ء أحـ

∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{حـ ب}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ حـ ب = ٢ س

، ∵ $(\text{أحـ})^{٢}$ = أء × أب − حـ ء × حـ ب

∴ $(\sqrt{٦})^{٢}$ = ٣ × ٦ − س × ٢ س

∴ ٢ $\text{س}^{٢}$ = ١٨ − ٦ = ١٢

∴ $\text{س}^{٢}$ = ٦ ∴ س = $\sqrt{٦}$

∴ ء هـ = حـ ء = $\sqrt{٦}$

، ∵ ء أ × ء و = ء هـ × ء حـ

∴ ٣ × ء و = $\sqrt{٦} \times \sqrt{٦}$

∴ ء و = ٢ سم

(١٤) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ب أحـ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أب حـ عند الرأس أ

∴ ق (∠هـ أء) = ٩٠°

∵ ظا θ = − ظا (١٨٠° − θ) = − ظا (∠أهـ ء)

= − $\frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{-٨}{٦} = \frac{-٤}{٣}$

(١٥) فى Δ أب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{١}{٣}$ (١)

، فى Δ أب هـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ب أهـ

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$

، ∵ $\overline{\text{س و}}$ // $\overline{\text{هـ حـ}}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و حـ}} = \frac{٢}{١}$

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}} - \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{ء و}}{\text{ب حـ}} = \frac{١}{٣}$

(١٦) نرسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء

، ∵ ق (∠أ)

= ٢ ق (∠ب)

∴ ق (∠ب) = ق (∠ب أء)

∴ ب ء = ء أ

نفرض أن : ب ء = ء أ = س

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ء حـ}} = \frac{٨}{٦}$

∴ ء حـ = $\frac{٣}{٤}$ س

، ∵ $(\text{أء})^{٢}$ = أب × أحـ − ب ء × ء حـ

∴ $(\text{س})^{٢}$ = ٨ × ٦ − س × $\frac{٣}{٤}$ س

∴ $\text{س}^{٢}$ = ٤٨ − $\frac{٣}{٤}$ $\text{س}^{٢}$

∴ $\frac{٧}{٤}$ $\text{س}^{٢}$ = ٤٨ ∴ $\text{س}^{٢}$ = $\frac{١٩٢}{٧}$

∴ س = $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}$

، ∵ ب حـ = ب ء + ء حـ

= $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧} + \frac{٣}{٤}\left(\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}\right)$

= $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧} + \frac{٦\sqrt{٢١}}{٧}$ = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم

٣٤

∵ أب > أحـ ، ∴ ب ء > ء حـ

وواضح أن : ب ء = ب هـ + هـ ء (١)

، حـ ء = حـ هـ − هـ ء (٢)

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، بطرح (١) ، (٢) : ∴ ب ء − حـ ء = ٢ هـ ء

ويجمع (١) ، (٢) : ب ء + ء حـ = ب حـ = ٢ حـ هـ

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{ب ء} + \text{ء حـ}} = \frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{\text{ب ء} - \text{ء حـ}}$

∴ $\frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{٢\,\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{٢\,\text{هـ ء}}$

∴ $\frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{هـ حـ}}$ (وهو المطلوب)

٣٥

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ ق (∠١) = ق (∠٢)

، ∵ $\overline{\text{أحـ}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$

∴ ق (∠١) = ق (∠٣) بالتبادل

∴ ق (∠٢) = ق (∠٣) ∴ أهـ = ء هـ

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الداخل ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{ب ء} + \text{ء حـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ = $\frac{\text{ء حـ}(\text{أب} + \text{أحـ})}{\text{أحـ}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أحـ}}$

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ب حـ}}$ ∴ أهـ = $\frac{\text{أب} \times \text{حـ ء}}{\text{ب حـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أهـ = $\frac{\text{أب} \times \text{حـ ء} \times \text{أحـ}}{\text{ء حـ}(\text{أب} + \text{أحـ})}$

∴ أهـ = $\frac{\text{أب} \times \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}}$

∴ ء هـ = $\frac{\text{أب} \times \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}}$ (وهو المطلوب)



٣٦

العمل: نرسم جـ أ فيكون

ق(∠ هـ أ ب) = ٥٥°

∴ أ ب ينصف ∠ هـ أ د

∴ أ د/أ جـ = ب د/ب جـ

∴ أ د × ب جـ = أ جـ × ب د = ٣٦ سم²

∴ مساحة △ أ ب جـ = ١/٢ ب جـ × أ د

= ١/٢ × ٣٦ = ١٨ سم²

(وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 8

١

∵ أ ب/أ جـ = ٦/٩ = ٢/٣

، ب د/د جـ = ٤,٢/(١٠,٥ − ٤,٢) = ٢/٣

∴ أ ب/أ جـ = ب د/د جـ

∴ أ د ينصف ∠ ب أ جـ (وهو المطلوب)

٢

∵ ب أ/أ جـ = ٦/٣,٦ = ٥/٣

، ب د/د جـ = (٦ + ٤)/٦ = ٥/٣

∴ ب د/د جـ = ب أ/أ جـ

∴ أ د ينصف ∠ جـ أ هـ (وهو المطلوب)

٣

(١) ∵ د هـ ينصف ∠ أ د جـ في △ أ د جـ:

∴ جـ هـ/أ هـ = جـ د/أ د = ٢٨/٤٢ = ٢/٣

، ∵ ب جـ/أ ب = ٣٦/٥٤ = ٢/٣

∴ جـ هـ/أ هـ = ب جـ/أ ب

∴ ب هـ ينصف ∠ أ ب جـ في △ أ ب جـ

(وهو المطلوب)

(٢) ∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

∴ (ب جـ)² = (أ ب)² + (أ جـ)²

= (٣٠)² + (٤٠)² = ٢٥٠٠

∴ ب جـ = ٥٠ سم

، ∵ أ د ⊥ ب جـ

∴ أ د = (أ ب × أ جـ)/ب جـ (نظرية إقليدس)

∴ أ د = ٢٤ سم

∴ أ هـ = ٢٤ − ٩ = ١٥ سم

، ∵ △ أ ب جـ ~ △ د ب أ

∴ أ ب/د ب = ب جـ/ب أ ∴ ٣٠/د ب = ٥٠/٣٠

∴ د ب = ١٨ سم ∴ د ب/ب أ = ١٨/٣٠ = ٣/٥

، د هـ/أ هـ = ٩/١٥ = ٣/٥ ∴ د ب/ب أ = د هـ/أ هـ

∴ ب هـ ينصف ∠ أ ب جـ (وهو المطلوب)

٤

∵ أ هـ ينصف ∠ د أ ب

∴ ب أ/أ د = ب هـ/هـ د

∴ ب هـ/هـ د = ٦/٤ = ٣/٢

(المطلوب أولاً)

، ∵ ب جـ/جـ د = ٩/٦ = ٣/٢ ∴ ب هـ/هـ د = ب جـ/جـ د

∴ جـ هـ ينصف ∠ ب جـ د (المطلوب ثانياً)

٥

في △ أ جـ د:

∵ ٢ أ هـ = ٣ هـ د

∴ أ هـ/هـ د = ٣/٢

، ∵ هـ و // د جـ ∴ أ و/و جـ = أ هـ/هـ د = ٣/٢

، ∵ أ ب/ب جـ = ١٨/١٢ = ٣/٢

∴ أ و/و جـ = أ ب/ب جـ

∴ ب و ينصف ∠ أ ب جـ في △ أ ب جـ

(وهو المطلوب)

٦

∵ د هـ ينصف ∠ أ د ب ∴ أ د/د ب = أ هـ/هـ ب (١)

، ∵ هـ و // ب جـ ∴ أ هـ/هـ ب = أ و/و جـ (٢)

من (١)، (٢):

، ∵ ب د = د جـ ∴ أ د/د جـ = أ و/و جـ

∴ د و ينصف ∠ أ د جـ (المطلوب أولاً)

، ∵ د هـ ينصف ∠ أ د ب ، د و ينصف ∠ أ د جـ

، د ∈ ب جـ ∴ هـ د ⊥ د و (المطلوب ثانياً)

٧

∵ س د ينصف ∠ أ س ب

∴ أ د/د ب = أ س/س ب = ٩/٦ = ٣/٢

(المطلوب أولاً)

، ∵ أ هـ/هـ جـ = ٦/٤ = ٣/٢ ∴ أ د/د ب = أ هـ/هـ جـ

∴ د هـ // ب جـ (المطلوب ثانياً)

، ∵ أ س/س ب = ٣/٢ ، س ب = س جـ

∴ أ س/س جـ = ٣/٢

، ∵ أ هـ/هـ جـ = ٣/٢ ∴ أ س/س جـ = أ هـ/هـ جـ

∴ س هـ ينصف ∠ أ س جـ (المطلوب ثالثاً)

٨

∵ ب س ينصف ∠ أ ب جـ ∴ أ ب/ب جـ = أ س/س جـ

، ∵ س ص // جـ د ∴ أ س/س جـ = أ ص/ص د

∴ أ ب/ب جـ = أ ص/ص د

، ∵ أ ب = أ جـ ، ب جـ = جـ د ∴ أ جـ/جـ د = أ ص/ص د

∴ جـ ص ينصف ∠ أ جـ د (وهو المطلوب)

٩

∵ أ هـ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ أ جـ/أ ب = جـ هـ/هـ ب

، ∵ هـ و // ب د ∴ جـ هـ/هـ ب = جـ و/و د

∴ أ جـ/أ ب = جـ و/و د

، ∵ أ ب = أ د ∴ أ جـ/أ د = جـ و/و د

∴ أ و ينصف ∠ جـ أ د (وهو المطلوب)

١٠

في △ أ ب د:

∵ جـ هـ // أ د

∴ ب جـ/جـ د = ب هـ/هـ أ (١)

في △ أ ب جـ:

∵ هـ و // ب جـ

∴ جـ و/و أ = ب هـ/هـ أ (٢)

من (١)، (٢): ∴ ب جـ/جـ د = جـ و/و أ

، ∵ أ ب = جـ د ∴ ب جـ/ب أ = جـ و/و أ

∴ ب و ينصف ∠ أ ب جـ في △ أ ب جـ (وهو المطلوب)

١١

∵ ب م ينصف ∠ ب ∴ ب د/ب جـ = م د/م جـ (١)

، ∵ أ م ينصف ∠ أ ∴ أ د/أ جـ = م د/م جـ (٢)

من (١)، (٢): ∴ ب د/ب جـ = أ د/أ جـ = ب أ/(ب جـ + أ جـ)

∴ ب د/١٦ = أ د/٨ = ١٢/٢٤ ∴ أ د = ٤ سم (وهو المطلوب)



١٢

∵ $\overrightarrow{\text{ع م}}$ ينصف ∠ س ع ل

، ∵ $\overrightarrow{\text{ص م}}$ ينصف ∠ س ص ل

∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا المثلث الداخلة

∴ $\overrightarrow{\text{س م}}$ ينصف ∠ ع س ص ∴ $\frac{\text{ع ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ص}}$

∴ $\frac{\text{ع ل}}{\text{ص ل}} = \frac{5}{8}$ ∴ ٨ ع ل = ٥ ص ل

(وهو المطلوب)

١٣

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ ، $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

(وهو المطلوب)

١٤

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{10}{5} = 2$

، $\frac{\text{جـ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{6}{3} = 2$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ (المطلوب أولاً)

∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ جـ أ ب ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ و أ ب ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{5}{10} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{٩ + ب هـ}}$ ∴ ٤٥ + ٥ ب هـ = ١٠ ب هـ

∴ ب هـ = ٩ سم (المطلوب ثانيًا)

١٥

فى △ أ ب ء :

∵ $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ء ب س ∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}}$

، فى △ أ جـ ء :

∵ $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ ء جـ ص ∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ أ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ جـ (وهو المطلوب)

١٦

∵ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{9} = \frac{2}{6}$ ∴ أ هـ = ٣ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{1}{2}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب جـ (المطلوب ثانيًا)

١٧

∵ $\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{هـ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{جـ ص}}$ (١)

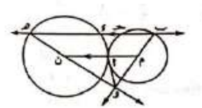
، ∵ أ ء × ب س = أ جـ × هـ س

∴ $\frac{\text{هـ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{جـ ص}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ص}}$ ينصف ∠ جـ أ ء (وهو المطلوب)

١٨



فى △ ب و هـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} // \overline{\text{ب هـ}}$

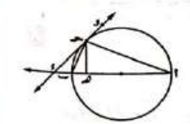
∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{م و}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{و ن}}$

، ∵ ب م = م أ ، هـ ن = أ ن

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{و ن}}$ ∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{م و}}{\text{و ن}}$

∴ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ينصف ∠ م و ن (وهو المطلوب)

١٩



∵ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ هـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ينصف ∠ ء جـ هـ (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠° ∴ $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ينصف ∠ و جـ هـ

(منصفا الزاوية متعامدان) (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ هـ}}$

، ∵ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

٢٠

فى △ أ ب جـ : ∵ جـ ء = ١٠ − ٤ = ٦ سم

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ (المطلوب أولاً)

فى △ أ ب و : ∵ $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ ، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب و}}$

من تطابق △△ أ هـ ب ، أ هـ و

∴ △ أ ب و متساوى الساقين

∴ أ ب = أ و = ٦ سم

∴ جـ و = ٩ − ٦ = ٣ سم

، ∵ △△ ب أ و ، ب جـ و مشتركان فى الرأس ب

، و ∈ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م(△ أ ب و)}}{\text{م(△ جـ ب و)}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و جـ}} = \frac{6}{3} = 2$ (المطلوب ثانيًا)

إرشادات تمارين 9

١ (١) ٦٣ (٢) −١٦١ (٣) صفر (٤) ١

٢

(١) ∵ $ق_م$(أ) = −٣٦ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة

، ∵ $ق_م$(أ) = (م أ)² − نق²

∴ −٣٦ = (م أ)² − ١٠٠

∴ (م أ)² = ٦٤ ∴ م أ = ٨ سم

(٢) ∵ $ق_م$(ب) = ٩٦ > ٠ ∴ ب تقع خارج الدائرة

، ∵ $ق_م$(ب) = (م ب)² − نق²

∴ ٩٦ = (م ب)² − ١٠٠

∴ (م ب)² = ١٩٦ ∴ م ب = ١٤ سم

(٣) $ق_م$(جـ) = ٠ ∴ جـ تقع على الدائرة

∴ م جـ = نق = ١٠ سم

٣

∵ $ق_م$(أ) = (م أ)² − نق² ∴ ٤٠٠ = ٦٢٥ − نق²

∴ نق² = ٢٢٥ ∴ نق = ١٥ سم (وهو المطلوب)

٤

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ مماسة للدائرة عند ء ∴ أ ء = $\sqrt{ق_م(أ)}$

∴ $ق_م$(أ) = (أ ء)² = (٨)² = ٦٤ (وهو المطلوب)

٥

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (جـ)

٦

∵ أ تقع خارج الدائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند ب

∴ أ ب = $\sqrt{ق_م(أ)}$ = $\sqrt{81}$ = ٩ سم (المطلوب أولاً)

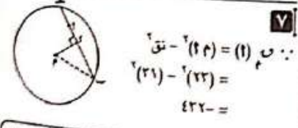
، ∵ $ق_م$(أ) = (م أ)² − نق²

∴ ٨١ = (م أ)² − ١٤٤

∴ (م أ)² = ٢٢٥ ∴ م أ = ١٥

∴ أ جـ = ١٥ − ١٢ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

٧



∵ $ق_م$(أ) = (م أ)² − نق²

= (٢٣)² − (٣١)²

= −٤٣٢



، ∵ ق$_{م}$ (أ) = − أب × أحـ
∴ −٤٣٢ = − أب × أحـ ∴ ٤٣٢ = أب × أحـ
، ∵ أب = ٣ أحـ
∴ ٤٣٢ = ٣ أحـ × أحـ ∴ (أحـ)^{2} = ١٤٤
∴ أحـ = ١٢ سم ∴ أب = ٣٦ سم
∴ بحـ = ٣٦ + ١٢ = ٤٨ سم (المطلوب أولًا)
بفرض أن بعد الوتر بحـ عن مركز الدائرة هو م ء
حيث : م ء ⊥ بحـ
∴ ء منتصف بحـ
، ∵ ق$_{م}$ (ء) = (م ء)^{2} − نق^{2} = − ب ء × ء حـ
∴ (م ء)^{2} − (٣١)^{2} = −٢٤ × ٢٤
∴ (م ء)^{2} = ٣٨٥
∴ م ء ≃ ١٩,٦ سم (المطلوب ثانيًا)

٨

∵ ق$_{ن}$ (ب) = (ن ب)^{2} − نق^{2}
= (١٢)^{2} − (٨)^{2}
= ٨٠
، ∵ ق$_{ن}$ (ب) = ب حـ × ب ء
∴ ٨٠ = ب حـ × ب ء
، ∵ ب حـ = حـ ء ∴ ٨٠ = حـ ء × ٢ حـ ء
∴ حـ ء = ٢ √١٠ سم (المطلوب أولًا)
بفرض أن بعد الوتر حـ ء عن مركز الدائرة هو ن هـ
حيث : ن هـ ⊥ حـ ء
∴ هـ منتصف حـ ء
، ∵ ق$_{ن}$ (هـ) = (هـ ن)^{2} − نق^{2} = − هـ حـ × هـ ء
∴ (هـ ن)^{2} − (٨)^{2} = − √١٠ × √١٠
∴ ن هـ = ٢ √٦ سم (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ ق$_{م}$ (حـ) = حـ ء × حـ أ = ١٦ × ٢٥ = ٤٠٠
، ∵ حـ تقع خارج الدائرة
، حـ ب مماسة للدائرة عند ب
∴ حـ ب = √ق$_{م}$ (حـ) = √٤٠٠ = ٢٠ سم
∴ (أب)^{2} = (أحـ)^{2} − (حـ ب)^{2} = (٢٥)^{2} − (٢٠)^{2}
= ٢٢٥
∴ أب = ١٥ سم
∴ أ م = نق = ٧,٥ سم (المطلوب أولًا)
، م (△ أب حـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٥ × ٢٠ = ١٥٠ سم^{2}
(المطلوب ثانيًا)

١٠

∵ أ تقع خارج الدائرة
، أحـ يمس الدائرة عند حـ
∴ أحـ = √ق$_{م}$ (أ) = √١٤٤
= ١٢ سم
، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ ء × أب ∴ ١٤٤ = ٨ × أب
∴ أب = ١٨ سم ∴ ء ب = ١٠ سم
، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ هـ × أ و
∴ ١٤٤ = أ هـ × (أ هـ + ١٨)
∴ ١٤٤ = (أ هـ)^{2} + ١٨ أ هـ
∴ (أ هـ)^{2} + ١٨ أ هـ − ١٤٤ = ٠
∴ (أ هـ + ٢٤) (أ هـ − ٦) = ٠
∴ أ هـ = ٦ سم (المطلوب أولًا)
∴ ق$_{م}$ (س) = − ء س × س ب = − ٤ × ٦ = −٢٤
(المطلوب ثانيًا)

١١

∵ أ تقع على الدائرة م
، أ تقع على الدائرة ن
∴ ق$_{م}$ (أ) = ق$_{ن}$ (أ) = ٠
، ∵ ب أ مماس للدائرة م عند أ
∴ ق$_{م}$ (ب) = (أب)^{2}

، ∵ أب مماس للدائرة ن عند أ
∴ ق$_{ن}$ (ب) = (أب)^{2} ∴ ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب)
∴ أب محور أساسي للدائرتين م ، ن (المطلوب أولًا)
∵ ق$_{م}$ (ب) = ب حـ × ب ء ∴ ٣٦ = ٤ × ب ء
∴ ب ء = ٩ سم ∴ حـ ء = ٥ سم
، ∵ أب مماس للدائرة م
∴ أب = √ق$_{م}$ (ب) = √٣٦ = ٦ سم
، ∵ ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب)
، ∵ ق$_{ن}$ (ب) = ب هـ × ب و
∴ ٣٦ = ب هـ × (٩ + ب هـ)
∴ ٣٦ = (ب هـ)^{2} + ٩ ب هـ
∴ (ب هـ)^{2} + ٩ ب هـ − ٣٦ = ٠
∴ (ب هـ + ١٢) (ب هـ − ٣) = ٠
∴ ب هـ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

١٢

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن
∴ ق$_{م}$ (أ) = ق$_{ن}$ (أ) = ٠
وبالمثل : ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب) = ٠
∴ أب محور أساسي للدائرتين م ، ن
، ∵ حـ ∈ أب
∴ حـ ب محور أساسي للدائرتين م ، ن
(المطلوب أولًا)
∵ ق$_{ن}$ (حـ) = حـ أ × حـ ب
∴ ٦٤ = حـ أ × (حـ أ + ١٢)
∴ ٦٤ = (حـ أ)^{2} + ١٢ حـ أ
∴ (حـ أ)^{2} + ١٢ حـ أ − ٦٤ = ٠
∴ (حـ أ + ١٦) (حـ أ − ٤) = ٠
∴ حـ أ = ٤ سم
، ∵ حـ ∈ المحور الأساسي للدائرتين
∴ ق$_{م}$ (حـ) = ق$_{ن}$ (حـ)
، حـ ء مماس للدائرة م عند ء
∴ حـ ء = √ق$_{م}$ (حـ) = √٦٤ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

١٣

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن
∴ ق$_{م}$ (أ) = ق$_{ن}$ (أ) = ٠
وبالمثل : ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب)
∴ أب محور أساسي للدائرتين م ، ن
(المطلوب أولًا)
، ∵ س ∈ أب ∴ ق$_{م}$ (س) = ق$_{ن}$ (س)
، ∵ ق$_{م}$ (س) = س ء × س حـ
، س ء = ٢ ء حـ ∴ ١٤٤ = ٢ ء حـ × ٣ ء حـ
∴ (ء حـ)^{2} = ٢٤ ∴ ء حـ = ٢ √٦ سم
∴ س حـ = ٦ √٦ سم
، ∵ ق$_{ن}$ (س) = س و × س هـ
∴ ١٤٤ = س و × (س و + ١٠)
∴ ١٤٤ = (س و)^{2} + ١٠ س و
∴ (س و)^{2} + ١٠ س و − ١٤٤ = ٠
∴ (س و + ١٨) (س و − ٨) = ٠
∴ س و = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)
∵ ق$_{م}$ (س) = ق$_{ن}$ (س)
∴ س ء × س حـ = س و × س هـ
∴ الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري (المطلوب ثالثًا)

١٤

(١) س = $\frac{1}{2}$ [١٠٠° + ٦٠°] = ٨٠°
(٢) س = $\frac{1}{2}$ [١٥٠° − ٧٠°] = ٤٠°
(٣) س = $\frac{1}{2}$ [٢٤٠° − ١٢٠°] = ٦٠°
(٤) ٢٨° = $\frac{1}{2}$ [س − ٣٠°]
∴ ٥٦° = س − ٣٠° ∴ س = ٨٦°
(٥) ٤٥° = $\frac{1}{2}$ [س − ٧٥°]
∴ ٩٠° = س − ٧٥° ∴ س = ١٦٥°

(٦) ٧٠° = $\frac{1}{2}$ [س − (٣٦٠° − س)]

∴ ١٤٠° = ٢ س − ٣٦٠° ∴ ٢ س = ٥٠٠°

∴ س = ٢٥٠°

(٧) ١١٠° = $\frac{1}{2}$ [٢ ع + ١٣٠°]

∴ ٢٢٠° = ٢ ع + ١٣٠° ∴ ٢ ع = ٩٠°

∴ ع = ٤٥°

(٨) ٩٠° = $\frac{1}{2}$ [٧ ص + ١١ ص]

∴ ١٨٠° = ١٨ ص ∴ ص = ١٠°

(٩) ٥٠° = $\frac{1}{2}$ [١٤٥° − (٢ س − ٥°)]

∴ ١٠٠° = ١٥٠° − ٢ س

∴ ٢ س = ٥٠° ∴ س = ٢٥°

(١٠) ٤٥° = $\frac{1}{2}$ [(٢ س + ١٠°) − (س − ٥°)]

∴ ٩٠° = س + ١٥° ∴ س = ٧٥°

(١١) (٣ س + ٥°) = ٣٦٠° − ١٣٠° = ٢٣٠°

∴ ٣ س = ٢٢٥° ∴ س = ٧٥°

، ع = $\frac{1}{2}$ [٢٣٠° − ١٣٠°] = ٥٠°

(١٢) ١٥° = $\frac{1}{2}$ [س − ٦٠°] ∴ ٣٠° = س − ٦٠°

∴ س = ٩٠°

∴ ص = ٣٦٠° − (١٤٠° + ٦٠° + ٩٠°) = ٧٠°

، ع = $\frac{1}{2}$ [١٤٠° − ٧٠°] = ٣٥°

(١٣) س = ١٨٠° − ص

، ٣٠° = $\frac{1}{2}$ [س − ص]

∴ ٦٠° = س − ص

∴ ٦٠° = ١٨٠° − ٢ ص ∴ ٢ ص = ١٢٠°

∴ ص = ٦٠° ∴ س = ١٢٠°

(١٤) ص = ٣٦٠° − ٢ س

، س = $\frac{1}{2}$ [(٣٦٠° − ٢ س) − ٢ س]

∴ ٢ س = ٣٦٠° − ٤ س

∴ ٦ س = ٣٦٠° ∴ س = ٦٠°

∴ ص = ٢٤٠°

(١٥) ∵ ق (∠ ا) = $\frac{1}{2}$ (٨ س − ٤ س)

، ق (∠ ا) = $\frac{1}{2}$ (٥ س − ٢٠°)

∴ ٨ س − ٤ س = ٥ س − ٢٠°

∴ س = ٢٠°

١٥

∵ ق (∠ ب ء حـ) = ٧٠°

∴ ق (∠ حـ ء س) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، ∵ ق (∠ حـ ء س) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒حـ س) + ق (⌒ا ب)]

∴ ١١٠° = $\frac{1}{2}$ [(١٠٠° + ق (⌒س ص)) + ٩٤°]

∴ ٢٢٠° = ١٠٠° + ق (⌒س ص) + ٩٤°

∴ ق (⌒س ص) = ٢٦° (المطلوب أولًا)

، ق (⌒ب حـ) = ٢ ق (∠ ب ا حـ) = ٦٦°

∴ ق (⌒ا س) = ٣٦٠° − (٩٤° + ٦٦° + ١٠٠° + ٢٦°)

= ٧٤° (المطلوب ثانيًا)

∴ ق (∠ ب هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ب حـ) − ق (⌒س ص)]

= $\frac{1}{2}$ [٦٦° − ٢٦°] = ٢٠° (المطلوب ثالثًا)

١٦

∵ ا ب = ب حـ = حـ ء = ء هـ

= ا هـ (خواص الخماسي المنتظم)

∴ ق (⌒ا ب) = ق (⌒ب حـ) = ق (⌒حـ ء)

= ق (⌒ء هـ) = ق (⌒ا هـ) = $\frac{٣٦٠°}{٥}$ = ٧٢°

∴ ق (⌒ا هـ) = ٧٢° (المطلوب أولًا)

، ق (⌒ا حـ هـ) = ٣٦٠° − ٧٢° = ٢٨٨°

∴ ق (∠ ا س هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا حـ هـ) − ق (⌒ا هـ)]

= $\frac{1}{2}$ [٢٨٨° − ٧٢°]

= ١٠٨° (المطلوب ثانيًا)

١٧ (١) (د) (٢) (جـ)

إرشادات لحل رقم **١٧**

(١) ∵ $\overline{اب}$ قطر في الدائرة

∴ ق (⌒ا هـ) + ق (⌒هـ ب) = ١٨٠° (١)

، ∵ ق (∠ ء هـ حـ) = ١٥٠°

∴ ق (∠ ء هـ حـ ا) = ٣٠°

∴ $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا هـ) − ق (⌒هـ ب)] = ٣٠°

∴ ق (⌒ا هـ) − ق (⌒هـ ب) = ٦٠° (٢)

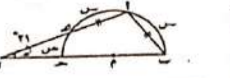
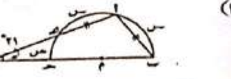
بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :

٢ ق (⌒ا هـ) = ٢٤٠°

∴ ق (⌒ا هـ) = ١٢٠°

ومنها θ = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

(٢)

∵ $\overline{ب حـ}$ قطر في الدائرة

∴ ٢ س + ص = ١٨٠° (١)

، ∵ ق (∠ ء) = ٢١°

∴ $\frac{1}{2}$ [س − ص] = ٢١°

∴ س − ص = ٤٢° (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٣ س = ٢٢٢°

∴ س = ٧٤°

∴ ص = ٣٢°

∴ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ [٧٤° + ٣٢°] = ٥٣°

في Δ ا ب ء :

ق (∠ ا) = ١٨٠° − (٥٣° + ٢١°) = ١٠٦°

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق (∠ ب) = ق (∠ ء) = ٩٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{اب}$ // $\overline{ء حـ}$ ∴ $\frac{ا هـ}{ا حـ} = \frac{ب هـ}{ب ء}$

∴ $\frac{٦٠}{ا حـ} = \frac{٤٥}{١٥٠}$ ∴ ا حـ = ٢٠٠ م

∴ بُعد الموقع حـ عن الموقع ا = ٢٠٠ متر

(وهو المطلوب)

٢

∵ $\overline{ب هـ}$ // $\overline{حـ ء}$ ∴ $\frac{ا ب}{ب حـ} = \frac{ا هـ}{هـ ء}$

∴ $\frac{ا ب}{٣٣} = \frac{١٣٠}{٣٩}$ ∴ ا ب = ١١٠ م

∴ طول بقعة الزيت = ١١٠ أمتار (وهو المطلوب)

٣

(١) نعم ، تقسيم يوسف للشريط صحيح.

∵ المسافة العمودية «المحصورة» بين كل سطرين من سطور الورقة متساوية.

(٢) ∴ عندما يتم وضع طرفي الورقة على سطرين من سطور الورقة وتكون حافة الورقة على شكل قاطع لسطور الورقة

فإن الأجزاء المحصورة تكون متساوية في الطول.

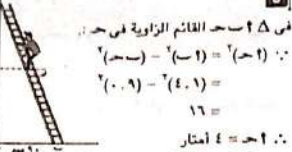
٤

∵ $\overline{ء ا}$ // $\overline{ب هـ}$ // $\overline{حـ و}$ ∴ $\frac{ا ب}{ا حـ} = \frac{ء هـ}{ء و}$

∴ $\frac{١٫٢}{ا حـ} = \frac{٠٫٨}{١٢٫٨}$ ∴ ا حـ = ١٩٫٢ مترًا

∴ طول الأنبوب = ١٩ مترًا (وهو المطلوب)

٥



في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في حـ :

∵ (أ حـ)² = (أ ب)² − (ب حـ)²

= (٤,١)² − (٠,٩)²

= ١٦

∴ أ حـ = ٤ أمتار

، ∵ هـ ء // ب حـ ∴ ب هـ / أ ب = حـ ء / أ حـ

∴ ب هـ / ٤,١ = ٢,٤ / ٤ ∴ ب هـ = ٢,٤٦ مترًا

∴ المسافة التي يصعدها الرجل على السلم

= ٢,٤٦ مترًا (وهو المطلوب)

٦

∵ أ ب : ب حـ : حـ ء = ٥ : ٤ : ٣

∴ أ ب / ٥ = ب حـ / ٤ = حـ ء / ٣ ∴ ١٨٠ / ٥ = ب حـ / ٤ = حـ ء / ٣

∴ ب حـ = ١٤٤ سم ، حـ ء = ١٠٨ سم

، ∵ أ هـ // ب و // حـ س // ء ص

∴ هـ ص / هـ و = ء أ / أ ب ∴ هـ ص / ٢٠٠ = ٤٣٢ / ١٨٠

∴ هـ ص = ٤٨٠ سم (وهو المطلوب)

٧

في Δ أ ب هـ :

∵ أ ب = ب هـ ، ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب أ هـ) = ٤٥° (١)

∵ ق(∠ب أ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠ء أ س) = ٤٥° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ب أ س) = ق(∠ء أ س)

∴ أ س ينصف ∠أ في Δ أ ب ء

∴ ب س / س ء = أ ب / أ ء = ٤٢ / ٥٦ = ٣ / ٤

∴ ب س / (ب س + س ء) = ٣ / (٣ + ٤)

∴ ب س / ب ء = ٣ / ٧

∵ Δ أ ب س ، Δ أ ب ء لهما نفس الارتفاع

∴ م(Δ أ ب س) / م(Δ أ ب ء) = ب س / ب ء = ٣ / ٧

∴ م(Δ أ ب س) = ٣/٧ × م(Δ أ ب ء)

= ٣/٧ × ١/٢ × ٤٢ × ٥٦ = ٥٠٤ متر مربع

(المطلوب أولًا)

في Δ ب أ ء القائم الزاوية في أ :

∴ (ب ء)² = (أ ب)² + (أ ء)² = (٤٢)² + (٥٦)² = ٤٩٠٠

∴ ب ء = ٧٠ مترًا

، ∵ ب س / ب ء = ٣ / ٧ ∴ ب س / ٧٠ = ٣ / ٧

∴ ب س = ٣٠ مترًا

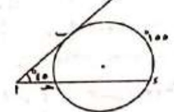
∴ س ء = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠ مترًا

∴ أ س = √(أ ب × أ ء − ب س × س ء)

= √(٤٢ × ٥٦ − ٣٠ × ٤٠)

= ٢٤ √٢ مترًا (المطلوب ثانيًا)

٨



∵ ق(∠أ) = ١/٢ [ق(ب ء⌢) − ق(ب حـ⌢)]

∵ ٤٥° = ١/٢ [١٥٥° − ق(ب حـ⌢)]

∴ ٩٠° = ١٥٥° − ق(ب حـ⌢)

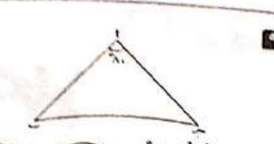
∴ ق(ب حـ⌢) = ٦٥°

∴ ق(ء حـ⌢) = ٣٦٠° − (١٥٥° + ٦٥°) = ١٤٠°

∴ طول (ء حـ⌢) = ١٤٠° / ٣٦٠° × ٢ × ١٠ × π

= ٢٤,٤ سم (وهو المطلوب)

٩



ق(∠أ) = ١/٢ [(٣٦٠° − ق(ب حـ⌢)) − ق(ب حـ⌢)]

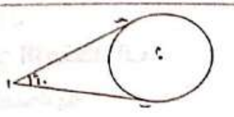
∴ ٨٠° = ١/٢ [٣٦٠° − ٢ ق(ب حـ⌢)]

∴ ١٦٠° = ٣٦٠° − ٢ ق(ب حـ⌢)

∴ ٢ ق(ب حـ⌢) = ٢٠٠°

∴ ق(ب حـ⌢) = ١٠٠° (وهو المطلوب)

١٠



∵ ق(∠أ) = ١/٢ [(٣٦٠° − ق(ب حـ⌢)) − ق(ب حـ⌢)]

∴ ٤٠° = ١/٢ [٣٦٠° − ٢ ق(ب حـ⌢)]

∴ ٨٠° = ٣٦٠° − ٢ ق(ب حـ⌢)

∴ ٢ ق(ب حـ⌢) = ٢٨٠°

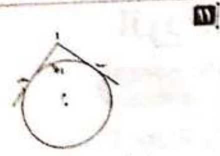
∴ ق(ب حـ⌢) = ١٤٠°

∴ ق(ب حـ⌢) الأكبر = ٣٦٠° − ١٤٠° = ٢٢٠°

∴ طول (ب حـ⌢) الأكبر = ٢٢٠° / ٣٦٠° × ٢ × ٩ × π

= ٣٤,٥٦ سم (وهو المطلوب)

١١



ق(∠أ) = ١/٢ [ق(ب حـ⌢) الأكبر − ق(ب حـ⌢)]

= ١/٢ [٣٦٠° − ٥٤° − ٥٤°]

= ١٢٦° (المطلوب أولًا)

∵ طول (ب حـ⌢) = ٥٤° / ٣٦٠° × ٢ π نق

∴ ٦٠١١ = ٥٤° / ٣٦٠° × ٢ × π × نق

∴ نق = (٣٦٠° × ٦٠١١) / (٥٤° × ٢ × π) = ٦٣٧٨ كم (المطلوب ثانيًا)